Primo appello di Geometria (Corso di laurea in Fisica, Canali A-C e D-O)
Prof. Barucci e Piccinni
1 febbraio 2012

a. Scrivere subito canale, cognome e nome.
b. Utilizzare questi fogli per le risposte. I fogli protocollo distribuiti a parte sono invece per eventuali riflessioni o calcoli, e non vanno consegnati.
c. Durante la prova non si possono consultare testi e appunti né usare fogli diversi da quelli distribuiti.
d. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Tempo a disposizione: 2 ore

Canale............................**Cognome**...**Nome**...

1. Si consideri l'equazione $z^2 + 2iz - 1 = 0$, a coefficienti in $\mathbb{C}$. Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera:

   $\boxed{1}$ Le soluzioni sono $z_1 = i$; $z_2 = -i$

   $\boxed{2}$ Le soluzioni sono $z_1 = z_2 = i$

   $\boxed{\bowtie 3}$ Le soluzioni sono $z_1 = z_2 = -i$

   $\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti.

2. Siano $A_1, A_2 \in M_n(\mathbb{R})$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte)

   $\boxed{\bowtie 1}$ Se A_1 e A_2 sono simmetriche $(A_1 = A_1^t, A_2 = A_2^t)$, allora $A_1 + A_2$ è simmetrica

   $\boxed{\bowtie 2}$ Se A_1 e A_2 sono antisimmetriche $(A_1 = -A_1^t, A_2 = -A_2^t)$, allora $A_1 + A_2$ è antisimmetrica

   $\boxed{3}$ Se A_1 e A_2 sono simmetriche, allora il prodotto A_1A_2 è una matrice simmetrica

   $\boxed{4}$ Se A_1 e A_2 sono antisimmetriche, allora il prodotto A_1A_2 è una matrice antisimmetrica

   $\boxed{5}$ Nessuna delle precedenti

3. Si consideri nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ il piano $\alpha : x + z + 1 = 0$, essendo (x, y, z) le coordinate cartesiane di $\mathbb{R}^3$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

   $\boxed{1}$ α è parallelo al piano xz (contenente gli assi x e z)

   $\boxed{\bowtie 2}$ α è parallelo all'asse y

   $\boxed{\bowtie 3}$ α è perpendicolare al piano xz

   $\boxed{4}$ α è perpendicolare all'asse y

   Per 2, basta vedere che i parametri direttori dell'asse y, che sono $(0, 1, 0)$ annullano l'equazione $x + z = 0$ del piano parallelo ad α per l'origine.

   Per 3, si confrontano i parametri di giacitura del piano α, $(1, 0, 1)$, con i parametri di giacitura del piano xz (di equazione $y = 0$), che sono $(0, 1, 0)$ e si vede che il loro prodotto scalare è nullo.

4. Si considerino nello spazio $\mathbb{R}^3$ la retta r di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = & 5 - 5t \\ y = & 13 + 24t \\ z = & 0 \end{cases}$$

e il piano α di equazione cartesiana $3x + z = 5$, stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

$\boxed{\bowtie 1}$ r e α si intersecano in un punto.

$\boxed{2}$ r e α hanno intersezione vuota.

$\boxed{3}$ r è contenuta nel piano α

$\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti.

Basta vedere che $3(5 - 5t) + 0 = 5$ si verifica per un unico valore di t.

5. Si consideri in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale U di equazioni $x_1 + x_2 = 0$ $x_2 = 0$, nelle coordinate cartesiane (x_1, x_2, x_3, x_4) di $\mathbb{R}^4$. Sia $U^\perp$ il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ formato dai vettori di $\mathbb{R}^4$ ortogonali (nel prodotto scalare canonico) a tutti i vettori di U. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

$\boxed{\bowtie 1}$ $\dim U^\perp = 2$

$\boxed{\bowtie 2}$ $(1, 0, 0, 0) \in U^\perp$

$\boxed{\bowtie 3}$ $U^\perp$ ha equazioni cartesiane $x_3 + 2x_4 = 0,\ x_3 - x_4 = 0$

$\boxed{4}$ $U^\perp$ ha equazioni cartesiane $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,\ x_2 + x_3 + x_4 = 0$

Poiché $U = \mathrm{Ker}A$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si ha che $U^\perp = \mathrm{Im}A^t = \mathrm{Span}((1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 0))$, da cui seguono facilmente le risposte.

6. Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 ad elementi reali. Sia

$$T : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$$

l'applicazione lineare definita da $T(A) = A + A^t$, somma di A con la sua trasposta. Qual'è la matrice che rappresenta T nella base canonica $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

$\boxed{1}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{3}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\bowtie 4}$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{5}$ Nessuna delle precedenti

Per riconoscere la matrice che rappresenta T rispetto alla base fissata, si scrive $T(E_{11}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare di $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$, gli elementi della base, e i coefficienti che otteniamo, $2, 0, 0, 0$ in questo caso formano la prima colonna della matrice. Si procede analogamente per trovare le altre colonne.

7. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (eventualmente anche più risposte):

$\boxed{1}$ $AB = BA$

$\boxed{2}$ $B = A^{-1}$

$\boxed{\bowtie 3}$ Gli autovalori di A e di B sono gli stessi

$\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti

Infatti A e B hanno lo stesso polinomio carateristico $(1-\lambda)^2$. Le altre affermazioni sono false.

8. Sia $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, con $\theta \in [0, 2\pi)$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{\bowtie 1}$ per qualche $\theta \in [0, 2\pi)$ esiste un vettore $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \vec{x} \neq \vec{0}$, con $A_\theta \vec{x} = \vec{x}$

$\boxed{\bowtie 2}$ per qualche $\theta \in [0, 2\pi)$ esiste un vettore $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \vec{x} \neq \vec{0}$, con $A_\theta \vec{x} = -\vec{x}$

$\boxed{3}$ per qualche $\theta \in [0, 2\pi)$ esiste un vettore $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \vec{x} \neq \vec{0}$, con $A_\theta \vec{x} = \vec{0}$

$\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti.

Trattandosi di una rotazione di un angolo θ, le risposte si ottengono geometricamente. La 3 è falsa perché si chiede un vettore non nullo $\vec{x}$.

9. Sia

$$V = \mathbb{R}_{\leq 4}[x] = \{P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4\}$$

lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 4 a coefficienti reali, e sia

$$U = \mathbb{R}_{\leq 2}[x] = \{Q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2\}$$

il sottospazio vettoriale costituito dai polinomi di grado ≤ 2. Stabilire quali tra i seguenti sottoinsiemi W di V costituiscono un sottospazio vettoriale tale che $V = U \oplus W$ (eventualmente anche più risposte):

$\boxed{\bowtie 1}$ $W = \{P(x) \in V$ tali che $a_0 = a_1 = a_2 = 0\}$

$\boxed{2}$ $W = \{P(x) \in V$ tali che $P"(x) = 0\}$ essendo $P"(x)$ la derivata seconda di $P(x)$

$\boxed{\bowtie 3}$ $W = \{P(x) \in V$ tali che $< P(x), Q(x) >= 0$ per ogni $Q(x) \in U\}$,
essendo $<\ ,\ >$ il prodotto scalare canonico nello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^5 \cong V$

$\boxed{4}$ Nessuno dei precedenti

La scelta di W in 1 è facile. W in 3 è dato da quei polinomi $b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4$ tali che $b_0 a_0 + b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 0 + b_4 0 = 0$ per ogni $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Questo coincide con l'insieme descritto in 1. L'annullarsi della derivata econda dà invece $a_2 = a_3 = a_4 = 0$.

10. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3, $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ una base di V e T_h l'endomorfismo di V tale che: $T(\mathbf{v_1}) = h\mathbf{v_1} + (h-1)\mathbf{v_2} - \mathbf{v_3}$, $T(\mathbf{v_2}) = \mathbf{v_2} + \mathbf{v_3}$, $T(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} + \mathbf{v_3}) = h\mathbf{v_1} + h\mathbf{v_2} + (h-1)\mathbf{v_3}$, dove $h \in \mathbb{R}$. Stabilire quale tra le seguenti affermazioni è vera.

$\boxed{1}$ T_h è diagonalizzabile per ogni valore reale di h

$\boxed{2}$ T_h non è mai diagonalizzabile

$\boxed{\bowtie 3}$ T_h è diagonalizzabile soltanto per $h \neq 2$

$\boxed{4}$ T_h è diagonalizzabile soltanto per $h \neq 3$

$\boxed{5}$ T_h è diagonalizzabile soltanto per $h \neq 2$ e $h \neq 3$

$T(\mathbf{v_3}) = T(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} + \mathbf{v_3}) - T(\mathbf{v_1}) - T(\mathbf{v_2}) = (h-1)\mathbf{v_3}$ quindi la matrice che rappresenta l'endomorfismo rispetto alla base fissata è

$$A = \begin{pmatrix} h & 0 & 0 \\ h-1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & h-1 \end{pmatrix}$$

e il polinomio caratteristico è $(h-1-\lambda)(h-\lambda)(1-\lambda)$. Per $h \neq 1$ e $h \neq 2$, i tre autovalori sono distinti e quindi l'endomorfismo è diagonalizzabile. Per $h = 1$, l'autovalore $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 2, quindi l'endomorfismo è ancora diagonalizzabile. Per $h = 2$ invece l'autovalore $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1, quindi l'endomorfismo non è diagonalizzabile.