Geometria per Fisica
Soluzioni della prova autovalutativa di metà semestre
a.a. 2019/2020
Canali A – C, D – K, L – Pa

Paolo Bravi, Simone Diverio, Paolo Piccinni

27 novembre 2019

Esercizio 1. Discutere, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{C}$, la compatibilità del seguente sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite, a coefficienti complessi.

$$\begin{cases} z_1 + \lambda z_2 = 0 \\ -iz_1 + z_2 = i \\ \lambda z_1 + z_2 + iz_3 = 0. \end{cases}$$

Per i valori di λ per cui il sistema risulta compatibile determinare l'insieme delle soluzioni.

Esercizio 2. Siano dati in $\mathbb{R}^3$ i due sottospazi vettoriali

$$U = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dimostrare che $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ e determinare l'espressione in coordinate dell'applicazione lineare

$$\pi_W^U \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$

proiezione su W parallelamente a U.

Esercizio 3. Determinare l'espressione in coordinate dell'unica applicazione lineare

$$T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

tale che

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Determinare inoltre una base per $\ker T$ e descrivere $\operatorname{Im} T$.

Soluzioni

Esercizio 1. La matrice completa del sistema è data da

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ -i & 1 & 0 & i \\ \lambda & 1 & i & 0 \end{array}\right).$$

Un'eliminazione di Gauß fornisce, per $\lambda \neq i$, il sistema triangolare superiore

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1+i\lambda & 0 & i \\ 0 & 0 & i-\lambda & i(\lambda^2-1) \end{array}\right).$$

In questo caso il sistema è chiaramente compatibile (tre pivot), ed ammette soluzione unica data da (risolvendo all'indietro)

$$\begin{cases} z_1 = -\frac{i\lambda}{1+i\lambda} \\ z_2 = \frac{i}{1+i\lambda} \\ z_3 = i\frac{\lambda^2-1}{i-\lambda}. \end{cases}$$

Se invece $\lambda = i$, otteniamo la forma a scala

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{array}\right),$$

che dunque non è compatibile (essendo il rango della matrice dei coefficienti uguale a due e quello della matrice completa uguale a tre).

Esercizio 2. Il sottospazio U ha dimensione uno essendo generato da un solo vettore non nullo. Il sottospazio W ha dimensione due, essendo generato da due vettori linearmente indipendenti (in quanto chiaramente non proporzionali). Per la Formula di Grassmann si ha

$$\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = 3,$$

e dunque per mostrare che $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ è sufficiente mostrare ad esempio che $\dim(U + W) = 3$. In tal caso infatti, necessariamente $U + W = \mathbb{R}^3$, essendo un sottospazio di dimensione tre di $\mathbb{R}^3$, e automaticamente $U \cap W = \{0\}$.

Un sistema di generatori per $U + W$ è dato dall'unione del generatore di U e quelli di W: per estrarne una base basta fare un'eliminazione di Gauß sulla matrice le cui colonne sono questi generatori:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{E.G.}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dunque i generatori sono indipendenti e $\dim(U + W) = 3$, come volevasi.

Per determinare la proiezione, osserviamo che un'equazione cartesiana per W è data ad esempio da

$$\left\{ x + z = 0. \right.$$

Ora, se $(\alpha, \beta, \gamma)^t \in \mathbb{R}^3$, per determinare la sua proiezione su W parallelamente a U dobbiamo determinare il valore del parametro $t \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W,$$

cioè il valore di t tale che

$$\alpha - t + \gamma - t = 0,$$

vale a dire $t = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$. Ma allora

$$\pi_W^U \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha - \gamma \\ -\alpha + 2\beta - \gamma \\ -\alpha + \gamma \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Un modo di procedere è osservare che

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = T\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - T\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

$$T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = T\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} &= T\left(-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) = -T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + T\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\\ &= -\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\end{aligned}$$

e che dunque

$$\begin{aligned}T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} &= T\left(x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\\ &= x\,T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\,T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + z\,T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\\ &= x\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Dunque si evince immediatamente che $\ker T = \{(x,y,z)^t \mid x = y = 0\}$, e ciò equivale a $\ker T = \mathrm{Span}\{(0,0,1)^t\}$, ed essendo $(0,0,1)^t$ non nullo, esso è anche una base per $\ker T$. Il Teorema della Dimensione fornisce allora $\dim \mathrm{Im}\, T = 3 - \dim\ker T = 2$, e dunque $\mathrm{Im}\, T = \mathbb{R}^2$, come era anche immediato verificare dalla scrittura esplicita di T in coordinate.

Autovalutazione. Ogni esercizio vale 7 punti. Il voto finale è dato dalla somma dei punti ottenuti moltiplicati per il fattore 5/3 (se il risultato finale eccede il 30, si consideri come 30 e lode).

Per quanto riguarda il primo esercizio, la determinazione dei valori del parametro che corrispondono a sistemi compatibili/incompatibili vale 4 punti. La determinazione della soluzione esplicita per $\lambda \neq i$ vale 3 punti.

Per il secondo esercizio, la verifica che i due sottospazi decompongono in somma diretta $\mathbb{R}^3$ vale 3 punti, mentre la scrittura in coordinate della proiezione vale 4 punti.

Per il terzo esercizio, la determinazione dell'espressione di T in coordinate vale 4 punti, mentre la descrizione di nucleo e immagine vale 3 punti.

Risposte non argomentate non danno punti. Se l'argomentazione è valida ma il risultato errato a causa di errori di calcolo, il punteggio deve essere considerato "quasi" pieno. Viceversa, se l'argomentazione è errata ma il risultato è esatto, il punteggio è da considerarsi nullo.

Un compito ordinato e ben redatto può guadagnare qualche punto. Viceversa, un compito disordinato può perdere qualche punto (anche molti...).