Seminari di Geometria Superiore

a.a. 2012-2013 Prof. Piccinni

Esempi di Metriche Kähleriane

Stefano Roberti Gloria N. Marchetti

21 maggio 2013

Capitolo 1

Esempi di Metriche Kähleriane

di Stefano Roberti

In questo seminario ci occupiamo di fornire alcuni esempi di Metriche Kälheriane. Gli esempi di cui parleremo nel dettaglio sono: la metrica *piana* su $\mathbb{C}^n$ e la metrica di *Fubini-Study* in $\mathbb{CP}^m$. In entrambi i casi, almeno nella prima parte del seminario, svolgeremo dettagliatamente i calcoli per la verifica delle definizioni: nella seconda parte sono riportate, con tutti i dovuti calcoli, alcune proprietá della metrica di Fubini-Study, di interesse generale.

1.1 Richiami fondamentali

É doveroso fare alcuni richiami: in particolare ci riferiremo al seminario riguardante le varitá Hermitiane e Käleriane. In tale seminario si é data la seguente:

Definizione 1.1.1. Data (M, J) una varitá quasi complessa, data h una metrica Riemaniana esse si dice hermitiana se

$$h(X, Y) = h(JX, JY) \qquad \forall\, X, Y \in TM.$$

Ad ogni metrica hermitiana associamo la 2-forma:

$$\Omega(X, Y) = h(X, JY), \tag{1.1}$$

detta 2-forma fondamentale. Inoltre si dava anche la seguente:

Definizione 1.1.2. h metrica hermitiana su (M,J), si dice di Kähler se:

$$\begin{cases} d(\Omega) = 0 \\ N^J = 0. \end{cases}$$

Ricordiamo che l'ultima condizione va interpretata come il fatto che la varitá M é in realtá una varietá complessa: dunque tale condizione é banalmente vera per i nostri esempi che sono appunto varietá complesse. Dunque, da verificare, rimane solo la prima condizione: cioé la chiusura della 2-forma fondamentale. In effetti questa condizione va inquadrata nei termini del $i\partial\bar{\partial} - lemma$ che recita:

Lemma 1.1.3. Sia ω una (1,1)-forma chiusa, reale su di una varitá complessa M. Allora ω é chiusa se, e solo se, per ogni punto x di M esiste un aperto U, intorno di x, tale che la restrizione di ω su U é uguale a $i\partial\bar{\partial}u$ per qualche funzione u definita su U.

Dunque per una metrica Kähleriana, essendo la sua 2-forma fondamentale chiusa, é sempre possibile esprimere localmente tale forma fondamentale in termini di una funzione: questa funzione verrá chiamata *potenziale locale di Kähler*.
Infine vogliamo richiamare un risultato che discende dalle definizioni di metrica hermitiana e struttura hermitiana che ci sará molto utile nel primo esempio: risultato ben descritto nel suddetto seminario riguardante le varietá hermitiane. Si puó dimostra che, se M é una varitá complessa che ammette una struttura hermitiana H, allora ponendo

$$h = \mathfrak{Re}(H)$$

h é una metrica hermitiana su M, la cui forma fondamentale é proprio

$$\Omega = \mathfrak{Im}(H).$$

Proprio da questo, considerando la base data dalle coordinate olomorfe $(z, \bar{z})$, si otteneva:

$$h = \sum_{\alpha,\beta} h_{\alpha\beta} dz_\alpha \otimes d\bar{z}_\beta$$

$$\Omega = i \sum_{\alpha,\beta} h_{\alpha\beta} dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta$$

dove

$$h_{\alpha\beta} = h\Big(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta}\Big)$$

A questo punto possiamo passare agli esempi.

1.2 La metrica piana su $\mathbb{C}^n$

Consideriamo su $\mathbb{C}^n$ il prodotto hermitiano standard: esso definisce una struttura hermitiana, che denoteremo con H, la quale agisce nel modo seguente

$$H(u, z) = \sum_{\alpha=1}^{n} u_\alpha \bar{z}_\alpha.$$

In luce di quanto visto nei richiami sappiamo allora che:

$$h = \mathfrak{Re}(H) = \sum_{\alpha,\beta} h_{\alpha\beta} dz_\alpha \otimes d\bar{z}_\beta$$

é una metrica hermitiana, la cui 2-forma fondamentale é esattamente

$$\Omega = \mathfrak{Im}(H) = i \sum_{\alpha,\beta} h_{\alpha\beta} dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta.$$

In questo caso peró:

$$h_{\alpha\beta} = h\Big(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha}\Big) = \mathfrak{Re}(H)\Big(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha}\Big).$$

Calcoliamo dunque esplicitamente questi coefficienti $h_{\alpha\beta}$. Ricordando che la base $\{\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\}$ puó essere espressa in termini delle coordinate (reali) x e y legate a z e $\bar{z}$, dalle formule

$$\begin{cases} z_\alpha = x_\alpha + i y_\alpha \\ \\ \bar{z}_\alpha = x_\alpha - i y_\alpha \end{cases} \quad \forall \quad \alpha = 1, \cdots, n$$

Da cui si ottengono le relazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z_\alpha} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} - i\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\Big) \\ \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + i\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\Big) \end{cases} \quad \forall \quad \alpha = 1, \cdots, n$$

Tornando ai coefficienti che stavamo calcolando, abbiamo:

$$h_{\alpha\bar{\beta}}\Big(\frac{\partial}{\partial z_\alpha},\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta}\Big)=\mathfrak{Re}(H)\Big(\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}-i\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\Big),\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_\beta}+i\frac{\partial}{\partial y_\beta}\Big)\Big)=$$

$$=\frac{1}{4}\mathfrak{Re}(H)\Big(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}-i\frac{\partial}{\partial y_\alpha},\frac{\partial}{\partial x_\beta}+i\frac{\partial}{\partial y_\beta}\Big)=$$

$$=\frac{1}{4}\mathfrak{Re}\Bigg[H\Big(\frac{\partial}{\partial x_\alpha},\frac{\partial}{\partial x_\beta}\Big)+iH\Big(\frac{\partial}{\partial x_\alpha},\frac{\partial}{\partial y_\beta}\Big)-iH\Big(\frac{\partial}{\partial y_\alpha},\frac{\partial}{\partial x_\beta}\Big)+H\Big(\frac{\partial}{\partial y_\alpha},\frac{\partial}{\partial y_\beta}\Big)\Bigg]=$$

$$=\frac{1}{4}\Bigg[H\Big(\frac{\partial}{\partial x_\alpha},\frac{\partial}{\partial x_\beta}\Big)+H\Big(\frac{\partial}{\partial y_\alpha},\frac{\partial}{\partial y_\beta}\Big)\Bigg]=\frac{1}{4}\Big[\delta_{\alpha\bar{\beta}}+\delta_{\alpha\bar{\beta}}\Big]=\frac{1}{2}\delta_{\alpha\bar{\beta}}.$$

Questa é la forma esplicita dei coefficienti di h, dunque la forma fondamentale si scrive, nelle coordinate $(z,\bar{z})$, cosí

$$\Omega=i\sum_{\alpha\beta}h_{\alpha\bar{\beta}}dz_\alpha\wedge d\bar{z}_\beta=\frac{i}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}dz_\alpha\wedge d\bar{z}_\alpha.$$

Bisogna solo provare che Ω é chiusa: faremo vedere che ammette un potenziale. Consideriamo la funzione $u(z)=\frac{|z|}{2}^2$ e calcoliamone la derivata $\partial\bar{\partial}$: facilmente si eseguono i seguenti calcoli

$$\partial\bar{\partial}u=\frac{1}{2}\partial\bar{\partial}|z|^2=\frac{1}{2}\partial\bar{\partial}\Big(z_1\bar{z}_1+\cdots+z_n\bar{z}_n\Big)=\frac{1}{2}\partial\Big(z_1d\bar{z}_1+\cdots+z_nd\bar{z}_n\Big)$$

$$=\frac{1}{2}\Big(dz_1\wedge d\bar{z}_1+\cdots+dz_n\wedge\bar{z}_n\Big)=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}dz_\alpha\wedge d\bar{z}_\alpha.$$

E dunque otteniamo che $\Omega=i\partial\bar{\partial}\frac{|z|}{2}^2$: cioé Ω é chiusa (grazie al $\partial\bar{\partial}$-Lemma) e ammette come potenziale di Kähler la funzione $\frac{|z|}{2}^2$. E quindi h é una metrica Kähleriana.

1.3 La metrica di Fubini-Study

La metrica di Fubini Study, rappresenta una metrica Kähleriana sullo spazio proiettivo complesso $\mathbb{CP}^m$. Consideriamo su questo spazio l'Atlante formato dalle carte $\mathfrak{A}=\{(U_j,\phi_j)_j\}$, dove:

$$U_j=\{[z_0,\cdots,z_n]:z_j\neq 0\}$$
$$\phi_j:U_j\longrightarrow\mathbb{C}^m$$

naturalmente $\phi_j([z_0, \cdots, z_n]) = (\frac{z_0}{z_j}, \cdots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \cdots, \frac{z_n}{z_j})$. In veritá quest'Atlante definisce sullo spazio proiettivo complesso, una struttura di varietá olomorfa.
Il nostro obbiettivo é costruire una forma Ω definita su $\mathbb{CP}^m$, dalla quale, tramite (1.1), ottenere un tensore h che dimostreremo essere una metrica hermitiana con forma fondamentale proprio Ω. Quest'ultima la costruiremo attraverso un potenziale, cioé trovando una funzione v per cui $\Omega = i\partial\bar{\partial}v$. Se riusciamo a fare questa costruzione, trovando la giusta funzione v, allora la forma Ω sará ovviamente chiusa (sempre dal $\partial\bar{\partial}$-Lemma) e quindi h sará una metrica Kähleriana su $\mathbb{CP}^m$. Consideriamo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^m \setminus \{0\} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f_j"'] & U_j \subset \mathbb{CP}^m \arrow[dl, "\phi_j"] \\ \mathbb{C}^m & \end{tikzcd}$$

dove f_j é esattamente la composizione della proiezione su $\mathbb{CP}^m$ e l'applicazione ϕ_j, cioé $f_j = \phi_j \circ \pi$. Chiediamoci subito come agisce la funzione f_j: si ottiene facilmente che

$$\begin{aligned} f_j(z) &= f_j(z_1, \cdots, z_n) = \phi_j(\pi(z_1, \cdots, z_n)) = \\ &= \phi_j([z_1 : \cdots : z_n]) = (\frac{z_1}{z_j}, \cdots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \cdots, \frac{z_n}{z_j}), \end{aligned}$$

dunque $f_j(z) = (\frac{z_1}{z_j}, \cdots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \cdots, \frac{z_n}{z_j})$. Naturalmente questo ragionamento puó essere fatto per ogni $j = 1, \cdots, n$ a patto che la j-esima componente di z sia diversa da zero: ma dato che $z \in \mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$, allora z ha sempre almeno una componente diversa da zero.
Consideriamo adesso due applicazioni:

$$u : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$v : \mathbb{C}^{m+1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

con $u(w) = log(1+|w|^2)$ e $v(z) = log|z|^2$. Cerchiamo di trovare un legame tra queste due applicazioni: in effetti proprio in questo passaggio avrá estrema importanza l'applicazione f_j. Infatti, andiamo a calcolare $u \circ f_j(z)$:

$$\begin{aligned}
u(f_j(z)) &= u(\frac{z_0}{z_j}, \cdots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \cdots, \frac{z_n}{z_j}) = \\
&= log(1 + \frac{z_0\bar{z}_0 + \cdots + z_{j-1}\bar{z}_{j-1} + z_{j+1}\bar{z}_{j+1} + \cdots + z_n\bar{z}_n}{z_j\bar{z}_j}) = \\
&= log(\frac{z_j\bar{z}_j + z_0\bar{z}_0 + \cdots + z_{j-1}\bar{z}_{j-1} + z_{j+1}\bar{z}_{j+1} + \cdots + z_n\bar{z}_n}{z_j\bar{z}_j}) = \\
&= log\Big(\frac{|z|^2}{z_j\bar{z}_j}\Big) = log(|z|^2) - log(z_j\bar{z}j) = v(z) - log(z_j\bar{z}j).
\end{aligned}$$

Adesso calcoliamone la derivata $\partial\bar{\partial}$: da cui si ottiene

$$\partial\bar{\partial}u(f_j(z)) = \partial\bar{\partial}v(z) - \partial\bar{\partial}log(z_j\bar{z}j) = \partial\bar{\partial}v(z)$$

infatti

$$\partial\bar{\partial}log(z_j\bar{z}j) = \partial\Big(\frac{z_j\bar{z}_j}{z_jd\bar{z}_j}\Big) = \partial\Big(\frac{\bar{z}_j}{d\bar{z}_j}\Big) = 0$$

Adesso, dando per scontato il concetto di pull-back di forme differenziali e il fatto che questo commuta con le derivazioni, si ottiene

$$f_j^*\partial\bar{\partial}u = \partial\bar{\partial}v,$$

che é il legame tanto voluto tra le applicazioni u e v. Quindi tramite f_j, siamo in grado di prendere la forma differenziale $\partial\bar{\partial}u$ e mandarla direttamente in $\partial\bar{\partial}v$: sebbene, data la definizione di f_j, avessimo un altro modo di associare queste due forme differenziali in modo equivalente. Passando cioé per il pull-back di ϕ_j e per quello di π, infatti vale che:

$$f_j^* = \pi^* \circ (\phi_j)^*.$$

Ma considerando questo modo di procedere, trasportando tramite $(\phi_j)^*$ la forma $\partial\bar{\partial}u$ su $\mathbb{CP}^m$, possiamo definire una forma globale su tutto $\mathbb{CP}^m$. Tale forma, che chiameremo Ω, é dunque definita cosí:

$$\Omega\mid_{U_j} = i(\phi_j)^*\partial\bar{\partial}u. \tag{1.2}$$

Adesso, presa Ω, se ne facciamo il pull-back tramite l'applicazione π otteniamo:

$$\pi^*(\Omega) = i\partial\bar{\partial}v = f_j^*\partial\bar{\partial}u,$$

e questo ci dice, formalmente, che $\Omega = \partial\bar{\partial}v$, dove sta volta la funzione v é calcolata sugli elementi di $\mathbb{CP}^m$: da tale scrittura si evince (dal $\partial\bar{\partial}-$Lemma) che Ω é chiusa. Adesso dobbiamo solo costruire una metrica hermitiana che abbia proprio Ω come $2-$forma fondamentale. Definiamo il seguente tensore

$$h(X,Y) = \Omega(X, JY) \qquad \forall \quad X, Y \in T\mathbb{CP}^m. \tag{1.3}$$

Si nota facilmente che si tratta di un tensore hermitiano e simmetrico: queste due proprietá si evincono da quelle di Ω, che é ovviamente antisimmetrica, e dal fatto che $J^2 = -Id$. Quindi l'unica cosa che manca a h per essere una metrica hermitiana é l'essere definito positivo. Facciamo dunque vedere che h é definito positivo.
Per prima cosa notiamo che, data l'applicazione $(\phi_j)^*$: esiste un $\hat{h}$, tensore su $\mathbb{C}^m$ tale che

$$h = (\phi_j)^*\hat{h}.$$

Provare che h é definito positivo é come provare che lo é $\hat{h}$. Inoltre data la definizione di Ω in (1.2) é quella di h in (1.3), il tensore $\hat{h}$ ha la seguente forma

$$\hat{h}(X,Y) = i\partial\bar{\partial}u(X, JY) \qquad \forall \quad X, Y \in T\mathbb{C}^m.$$

Adesso, dato che il gruppo unitario U_m consiste di trasformazioni olomorfe di $\mathbb{C}^m$ che preservano la funzione u, questi preservano anche il tensore $\hat{h}$. Inoltre, U_m agisce trasitivamente sulla sfera di $\mathbb{C}^m$: quindi é sufficiente provare che $\hat{h}$ é definito positivo in un punto $p = (r, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{C}^m$, per qualche numero reale positivo r, di modo che p appartenga alla sfera di raggio r di $\mathbb{C}^m$. Si ha

$$\begin{aligned}
\partial\bar{\partial}u &= \partial\bar{\partial}log(1+|z|^2) = \partial\Big(\frac{1}{1+|z|^2}\Big(\sum_{i=1}^m z_i d\bar{z}_i\Big)\Big) = \\
&= -\frac{1}{(1+|z|^2)^2}\Big(\sum_{i=1}^m \bar{z}_i dz_i\Big) \wedge \Big(\sum_{i=1}^m z_i d\bar{z}_i\Big) + \frac{1}{1+|z|^2}\Big(\sum_{i=1}^m dz_i \wedge d\bar{z}_i\Big).
\end{aligned}$$

Questa 2-forma, ristretta al punto p diventa (dato che le $z_i = 0$ se $i \neq 1$):

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{(1+r^2)^2}\Big(\bar{z}_1 dz_1\Big) \wedge \Big(z_1 d\bar{z}_1\Big) + \frac{1}{1+r^2}\Big(\sum_{i=1}^{m} dz_i \wedge d\bar{z}_i\Big) = \\
= \;& -\frac{1}{(1+r^2)^2}\Big(r dz_1\Big) \wedge \Big(r d\bar{z}_1\Big) + \frac{1}{1+r^2}\Big(\sum_{i=1}^{m} dz_i \wedge d\bar{z}_i\Big) = \\
= \;& -\frac{r^2}{(1+r^2)^2} dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + \frac{1}{1+r^2}\Big(\sum_{i=1}^{m} dz_i \wedge d\bar{z}_i\Big) = \\
= \;& \frac{1}{(1+r^2)^2}\Big(-r^2 dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + (1+r^2)\sum_{i=1}^{m} dz_i \wedge d\bar{z}_i\Big) = \\
= \;& \frac{1}{(1+r^2)^2}\Big(dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + (1+r^2)\sum_{i=2}^{m} dz_i \wedge d\bar{z}_i\Big).
\end{aligned}$$

Dunque otteniamo che

$$\hat{h}_p(X,Y) = \frac{2}{(1+r^2)^2}\mathfrak{Re}\Big(X_1\bar{Y}_1 + (1+r^2)\sum_{i=2}^{m} X_1\bar{Y}_i\Big)$$

che é ovviamente definito positivo. Questo prova che anche h é definito positivo, e quindi definisce una metrica hermitiana su $\mathbb{CP}^m$ la cui forma fondamentale é proprio Ω: la quale peró é chiusa, e dunque h é una metrica Kähleriana. A questa metrica diamo il nome di *metrica di Fubini- Study* su $\mathbb{CP}^m$.

Capitolo 2

Proprietà geometriche della metrica di Fubini-Study

di Gloria Nicole Marchetti

In questo seminario mostreremo tre proprietà geometriche relative alla metrica su $\mathbb{CP}^m$ detta di Fubini-Study definita nel seminario precedente.
Nel primo paragrafo daremo una descrizione alternativa rispetto a quanto visto in precedenza, più geometrica, alla costruzione di h_{FS} vista come la proiezione sullo spazio proiettivo complesso $\mathbb{CP}^m$ di un qualche tensore simmetrico di $\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$ diverso dalla metrica hermitiana standard.
Nel secondo paragrafo dimostreremo che il gruppo unitario U_{m+1} preserva la metrica di Fubini-Study, cioè data una matrice $U \in U_{m+1}$ tale che agisce transitivamente sugli elementi di $\mathbb{CP}^m$ abbiamo che $U^* h_{FS} = h_{FS}$ (dove U^* è il pull-back dell'operatore U). Infine, nell'ultima parte di questo seminatio, vedremo che la metrica di Fubini-Study è una metrica di Einstein (con constante di Einstein uguale a $m + 1$ dove m è la dimensione dello spazio proiettivo complesso considerato) e daremo una descrizione, senza entrare nel dettaglio (in quanto una trattazione piú specifica esula dagli scopi di questo seminaio), delle proprietà e dei risultati relativi alla metrica di Kähler-Einstein in particolare per quanto riguarda le varietà di Kähler compatte.

2.1 Costruzione alternativa della metrica di Fubini-Study

Consideriamo φ una 2-forma su $\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$ espressa tramite il potenziale locale di Kähler, cioè del tipo $\varphi = \partial\bar{\partial}\log(|z|^2)$, che si proietta alla 2-forma Ω_{FS} (forma di Fubini-Study che nel seguito indichiamo semplicemente con Ω) e che non è associata alla metrica hermitiana standard ma ad un tensore simmetrico definito positivo $\tilde{h}$ di $\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$, allora h_{FS} su $\mathbb{CP}^m$ è data dalla proiezione appunto di questa $\tilde{h}$ che andremo a definire. Prima di tutto diamo il seguente risultato (che fornisce una caratterizzazione della proiezione canonica e del suo differenziale utile per gli scopi sucessivi).

Lemma 2.1.1. Sia $\pi : \mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{CP}^m$ la proiezione canonica. $\forall z \in \mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$ il differenziale di π rispetto a z è suriettivo (si dice in questo caso che π è una **submersione**) e il suo nucleo è costituito dalla retta complessa generata da z, cioè se il differenziale di π rispetto a z è $d\pi_z : T_z(\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}) \longrightarrow T_{\pi(z)}(\mathbb{CP}^m)$ allora $Ker\ d\pi_z = \ Spann\{z\}$.

Dimostrazione. Sia $z \in \mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$ con $z_j \neq 0$. Consideriamo la funzione composta $f_j := \phi_j \circ \pi$ data da

$$f_j(z_0, \ldots, z_m) = \frac{1}{z_j}(z_0, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_m),$$

dove $\pi \ : \ \mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{CP}^m$ è la proiezione canonica tale che

$$(z_0, \ldots, z_m) \stackrel{\pi}{\longmapsto} [z_0 : \ldots : z_m]$$

e $\phi_j \ : \ U_j \longrightarrow \mathbb{C}^m$ è la carta definita sugli aperti $U_j = \{[z_0, \ldots, z_m] \mid z_j \neq 0,\ j = 1, \ldots, m\} \subset \mathbb{CP}^m$, tale che

$$[z_0 : \ldots : z_m] \longmapsto (\frac{z_0}{z_j}, \ldots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \ldots, \frac{z_m}{z_j}).$$

Per semplicità prendiamo come coordinata non nulla la prima cioè z_0 $(j = 0)$ e indichiamo la corrispondente funzione f_0 con f:

$$f_0(z_0, \ldots, z_m) = f(z_0, \ldots, z_m) = \frac{1}{z_0}(z_1, \ldots, z_m).$$

Sia $v \in T_z(\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\})$ un qualche vettore tangente a z, calcoliamo rispetto a z il differenziale della funzione f applicandolo a v

$$df_z = d(\phi_j \circ \pi)_z = d\phi_{j_{\pi(z)}} \circ d\pi_z$$

$$df_z(v) = \frac{1}{z_0}(dz_1, \dots, dz_m) - \frac{dz_0}{z_0^2}(z_1, \dots, z_m) =$$

$$= df_z(v) = \frac{1}{z_0}(dz_1, \dots, dz_m) - \frac{v_0}{z_0^2}(z_1, \dots, z_m).$$

Dobbiamo dimostare che ogni vettore nel nucleo di $d\pi_z$ sta sulla retta complessa passante per z cioè un multiplo di z. Dobbiamo mostrare che $v \in Ker(d\pi_z)$ se e solo se $v = \lambda z$ per qualche scalare $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dimostriamo le seguenti implicazioni:

- $v \in Ker(df_z) \Leftrightarrow v \in Ker(d\pi_z)$

$v \in Ker(d\pi_z) \Rightarrow v$ è tale che $d\pi_z(v) = 0 \Rightarrow$ anche $df_z = d\phi_{j_{\pi(z)}} \circ d\pi_z = 0$ calcolato in v (ϕ_j è iniettiva si annulla solo per $v = 0$, $d\phi_j$ anche è iniettivo). $v \in Ker(df_z) \Rightarrow v$ è tale che $df_z(v) = 0$ ma $d\phi_j$ è iniettivo quindi $d\pi_z(v)$ deve essere $0 \Rightarrow v \in Ker(d\pi_z)$.

- $v = \lambda z \Leftrightarrow v \in Ker(df_z)$ con $\lambda = \frac{v_0}{z_0}$

$v \in Ker(df_z) \Rightarrow \frac{1}{z_0}(v_1, \dots, v_m) - \frac{v_0}{z_0^2}(z_1, \dots, z_m) = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{z_0}(v_1, \dots, v_m) = \frac{v_0}{z_0^2}(z_1, \dots, z_m)$$

$$\Rightarrow v = \frac{v_0}{z_0}$$

e quindi $v \in Spann\{z\}$. Per ragioni dimensionali $d\pi_z$ deve essere suriettiva.

$\square$

Costrutiamo ora il tensore metrico $\tilde{h}$. Innanzitutto diamo una definizione di *distribuzione* su una varietà differenziabile.

Definizione 2.1.2. Una *distribuzione* D su una varietà differenziabile M è un sottofibrato del fibrato tangente TM, cioè è un fibrato vettoriale su M tale che la fibra D_x è un sottospazio vettoriale di T_xM per ogni $x \in M$.

Sia $z \in \mathbb{C}^{m+1}$ e sia $z^\perp$ il complesso ortogonale di z in $\mathbb{C}^{m+1}$. La metrica hermitiana standard rispetto a $z^\perp$ è l'insieme

$$z^\perp := \{y \in \mathbb{C}^{m+1} | \sum_{j=0}^{m} z_j \bar{y}_j = 0\}.$$

Definiamo $D_z := z^\perp$, $\forall z \in \mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$ e quindi consideriamo la distribuzione complessa D di codimensione 1, per la definizione precedente ogni fibra D_z è sottospazio vettoriale di $T_z(\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\})$.
Sia $X \longmapsto X^\perp$ la proiezione ortogonale su $z^\perp$ in $T_z(\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\})$, definiamo il tensore $\tilde{h}$ su $\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$ come

$$\tilde{h}_z(X,Y) := \frac{2}{|z|^2} < X^\perp, Y^\perp >, \qquad \forall X, Y \in T_z(\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}),$$

dove $< \cdot\, , \, \cdot >$ è il prodotto hermitiano standard. Si Puó facilmente verificare, per come è stato costruito quindi per le proprietà del prodotto hermitiano, che questo tensore è simmetrico. Inoltre siccome la proiezione $X \longmapsto X^\perp$ è lineare allora $\tilde{h}$ è lineare in $X^\perp$ e in $Y^\perp$ e quindi è bilineare.

Proposizione 2.1.1. *La $(1,1)$-forma $\varphi(X,Y) := \tilde{h}(JX,Y)$ associata al tensore $\tilde{h}$ soddisfa la relazione $\varphi = i\partial\bar{\partial}\log(|z|^2)$ su $\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$.*

Dimostrazione. Ricordiamo che in coordinate φ si esprime come

$$\varphi = i\partial\bar{\partial}\log([z_0\bar{z}_0 + \ldots + z_m\bar{z}_m]),$$

e $\tilde{h}$ come

$$\tilde{h}(JX,Y) = \frac{2}{[z_0\bar{z}_0 + \ldots + z_m\bar{z}_m]} < X^\perp, Y^\perp > .$$

Per verificare l'ugualinza iniziamo a ragionare sulla sfera di raggio r fissato. Osserviamo innanzitutto che il gruppo unitario $U_{m+1} = \{A \in GL_{m+1}(\mathbb{C}) | A\bar{A}^t = I_{m+1}\}$ lascia invariata la forma quadratica $[z_0\bar{z}_0 + \ldots + z_m\bar{z}_m]$ di $\mathbb{C}^{m+1}$, quindi entrambi i membri della relazione sono invarianti sotto l'azione del gruppo unitario. Dal momento che quindi l'azione di U_{m+1} è transitiva sulle sfere possiamo limitarci a dimostrare la relazione rispetto al punto $p = (r, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$ con r un qualche numero reale positivo. Siamo sulle sfera S^{2m+1} di raggio r, quindi abbiamo

$$\partial\bar{\partial}\log([z_0\bar{z}_0 + \ldots + z_m\bar{z}_m]) = \partial\left[\frac{z_0 d\bar{z}_0 + \ldots + z_m d\bar{z}_m}{z_0\bar{z}_0 + \ldots + z_m\bar{z}_m}\right] =$$

$$= \partial\left(\frac{1}{|z|^2}\sum_{i=0}^m z_i d\bar{z}_i\right) = \frac{1}{|z|^2}\sum_{i=0}^m dz_i \wedge d\bar{z}_i - \frac{1}{|z|^4}\left(\sum_{i=0}^m \bar{z}_i dz_i\right) \wedge \left(\sum_{i=0}^m z_i d\bar{z}_i\right).$$

che rispetto al punto p si semplifica in

$$\partial\bar{\partial}\log(|z|^2) = \frac{1}{r^2}\sum_{i=1}^m dz_i \wedge d\bar{z}_i.$$

Ora vediamo come si comporta rispetto al punto p la $(1,1)$-forma $\varphi(X,Y) := \tilde{h}(JX,Y)$. In questo caso (cioè rispetto a p) $J = i$ e quindi moltiplichiamo per $-i$, abbiamo così

$$-i\varphi(X,Y) = -i\tilde{h}(iX,Y) = \tilde{h}(X,Y)$$

che in coordinate locali è

$$-i\varphi\left(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta}\right) = \tilde{h}\left(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta}\right) = \frac{2}{|z|^2} < \frac{\partial}{\partial z_\alpha}^{\perp}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta}^{\perp} >$$

dove

$$< \frac{\partial}{\partial z_\alpha}^{\perp}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta}^{\perp} >= h\left(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta}\right) = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}$$

quindi

$$\tilde{h}\left(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{r^2}\delta_{\alpha\beta} = \frac{1}{r^2}\delta_{\alpha\beta},$$

mentre si annulla per $\alpha = 0$ o $\beta = 0$ (poiché sul punto cioè per $z_0 = r$ e tutte le altre coordinate nulle le derivate parziali si annullano). Quindi (sempre rispetto al punto scelto p)

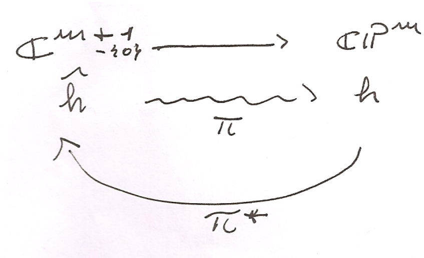
$$-i\varphi = \frac{1}{r^2}\sum_{i=1}^m (dz_i \wedge d\bar{z}_i) = (\partial\bar{\partial}\log(|z|^2)).$$

□

In conclusione il fatto che, per la proposizione appena dimostrata, $\varphi = i\partial\bar{\partial}\log(|z|^2)$ soddisfi la relazione $\varphi(X,Y) = \tilde{h}(JX,Y)$ dove $X, Y \in T_z(\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\})$ piú il fatto, come visto nel seminario precedente, che $\pi^*(\Omega) = i\partial\bar{\partial}\log(|z|^2)$ ci mostra che $\pi^*h = \tilde{h}$ cioè la metrica di Fubini-Study h_{FS} su $\mathbb{CP}^m$ è data dalla proiezione del tensore $\tilde{h}$ simmetrico semidefinito positivo:

$$\pi^*(\Omega) = i\partial\bar{\partial}\log(|z|^2), \quad \Omega(X, JY) = h(X,Y)$$

$$\pi^*(\Omega(X, JY)) = i\partial\bar{\partial}\log(|z|^2) = \tilde{h}(JX,Y)$$



(2).png

$$\varphi = \Omega_{FS}.$$

Osservazione 1. $\Omega_{FS} = \varphi \in \Omega^2(\mathbb{CP}^m)$ è chiusa.
Segue dalla struttura di φ da come è stata definita $\varphi = i\partial\bar{\partial}\log(|z|^2)$. Infatti $d = \partial + \bar{\partial}$ su $\mathbb{C}^{m+1}$ e $\partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0$, $\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0$.
È questa rappresentazione della forma φ a garantire la sua chiusura (φ è già ottenuta con una differenziazione seconda del potenziale plurisubarmonico di Kähler).

2.2 Azione del gruppo unitario su $(\mathbb{CP}^m, h_{FS})$

Teorema 2.2.1. *Il gruppo unitario U_{m+1} agisce transitivamente su $(\mathbb{CP}^m, h_{FS})$ attraverso isometrie olomorfe. Cioè data $U \in U_{m+1}$ tale che agisce transitivamente sugli elementi di $\mathbb{CP}^m$ $(z_2 = Uz_1, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{CP}^m)$ allora $U^* h_{FS} = h_{FS}$, cioè U è una isometria.*

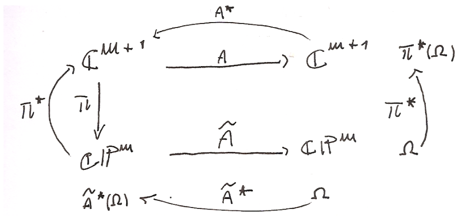
Dimostrazione. Per ogni $A \in U_{m+1}$, $z \in \mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$ e $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, vale, per la linearità di A, che $A(\alpha z) = \alpha A(z)$. Questo mostra, poiché in $\mathbb{CP}^m$ $[\alpha z] = [z]$, che U_{m+1} agisce nello stesso modo su $\mathbb{CP}^m$.
Quindi $\forall A \in U_{m+1}$ sia $\tilde{A}$ la trasformazione corrispondente in $\mathbb{CP}^m$. (L'espressione di $\tilde{A}$ in carte olomorfe canoniche mostra che ogni $\tilde{A}$ agisce olomorficamente su $\mathbb{CP}^m$).
Dobbiamo dimostrare che $\tilde{A}$ è una isometria e preserva quindi la metrica di Fubini-Study: usiamo quanto visto nel seminario precedente cioè che

$$\pi^*(\Omega) = i\partial\bar{\partial}v, \quad v = \log(|z|^2)$$

più la relazione

$$v \circ A(z) = \log|Az|^2 = \log(|A|^2|z|^2) = \log|z|^2 = v(z)$$

(dove la penultima ugualinza vale dal momento che A è unitaria). Si deduce dal seguente diagramma



che $\pi^*(\tilde{A}^*(\Omega))$ e $A^*(\pi^*(\Omega))$ sono uguali. Esplicitando, utilizzando le proprietà di A^*, abbiamo

$$\pi^*(\tilde{A}^*(\Omega)) = A^*(\pi^*(\Omega)) = A^*(i\partial\bar{\partial}v) = i\partial\bar{\partial}A^*v = i\partial\bar{\partial}v = \pi^*(\Omega).$$

Il lemma ci dice che $d\pi_z$ è suriettivo per cui π^* è iniettivo quindi $\tilde{A}^*(\Omega) = \Omega$. Abbiamo dimostrato che $\tilde{A}$ preserva la struttura complessa ed è inoltre anche una isometria. □

2.3 Metriche di Einstein

La metrica di Fubini-Study è una metrica di Einstein.
Dal momento che esiste un'azione isometrica transitiva su $\mathbb{CP}^m$ è sufficiente dimostrarlo per un punto di $\mathbb{CP}^m$. Sia $p := [1 : 0 : \ldots : 0] \in \mathbb{CP}^m$, come visto nel seminario precedente h è definita nel seguente modo

$$h = (\phi_0)^*(\widehat{h}),$$

abbiamo poi $\widehat{h}(X,Y) = i\partial\bar{\partial}u(X, JY), \forall X, Y \in T\mathbb{C}^m$, con $u(z) = \log(1+|z|^2)$ e ricordando che $h(X,Y) := \Omega(X, JY)$ e $\Omega = (\phi_0)^*(i\partial\bar{\partial}(1+|z|^2))$ quindi, come visto sempre in precedenza, la forma di Kähler nella carta locale ϕ_0 è definita da

$$(\phi_0^*)^{-1}\Omega = (\phi_0^{-1})^*\Omega = \frac{i}{1+|z|^2}\sum_{i=1}^m dz_i \wedge d\bar{z}_i - \frac{i}{(1+|z|^2)^2}\left(\sum_{i=1}^m \bar{z}_i dz_i\right)\wedge\left(\sum_{i=1}^m z_i d\bar{z}_i\right).$$

Facciamo il prodotto wedge di $(\phi_0^*)^{-1}\Omega$ con se stesso m volte:

$$((\phi_0^*)^{-1}\Omega)^m = \frac{2^m m!}{(1+|z|^2)^{m+1}}dx$$

dove $dx := dx_1 \wedge dy_1 \wedge \ldots \wedge dx_m \wedge dy_m = \frac{i}{2} dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \ldots \wedge \frac{i}{2} dz_m \wedge d\bar{z}_m$ è la forma di volume in $\mathbb{C}^m$.
Verifichiamo che l'espressione locale della 2-forma di Kähler Ω nella carta ϕ_0 soddisfa questa relazione.
Infatti entrambi i menbri sono invarianti sotto l'azione di U_m su $\mathbb{C}^m$ ed è quindi sufficiente provare l'ugualianza rispetto a un punto $z = (r, 0, \ldots, 0)$:

$$\left(\frac{i}{1+|r|^2} \sum_{i=1}^{m} dz_i \wedge d\bar{z}_i \right)^m = \frac{2^m m!}{(1+|z|^2)^{m+1}} dx$$

$$\frac{2^m m!}{(1+|z|^2)^{m+1}} \frac{i}{2} dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \ldots \wedge \frac{i}{2} dz_m \wedge d\bar{z}_m = \frac{2^m m!}{(1+|z|^2)^{m+1}} \cdot \frac{(i)^m}{2^m} dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \ldots \wedge dz_m \wedge d\bar{z}_m.$$

Inoltre per ogni metrica hermitiana su $\mathbb{C}^m$ con forma fondamentale Ω il determinate d della matrice $(h_{\alpha\bar{\beta}})$ soddisfa

$$\frac{\Omega^m}{m!} = d 2^m dx.$$

In questo caso abbiamo

$$d = det(h_{\alpha\bar{\beta}}) = \frac{1}{(1+|z|^2)^{m+1}}$$

Quindi $\log d = -(m+1)\log(1+|z|^2)$ così dalla formula locale della forma di Ricci cioè $\rho = -i\partial\bar{\partial}\log d$ abbiamo

$$\rho = -i\partial\bar{\partial}\log d = (m+1) i\partial\bar{\partial}\log(1+|z|^2) = (m+1)\Omega.$$

La metrica di Fubini-Study su $\mathbb{CP}^m$ è una metrica di Einstein con costante di Einstein positiva $m+1$

2.3.1 Metriche di Kähler-Einstein

Definizione 2.3.1. Una metrica su una varietà complessa compatta è detta di Kähler-Einstein (KE) se la forma di Ricci è proporzionale alla forma di Kähler

$$\rho = \lambda\Omega$$

O in termini di metriche: una metrica g di Kähler è detta di Einstein se

$$Ric = \lambda g$$

Il nome, metrica di Einstein, deriva dal fatto che la condizione $Ric = \lambda g$ è equivalente a dire che la metrica g è soluzione dell'equazione di Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R \cdot g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2}T_{\mu\nu},$$

dove $R_{\mu\nu} = Ric$ è il tenosre di curvatura di Ricci, $g_{\mu\nu}$ è il tensore metrico, R la curvatura scalare, G la costante di gravitazione universale, c la velocità della luce e $T_{\mu\nu}$ il tensore energia-impulso.
L'equazione di Einstein descrive la curvatura dello spaziotempo in funzione delle proprietà fisiche quali energia, pressione, densità della materia, mette quindi in relazione la struttura metrica della varietà con il campo gravitazionale.
Le varietà di Einstein per cui $Ric \equiv 0$ sono dette varietà di Calabi-Yau, nel caso siano anche di Kähler vengono chiamate *varietà Ricci-piatte.* In questo caso si ha l'equazione di Einstein in assenza di materia. Infatti lo spaziotempo Ricci-piatto descrive soluzioni per il vuoto dell'equazione di Einstein. In generale lo spazio-tempo vuoto è descritto da geometrie che soddisfano $Ric = \lambda g$ per qualche λ.
Condizione necessaria affinchè una varietà complessa compatta ammetta una metrica di Kähler-Einstein è che la prima classe di Chern sia definita negativa, positiva o nulla. In generale una varietà complessa compatta non amette metrica KE (ci interessa inoltre l'unicità).
Quanto appena detto è oggetto della congettura di Calabi formulata nel 1954 dal matematico italiano Eugenio Calabi. A metà degli anni '70, S.T. Yau fornisce la soluzione per il caso nullo.
Più tardi abbiamo il $Teorema\ di\ Aubin - Yau$, che non vale nel caso positivo, e che ci dice che una varietà complessa compatta con prima classe di Chern negativa amette una unica metrica KE con costante di Einstein -1; dimostrando così la congettura anche nel caso negativo, mentre il problema è rimasto aperto nel caso positivo.
Richiamiamo la definizione di prima classe di Chern. A ogni fibrato vettoriale complesso E sulla varietà differenziabile M si associa una classe

di coomologia $c_1(E) \in H^2(M, \mathbb{Z})$ che soddisfa $\forall f : M \to N$, $\forall E$ su M $f^*(c_1(E)) = c_1(f^*E), \forall x \in M$.
Un rappresentate della prima classe di Chern di una varietà Kähleriana è $\frac{1}{2\pi}\rho$, dove ρ è la forma di Ricci $\rho(X, Y) = Ric(JX, Y) = -i\partial\bar{\partial} \log d$.
Abbiamo quindi che le varietà differenziabili M di Kähler compatte con $c_1 = 0$ sono le varietà compatte che amettono metrica di Kähler con forma di Ricci zero, le M compatte di Kähler con $c_1 > 0 (< 0)$ sono quelle con forma di Ricci positiva (negativa). Nel caso $c_1 = 0$ la metrica viene detta metrica di Calabi-Yau e abbiamo, come detto sopra, per $Ric \equiv 0$, le varietà di Calabi-Yau. La soluzione della congettura di Calabi dovuta a Yau mostra che ogni varietá CY ammette metrica di Kähler Ricci-piatta. Nel caso $c_1 < 0$ abbiamo la metrica di Aubin-Calabi-Yau con costante di Einstein $= -1$ e su una varietà differenziabile complessa compatta esiste una unica metrica di Aubin-Calabi-Yau.

Bibliografia

[1] A. Moroianu *Lectures on Kähler Geometry*, London Math. Soc. (2007).

[2] D. Joyce *Complex Manifolds and Kähler Geometry*, Oxford Autumn term (2012).

[3] A. Besse *Einstein Manifolds*, Spinger (1987).