Geometria
Prova autovalutativa di metà semestre
Testo e soluzioni
Corso di laurea in fisica — A.A 2017/2018
Canali A – C e L-Pa

DURATA: 1 ORA E 30 MINUTI

Simone Diverio e Alessandro D'Andrea

24 novembre 2017

Esercizio 1. Sia $\mathbb{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a due. Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni.

(i) Il sottoinsieme $V \subset \mathbb{R}_2[x]$ definito da $V = \{p \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(1) = 0\}$ è un sottospazio vettoriale.

(ii) Il sottoinsieme $L \subset \mathbb{R}_2[x]$ definito da $L = \{p \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(1) = 1\}$ è un sottospazio vettoriale.

(iii) Il sottoinsieme $L \subset \mathbb{R}_2[x]$ definito come sopra è un sottospazio affine.

(iv) Il sottoinsieme $S \subset \mathbb{R}_2[x]$ definito da $S = \{p \in \mathbb{R}_2[x] \mid \forall t \in \mathbb{R}, p(t) < 1\}$ è un sottospazio vettoriale.

(v) L'applicazione derivata $D \colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ definita da $D(p) = p'$ è lineare ma non suriettiva.

Esercizio 2. Sia $L_A \colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 1 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinare equazioni cartesiane per l'immagine $\mathrm{Im}(L_A)$ di L_A ed una parametrizzazione lineare per il nucleo $\ker(L_A)$ di L_A.

Sia $v_k \in \mathbb{C}^3$ il vettore di coordinate

$$v_k = \begin{pmatrix} k \\ k - i \\ k \end{pmatrix}.$$

Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{C}$ si ha che $v_k \in \mathrm{Im}(L_A)$.

Esercizio 3. Dati i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$U = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\2\\2\\1 \end{pmatrix} \right\}, \quad V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ tali che } x_2 = x_3 = 0 \right\},$$

determinare equazioni cartesiane per $U+V$, la dimensione di $U \cap V$, e completare una base di $U+V$ a una base di $\mathbb{R}^4$.

Soluzioni

Esercizio 1. Il sottoinsieme V è un sottospazio vettoriale. Infatti se $p, q \in V$, e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si ha

$$(\alpha p + \beta q)(1) = \alpha \underbrace{p(1)}_{=0} + \beta \underbrace{q(1)}_{=0} = 0.$$

Il sottoinsieme L non è un sottospazio vettoriale, infatti $0 \notin L$, dove con 0 si intende il polinomio $p = 0$. È invece un sottospazio affine: infatti

$$L = 1 + V,$$

dove con 1 si intende il polinomio $p = 1$. Il sottoinsieme S non è un sottospazio vettoriale, benché $0 \in S$. Infatti, ad esempio, il polinomio $p = 1/2$ appartiene ad S, mentre $\lambda p \notin S$ per ogni reale $\lambda \geq 2$.

Infine, siano $p = ax^2 + bx + c, q = dx^2 + ex + f \in \mathbb{R}_2[x]$, e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora

$$\begin{aligned} D(\alpha p + \beta q) &= D\big((\alpha a + \beta d)x^2 + (\alpha b + \beta e)x + \alpha c + \beta f\big) \\ &= 2(\alpha a + \beta d)x + \alpha b + \beta e \\ &= \alpha(\underbrace{2ax + b}_{=p'}) + \beta(\underbrace{2dx + e}_{=q'}) = \alpha D(p) + \beta D(q). \end{aligned}$$

L'applicazione D non può essere suriettiva, in quanto la derivata fa calare il grado del polinomio di uno, per cui un qualunque polinomio di grado due non può essere nell'immagine di D.

Esercizio 2. Facciamo un'eliminazione di Gauss sulla matrice

$$A|z|v_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & z_1 & k \\ 0 & 1 & 1 & z_2 & k-i \\ i & 1 & 0 & z_3 & k \end{pmatrix},$$

ottenendo ad esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & i & z_1 & k \\ 0 & 1 & 1 & z_2 & k-i \\ 0 & 0 & 0 & iz_1 + z_2 - z_3 & i(k-1) \end{pmatrix}.$$

Leggendo solo le prime quattro colonne, scopriamo che un'equazione cartesiana per l'immagine è data da

$$iz_1 + z_2 - z_3 = 0.$$

Leggendo solo le prime tre colonne troviamo per il nucleo la seguente parametrizzazione lineare

$$\begin{cases} z_1 = -i\zeta \\ z_2 = -\zeta \\ z_3 = \zeta, \end{cases} \qquad \zeta \in \mathbb{C}.$$

Leggendo solo le prime tre colonne e l'ultima, troviamo che $v_k \in \mathrm{Im}(L_A)$ se e solo se $k = 1$.

Esercizio 3. Una base per V è data da $\{e_1, e_4\}$, quindi un sistema di generatori per $U + V$ è dato da

$$U + V = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Facciamo ora un'eliminazione di Gauss alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & x_4 \end{pmatrix},$$

ottenendo ad esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & 0 & -3x_1 + x_2 + x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

Quindi, guardando solo le prime quattro e l'ultima colonna, troviamo che un'equazione cartesiana per $U + V$ è data da

$$-x_2 + x_3 = 0.$$

Guardando solo le prime quattro colonne dell'eliminazione si evince al contempo che una base per $U + V$ è data da

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

e che i generatori dati per U sono anche indipendenti. In particolare dunque $\dim(U + V) = 3$ e $\dim U = 2$, mentre già sappiamo che $\dim V = 2$. La formula di Grassmann ci dice allora direttamente che $\dim(U \cap V) = 1$.

Guardando infine solo le prime sei colonne, troviamo che per completare la base trovata di $U + V$ ad una base di $\mathbb{R}^4$ è sufficiente aggiungere il vettore e_2.

Autovalutazione. Ogni esercizio vale 10 punti. Per quanto riguarda il primo esercizio, ogni domanda vale 2 punti. Per il secondo ed il terzo esercizio, bisogna rispondere per ognuno a tre domande, ognuna delle quali vale 10/3 di punto.

Risposte non argomentate non danno punti. Se l'argomentazione è valida ma il risultato errato a causa di errori di calcolo, il punteggio deve essere considerato "quasi" pieno. Viceversa, se l'argomentazione è errata ma il risultato è esatto, il punteggio è da considerarsi nullo.

Un compito ordinato e ben redatto può guadagnare qualche punto. Viceversa, un compito disordinato può perdere qualche punto.