Geometria
Appello I — Sessione Invernale
Corso di laurea in fisica — a.a. 2019/2020
Tutti i Canali

Durata: 2 ore e 30 minuti

Paolo Bravi   Simone Diverio   Gabriele Mondello
Paolo Piccinni   Riccardo Salvati Manni

20 gennaio 2020

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema lineare a coefficienti reali, di tre equazioni in tre incognite, con parametro reale k:

$$\begin{cases} kx + y = 2 \\ x + kz = 2 \\ ky - z = 1. \end{cases}$$

Determinare per quali valori di k il sistema è compatibile, e per tali valori determinare l'insieme delle soluzioni.

Esercizio 2. Sia $T\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ l'operatore lineare espresso in coordinate da

$$T\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z + iw \\ -iz + w \end{pmatrix}.$$

Determinare, se esiste, una base di autovettori di T che sia unitaria (cioè ortonormale) rispetto al prodotto hermitiano canonico di $\mathbb{C}^2$.

Esercizio 3. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}_2[x]$ dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a due nell'indeterminata x. Si consideri il sottospazio vettoriale

$$U = \{p \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(0) = 0\},$$

e il sottoinsieme

$$V = \{p \in \mathbb{R}_2[x] \mid p'(0) + p(1) = 0\},$$

dove con l'apice si indica la derivata prima.

Dopo aver verificato che anche V è un sottospazio vettoriale, determinare una base per U, V, $U \cap V$, e $U + V$.

Esercizio 4. Si consideri l'unico operatore lineare $T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}.$$

Determinare la matrice associata a T, rispetto alle basi canoniche degli spazi di partenza ed arrivo. Determinare una base per il nucleo e per l'immagine di T.

Esercizio 5. Sia $V \subseteq \mathbb{R}^3$ il sottospazio vettoriale descritto dall'equazione cartesiana $x - y + z = 0$.

Determinare equazioni cartesiane per $V^{\perp_{\langle \cdot, \cdot \rangle}}$, complemento ortogonale di V rispetto al prodotto scalare canonico $\langle \cdot, \cdot \rangle$ di $\mathbb{R}^3$.

Si consideri poi in $\mathbb{R}^3$ il prodotto scalare definito positivo $g(\cdot, \cdot)$ la cui matrice associata nella base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ è

$$G = \big(g(e_i, e_j)\big)_{i,j} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinare una base per $V^{\perp_g}$, complemento ortogonale di V rispetto al prodotto scalare g.

Soluzioni

Esercizio 1. La matrice dei coefficienti e completa del sistema sono rispettivamente

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & 0 & k \\ 0 & k & -1 \end{pmatrix}, \quad A|b = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & k & 2 \\ 0 & k & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcolando il determinante di A, ad esempio con la regola di Sarrus,1 otteniamo

$$\det A = 1 - k^3.$$

Pertanto se $k \neq 1$, la matrice dei coefficienti ha rango 3, e per il Teorema di Rouché–Capelli il sistema è compatibile e ammette una e una sola soluzione. Tale soluzione è data, usando ad esempio il metodo di Cramer, da

$$\begin{cases} x = \frac{-2k^2+k+2}{1-k^3} \\ y = \frac{-k^2-2k+2}{1-k^3} \\ z = \frac{-2k^2+2k-1}{1-k^3}. \end{cases}$$

Se invece $k = 1$, allora in rango di A è 2, mentre il rango di $A|b$ è 3, come si vede ad esempio con un'eliminazione di Gauß:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi, sempre per il Teorema di Rouché–Capelli, per $k = 1$ il sistema risulta essere incompatibile.

Esercizio 2. La matrice associata a T nella base canonica è

$$H = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Essendo la base canonica unitaria rispetto al prodotto hermitiano canonico, ed essendo la matrice H di T una matrice hermitiana in questa base, si ha che T è autoaggiunto e dunque il Teorema Spettrale garantisce l'esistenza di una base unitaria di autovettori per T.

Il polinomio caratteristico di T è

$$p_T(\lambda) = \det(H - \lambda \operatorname{Id}_2) = \lambda(\lambda - 2),$$

e dunque $\operatorname{sp}(T) = \{0, 2\}$. L'autospazio relativo all'autovalore 0 è dato da

$$\ker T = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\},$$

come è facile vedere dalla matrice H, e sapendo che questo autospazio, così come l'altro, hanno necessariamente dimensione uno visto che ci sono due autovalori distinti.

È altrettanto facile vedere che

$$H \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix},$$

e dunque l'autospazio relativo all'autovalore 2 è dato da

$$\operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\}.$$

I due vettori indicati come generatori degli autospazi sono automaticamente una base ortogonale, essendo T autoaggiunto. Per ottenere una base unitaria è sufficiente dunque normalizzarli e dunque una possibile scelta per la base cercata è

$$\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\}.$$

Esercizio 3. Siano $p, q \in \mathbb{R}_2[x]$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ arbitrari. Si ha che V è non vuoto (contiene il polinomio nullo), e

$$(\alpha p + \beta q)'(0) + (\alpha p + \beta q)(1) = \alpha p'(0) + \beta q'(0) + \alpha p(1) + \beta q(1),$$

e quindi se $p, q \in V$ anche ogni loro combinazione lineare è in V, e V è dunque un sottospazio vettoriale.

Il sottospazio U consiste in tutti e soli i polinomi in $\mathbb{R}_2[x]$ a termine noto nullo, dunque una sua base è data da $\{x, x^2\}$. Se scriviamo un polinomio generico in $\mathbb{R}_2[x]$ come $ax^2 + bx + c$, abbiamo che V ha equazioni cartesiane date da $a + 2b + c = 0$, e dunque una base è data da $\{2x^2 - x, x^2 - 1\}$.

Per l'intersezione, si tratta di trovare i polinomi in V che abbiano inoltre termine noto nullo: una base è data ad esempio dunque da $\{2x^2 - x\}$. Infine, per la somma, la Formula di Grassmann fornisce che ha dimensione 3, e dunque coincide con tutto lo spazio $\mathbb{R}_2[x]$. Una base è quindi data ad esempio da $\{1, x, x^2\}$.

Esercizio 4. Dal testo dell'esercizio si evince che

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $\mathbb{R}^3$. Scriviamo allora facilmente la matrice $\tilde{A}$ associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ in partenza e alla base canonica in arrivo. Essa è data da

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

La matrice C del cambiamento di coordinate dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è data da

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque la matrice A cercata, associata a T rispetto alle basi canoniche sia in partenza che in arrivo è data da

$$A = \tilde{A} \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Un'eliminazione d Gauß sulla matrice A fornisce

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi troviamo che $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$, e dunque una base per $\mathrm{Im}(T)$ è data ad esempio dalla base canonica di $\mathbb{R}^2$. Per $\ker T$ troviamo invece, prendendo la terza coordinata come parametro libero

$$\ker T = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Esercizio 5. È immediato trovare una base di $V^{\perp_{\langle\cdot,\cdot\rangle}}$, guardando ai coefficienti dell'equazione che definisce V: abbiamo

$$V^{\perp_{\langle\cdot,\cdot\rangle}} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Per trovare equazioni cartesiane, utilizziamo ad esempio un'eliminazione di Gauß, e abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ -1 & y \\ 1 & z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & x+y \\ 0 & x-z \end{pmatrix}.$$

Equazioni cartesiane per $V^{\perp_{\langle\cdot,\cdot\rangle}}$ sono dunque date da $x + y = x - z = 0$.

Per trovare il sottospazio g-ortogonale a V, cominciamo col trovare una base di V. Ponendo come variabili libere y e z, troviamo

$$V = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dunque $V^{\perp_g}$ è dato da tutti e soli i vettori $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^t$ tali che

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Equazioni cartesiane per $V^{\perp_g}$ sono pertanto

$$\begin{cases} 3x + 2z = 0 \\ -4x + 3y + z = 0. \end{cases}$$

Da cui si ricava una base, facendo un'eliminazione di Gauß:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 11 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo dunque, prendendo z come parametro libero,

$$V^{\perp_g} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ -9 \end{pmatrix} \right\}.$$