Seminari di Geometria Superiore

a.a. 2012/2013 - Prof. P. Piccinni

Laura Fedele, Giuseppe Martone, Paolo Tripoli

3 maggio 2013

1 Introduzione alle forme differenziali complesse - Laura Fedele

Iniziamo introducendo le forme differenziali complesse su varietà complesse e quasi complesse e descrivendone alcune proprietà.
Mettiamoci nel caso più generale in cui (M, J) è una varietà quasi complessa, ovvero M è una varietà differenziabile di $\dim_{\mathbb{R}} M = 2m$ e J una struttura quasi complessa su di essa. Nel precedente seminario abbiamo già visto che se M è dotata di una struttura quasi complessa allora necessariamente deve avere dimensione pari. Costruiremo le forme differenziali complesse a partire dalle forme differenziali reali, complessificando quest'ultime.
Consideriamo l'algebra esterna del fibrato cotangente di M

$$\Lambda^*_{\mathbb{C}} M := \Lambda^*(T^*M) = \bigoplus_{k=0}^{2m} \Lambda^k M$$

dove per ogni k si ha che $\Lambda^k M = \Lambda^k(T^*M) = \bigsqcup_{x \in M} \Lambda^k(T^*_x M)$ è il fibrato k-esima potenza esterna di T^*M, il quale avrà rango $\binom{2m}{k}$ e dimensione reale come varietà differenziabile $\binom{4m}{k}$. Ricordiamo, per quanto riguarda T^*M, che si tratta di un fibrato vettoriale di rango $2m$ e dimensione reale $4m$. Complessificandolo otteniamo

$$\Lambda^*_{\mathbb{C}} M = \Lambda^* M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

e definiamo forme differenziali complesse le sezioni di tale fibrato; denotiamo questo spazio con $C^\infty(\Lambda^*_{\mathbb{C}} M)$. Osserviamo inoltre che i fibrati vettoriali complessificati avranno dimensione complessa pari alla dimensione reale degli stessi non complessificati, questa proprietà viene estesa ai fibrati vettoriali fibra per fibra dall'analoga proprietà per spazi vettoriali (reali): $dim_{\mathbb{C}}(V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = dim_{\mathbb{R}} V$.
Come conseguenza di questa costruzione, se $\omega \in \mathbb{C}^\infty(\Lambda^*_{\mathbb{C}} M)$ possiamo scrivere $\omega = \sigma + i\tau$, dove σ e τ sono due forme reali su M. Estendendo per linearità possiamo costruire il prodotto wedge $\wedge$ di forme differenziali complesse.

Una k-forma ω sarà quindi un elemento di $C^\infty(\Lambda^k_{\mathbb{C}}M)$, ovvero un'applicazione $\omega : M \longrightarrow \Lambda^k M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \Lambda^k_{\mathbb{C}}M$ che associa ad $x \in M$ un $\omega_x \in \Lambda^k(T^*_x M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Di conseguenza nella decomposizione $\omega = \sigma + i\tau$ entrambe σ e γ sono k-forme (reali). Per costruzione, il complesso coniugato di ω è la k-forma complessa $\overline{\omega} = \sigma - i\tau$.

Osservazione 1.1. Esiste un isomorfismo naturale

$$\Lambda^k(T^*M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \Lambda^k_{\mathbb{C}}(T^*M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \tag{1}$$

che deriva dall'analogo isomorfismo naturale per spazi vettoriali esteso a fibrati vettoriali fibra per fibra. In seguito potremo usare indipendentemente le due scritture, ed in particolare tale uguaglianza ci servirà poco più avanti per la decomposizione delle forme complesse.

Possiamo agire sulle k-forme tramite la *derivata esterna* o *differenziale*

$$\mathrm{d} : \mathbb{C}^\infty(\Lambda^k_{\mathbb{C}}M) \longrightarrow \mathbb{C}^\infty(\Lambda^{k+1}_{\mathbb{C}}M)$$

estendendo linearmente l'azione di d da quella che già conosciamo sulle k-forme reali:

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(\sigma + i\tau) = \mathrm{d}\sigma + i\mathrm{d}\tau.$$

Estendendo per linearità valgono ovviamente la regola di Leibniz per la derivazione del prodotto wedge di più forme

$$\mathrm{d}(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{(\deg \omega_1 + \ldots + \deg \omega_{j-1})} \omega_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\omega_j \wedge \ldots \wedge \omega_k \tag{2}$$

che nel caso del prodotto wedge di due sole forme si riduce alla nota $d(\omega\wedge\rho) = d\omega\wedge\rho + (-1)^{deg\rho}\omega\wedge d\rho$. Naturalmente valgono $d^2 = 0$ e le vecchie definizioni di forme chiuse ed esatte.

Sfruttando la struttura quasi complessa dell'$(1,1)$-tensore $J \in C^\infty(T^*M_{\mathbb{C}} \otimes TM_{\mathbb{C}})$ possiamo decomporre le k- forme nelle loro componenti. Il lavoro che si fa è analogo a quello già esposto per quanto riguarda l'azione di J sul fibrato tangente; quello che otterremo adesso sarà però una decomposizione del complessificato del fibrato cotangente $T^*M_{\mathbb{C}} = T^*M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ il quale, lo ricordiamo, è canonicamente isomorfo a $(TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})^*$. Richiamiamo la decomposizione di $TM_{\mathbb{C}}$ ottenuta dalla diagonalizzazione di J su tale fibrato:

$$\begin{aligned} T^{1,0}M &= \{X - iJX \mid X \in TM\} \\ T^{0,1}M &= \{X + iJX \mid X \in TM\} \end{aligned} \tag{3}$$

Vale infatti per ogni spazio vettoriale reale V, (e noi lo estenderemo ad ogni fibra T_xM e $(T_xM)^* = T^*_xM$ di TM e T^*M, per ogni $x \in M$) che se V è dotato di una struttura quasi complessa J, allora è indotta su V^* una struttura complessa che indichiamo ancora con J tramite

$$X^*(JX) = (JX^*)(X) \quad \forall X \in V,\, X^* \in V^* \tag{4}$$

La struttura complessa J si estende poi per linearità ad un endomorfismo lineare del complessificato dello spazio duale.
Abbiamo quindi un $(1,1)$-tensore $J \in C^\infty(\mathrm{End}(T^*M_\mathbb{C})) = C^\infty(TM_\mathbb{C} \otimes T^*M_\mathbb{C})$ che gode della proprietà $J^2 = -\mathrm{Id}$; questo perciò si diagonalizza con autovalori $\pm i$, di autospazi relativi rispettivamente $T^*M^{1,0}$ e $T^*M^{0,1}$. Otteniamo quindi la decomposizione

$$T^*M_\mathbb{C} = T^*M^{1,0} \oplus T^*M^{0,1}$$

Posto $\Lambda^{1,0}M := \Lambda^1(T^*M^{1,0}) = T^*M^{1,0}$ e $\Lambda^{0,1}M := \Lambda^1(T^*M^{0,1}) = T^*M^{0,1}$ si ha la decomposizione

$$\Lambda^1_\mathbb{C}M = \Lambda^{1,0}M \oplus \Lambda^{0,1}M \tag{5}$$

Osserviamo che, proprio come i già trattati $T^{1,0}M$ e $T^{0,1}M$, i sottofibrati $\Lambda^{1,0}M$ e $\Lambda^{0,1}M$ avranno rango m. Dalla (5) segue un'analoga decomposizione per le 1- forme: definiamo $(1,0)$-forme le sezioni del fibrato $\Lambda^{1,0}M$ e $(0,1)$-forme le sezioni del fibrato $\Lambda^{0,1}M$.
Allora ω è una $(1,0)$-forma se e solo se $J\omega = i\omega$, ovvero se $\omega = \sigma + i\tau$ se e solo se $\tau = -J\sigma$, e quindi $\omega = \sigma - iJ\sigma$. Allo stesso modo abbiamo che ω è una $(0,1)$-forma se e solo se $\omega = -iJ\omega$ e quindi se e solo se $\omega = \sigma + iJ\sigma$. Chiaramente avremo che ω è una $(1,0)$-forma se e solo se $\overline{\omega}$ è una $(0,1)$-forma. Di conseguenza possiamo scrivere

$$\Lambda^{1,0}M = \{\omega - iJ\omega \mid \omega \in \Lambda^1 M\}$$

$$\Lambda^{0,1}M = \{\omega + iJ\omega \mid \omega \in \Lambda^1 M\}$$

dove $J\omega$ è da intendersi nel senso della (4) e ω è una 1-forma reale. Questo, assieme alla caratterizzazione (3) per $T^{0,1}M$ e $T^{1,0}M$, ci da

$$\begin{aligned} \Lambda^{1,0}M &= \{\xi \in \Lambda^1_\mathbb{C}M \mid \xi(Z) = 0\, \forall Z \in T^{0,1}M\} \\ \Lambda^{0,1}M &= \{\xi \in \Lambda^1_\mathbb{C}M \mid \xi(Z) = 0\, \forall Z \in T^{1,0}M\} \end{aligned} \tag{6}$$

Continuiamo adesso con la decomposizione delle k-forme complesse: dalla (5), sfruttando l'isomorfismo (1) si ha

$$\Lambda^k_\mathbb{C}M = \Lambda^k_\mathbb{C}(\Lambda^{1,0}M \oplus \Lambda^{0,1}M)$$

Posto $\Lambda^{k,0}M$ la k-esima potenza esterna di $\Lambda^{1,0}M$ e $\Lambda^{0,k}M$ la k-esima potenza esterna di $\Lambda^{0,1}M$, sfruttando la seguente uguaglianza valida per spazi vettoriali V , W:

$$\Lambda^k(V \oplus W) \cong \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^p V \otimes \Lambda^q W$$

applicata a $\Lambda^{1,0}M$ e $\Lambda^{0,1}M$ e tenendo conto delle definizioni appena date possiamo scrivere

$$\Lambda^k_{\mathbb{C}}M \cong \bigoplus_{p+q=k} (\Lambda^p(\Lambda^{1,0}M) \otimes \Lambda^q(\Lambda^{0,1}M)) = \bigoplus_{p+q=k} (\Lambda^{p,0}M \otimes \Lambda^{0,q}M)$$

Posto $\Lambda^{p,q}M := \Lambda^{p,0}M \otimes \Lambda^{0,q}M$ otteniamo infine

$$\Lambda^k_{\mathbb{C}}M \cong \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q}M \tag{7}$$

Chiamiamo (p,q)-*forme* le sezioni del fibrato $\Lambda^{p,q}M$, il quale avrà rango $\binom{m}{p} \cdot \binom{m}{q}$, dal momento che, come è facile verificare, $rg\Lambda^{p,0}M = \binom{m}{p}$ e $rg\Lambda^{0,q}M = \binom{m}{q}$.
La (7) ci consente di dare un'analoga decomposizione per k-forme:

$$C^\infty(\Lambda^k_{\mathbb{C}}M) = \bigoplus_{p+q=k} C^\infty(\Lambda^{p,q}M) \tag{8}$$

Vediamo come scrivere una (p,q) forma in di coordinate locali. Se $\omega_1, \ldots, \omega_m$ è una base locale per $C^\infty(\Lambda^{1,0}M)$, allora la sua complessa coniugata $\overline{\omega}_1, \ldots, \overline{\omega}_m$ sarà una base locale per $C^\infty(\Lambda^{0,1}M)$, e sfruttando le decomposizioni analizzate in precedenza possiamo concludere che l'insieme delle forme $\{\omega_{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{i_p} \wedge \overline{\omega}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \overline{\omega}_{j_q}\}$ al variare di $1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq m$ e $1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq m$ costituisce una base locale per $C^\infty(\Lambda^{p,q}M)$. Di conseguenza, una (p,q)-forma ω si scriverà localmente come

$$\omega = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq m \\ 1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq m}} \omega_{IJ}\, \omega_{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{i_p} \wedge \overline{\omega}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \overline{\omega}_{j_q} = \sum_{I,J} \omega_{IJ}\, \omega_I \wedge \overline{\omega}_J \tag{9}$$

dove le ω_{IJ} sono funzioni C^∞.
Se in più J è una struttura complessa possiamo scrivere una (p,q)-forma ω in coordinare complesse: sia $(U, \phi_U)_{U \in \mathcal{U}}$ un atlante complesso per M e siano $(z_1, \ldots, z_m)$ coordinate olomorfe su $U \subset M$ aperto, dove $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$ è l'α-esima coordinata locale. Applicando il differenziale a queste 0-forme otteniamo $\mathrm{d}z_\alpha = \mathrm{d}x_\alpha + i\mathrm{d}y_\alpha$ e $\mathrm{d}\overline{z}_\alpha = \mathrm{d}x_\alpha - i\mathrm{d}y_\alpha$ le quali sono 1-forme complesse su U. In particolare, $\{\mathrm{d}z_1, \ldots, \mathrm{d}z_m\}$ sono $(1,0)$-forme e costituiscono una base locale per $C^\infty(\Lambda^{1,0}M|_U)$ mentre $\{\overline{\mathrm{d}z}_1, \ldots, \overline{\mathrm{d}z}_m\}$ sono $(0,1)$-forme e costituiscono una base locale per $C^\infty(\Lambda^{0,1}M|_U)$. Di nuovo, grazie alla (8) abbiamo costruito una base locale per $C^\infty(\Lambda^{p,q}M|_U)$:

$$\{\mathrm{d}z_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z_{i_p} \wedge \mathrm{d}\overline{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\overline{z}_{j_q}, \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq m,\, 1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq m\}$$

Possiamo quindi scrivere ogni (p,q) forma $\omega \in U$ in modo unico come

$$\omega = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq m \\ 1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq m}} \omega_{IJ}\, \mathrm{d}z_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z_{i_p} \wedge \mathrm{d}\overline{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\overline{z}_{j_q} = \sum_{I,J} \omega_{IJ} \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\overline{z}_J$$

dove le ω_{IJ} sono funzioni C^∞ su U. Come già visto per le $(1,0)$ e le $(0,1)$-forme è evidente che ω è una (p,q)-forma se e solo se $\overline{\omega}$ è una (q,p)-forma. Di conseguenza, una (p,q)-forma complessa ω

sarà *reale* se e solo se vale $p = q$.
Una proprietà di caratterizzazione per le (p, q)-forme che sfrutteremo anche in seguito è la seguente: una k-forma complessa ω è esattamente una forma di tipo $(k, 0)$ se e solo se $Z \lrcorner \omega = 0$ per ogni $Z \in T^{0,1}M$.

Osservazione 1.2. Se ω è una k-forma e $Z \in T^{0,1}M$ il prodotto interno $Z \lrcorner \omega$ é una contrazione della forma ω con il campo vettoriale Z. Si dice anche che il prodotto interno é una "antiderivazione di grado -1 " in quanto data una k-forma ω questo individua una $(k-1)$-forma definita come

$$Z \lrcorner \omega(Z_1, \ldots, Z_{k-1}) = \omega(Z, Z_1, \ldots, Z_{p-1})$$

per ogni $Z_1, \ldots, Z_{p-1} \in T^{0,1}M$. E' anche detto *derivata interna.*

Più in generale, una $p+q$-forma ω è esattamente una forma di tipo (p, q) se e solo se $\omega(Z_0, \ldots, Z_{p+q}) = 0$ dove almeno $p+1$ degli Z_i sono elementi di $T^{0,1}M$ o almeno $q+1$ di essi sono elementi di $T^{1,0}M$. Entrambe le affermazioni risultano evidenti se si considera la scrittura di ω in coordinate locali, ad esempio la (9) nel caso più generale in cui J sia una struttura quasi complessa, tenendo a mente la definizione (6) delle $(1, 0)$ e $(0, 1)$-forme.

Come già visto nel precedente seminario è possibile associare ad ogni struttura quasi complessa J un $(2, 1)$-tensore chiamato *Tensore di Nijenhuis*, indicato con N^J, il quale soddisfa la seguente proprietà:

$$N^J(X, Y) = [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY]$$

per ogni campo vettoriale $X, Y \in C^\infty(TM)$. Vale la seguente

Proposizione 1.1. *Sia J una struttura quasi complessa su M, dove M varietà quasi complessa di $dim_{\mathbb{R}} M = 2m$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *J è una struttura complessa.*
2. *$T^{0,1}M$ è integrabile.*
3. *$\mathrm{d}C^\infty(\Lambda^{1,0}M) \subset C^\infty(\Lambda^{2,0} \oplus \Lambda^{1,1}M)$.*
4. *$\mathrm{d}C^\infty(\Lambda^{p,q}M) \subset C^\infty(\Lambda^{p+1,q} \oplus \Lambda^{p,q+1}M)$ $\forall 0 \leq p, q \leq m$.*
5. *$N^J \equiv 0$.*

Osservazione 1.3. Molte delle implicazioni presenti in questa proposizione sono state già dimostrate nel precedente seminario in quanto argomento del Teorema di Newlander-Nirenberg. Quello che ora faremo sarà in un certo senso ampliare tale teorema aggiungendo condizioni che caratterizzeranno il differenziale delle forme complesse nel caso in cui J sia una struttura complessa. Ci limiteremo perciò a dimostrare le implicazioni che non sono già state trattate in precedenza,

per la dimostrazione delle quali rimandiamo al seminario precedente.
Soffermiamoci un attimo ad esaminare le affermazioni (3.) e (4.): un elemento di $C^\infty(\Lambda^{1,0}M)$ è una 1-forma, e come tale il suo differenziale sarà una 2-forma che a priori, per la decomposizione delle 2-forme potrà essere una forma di tipo $(2,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$. La condizione (3.) perciò non è affatto scontata, e vedremo più avanti nel seminario quali sono le conseguenze nel caso in cui questa non sia verificata. Allo stesso modo, vedremo più avanti quali sono le possibilità che possono presentarsi per il differenziale di una forma di tipo (p,q) generica, quando J non è una struttura complessa.

Dimostrazione. Consideriamo ($2. \longleftrightarrow 3$): ricordiamo che $T^{0,1}M$ si dice integrabile se prese due sue sezioni, il loro prodotto bracket è ancora una sezione di $T^{0,1}M$. Sia ω una sezione di $\Lambda^{1,0}M$, diciamo che la componente $\Lambda^{0,2}M$ di $\mathrm{d}\omega$ si annulla se e solo se $\mathrm{d}\omega(Z,W)=0$ per ogni $Z,W\in T^{0,1}M$. Questo appare chiaro se si pensa alla caratterizzazione delle (p,q)-forme relativamente alla loro azione sugli elementi di $T^{1,0}M$ e $T^{0,1}M$ analizzata in precedenza. Estendendo Z e W a sezioni locali di $T^{0,1}M$ ovvero a campi vettoriali di tipo $(0,1)$ e sfruttando la definizione del differenziale di una 2-forma in termini della sua azione sui campi vettoriali otteniamo

$$d\omega(Z,W)=Z(\omega(W))-W(\omega(Z))-\omega([Z,W])=-\omega([Z,W])$$

in quanto $\omega(W)=0=\omega(Z)$ per la (6). In tal modo si ha che

$$\begin{aligned}
&d\omega(Z,W)=0 && \forall Z,W\in T^{0,1}M, \forall\omega\in\Lambda^{1,0}M\\
\Longleftrightarrow\ &\omega([Z,W])=0 && \forall Z,W\in T^{0,1}M, \forall\omega\in\Lambda^{1,0}M\\
\Longleftrightarrow\ &[Z,W]\in T^{0,1}M && \forall Z,W\in T^{0,1}M.
\end{aligned}$$

dove l'ultimo se e solo se è dovuto al fatto che $\omega\in C^\infty(\Lambda^{1,0}M)$, ed otteniamo in tal modo esattamente la definizione di integrabilità per $T^{0,1}M$. È chiara perciò l'equivalenza dei due enunciati.

Osservazione 1.4. Nel caso generale in cui ω sia una k-forma si ha

$$d\omega(X_0,\ldots,X_k)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i X_i\omega(X_0,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_k)+\\ \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_0,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_k)$$

Per quanto riguarda ($3. \longleftrightarrow 4.$), un'implicazione è banale. Supponiamo invece che valga (3.): per coniugio otteniamo anche $\mathrm{d}C^\infty(\Lambda^{0,1}M)\subset C^\infty(\Lambda^{0,2}\oplus\Lambda^{1,1}M)$. La conclusione si ottiene adesso applicando la Regola di Leibniz (2) ad una qualunque sezione di $\Lambda^{p,q}M$, ricordandone la scrittura in coordinate locali (9). Osserviamo infatti che in ogni addendo di $\mathrm{d}\omega$ sarà presente uno e uno solo elemento su cui avrà agito il differenziale, in particolare questo potrà essere un elemento del tipo $\mathrm{d}\omega_{i_h}$ per $\omega_{i_h} \in \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_p}\}$ il quale, essendo quest'ultima una $(1,0)$-forma potrà, per la (3.) essere o di tipo $(2,0)$ o di tipo $(1,1)$, oppure un elemento del tipo $\mathrm{d}\overline{\omega}_{j_k}$ per $\overline{\omega}_{j_k} \in \{\overline{\omega}_{j_1}, \dots .\overline{\omega}_{j_q}\}$, il quale la coniugata della (3.) sarà di tipo $(0,2)$ o $(1,1)$ essendo $\overline{\omega}_{j_k}$ di tipo $(0,1)$. Infine, potrebbe contenere $d\omega_{IJ}$ che in quanto differenziale di una funzione C^∞ ovvero di una 0-forma, sarà di tipo $(1,0)$ o $(0,1)$. Così calcolando esplicitamente il grado di $d\omega$ a partire dai suoi addendi risulta evidente che essa potrà essere solamente una $(p+1,q)$ forma o una $(p,q+1)$ forma. $\square$

2 Funzioni, forme e campi olomorfi - Paolo Tripoli

In questa parte del seminario (M,J) sarà sempre una varietà complessa.

2.1 Operatori ∂ e $\overline{\partial}$

Abbiamo visto che $\mathrm{d} : C^\infty(\Lambda^{p,q}M) \to C^\infty(\Lambda^{p+1,q}M \oplus \Lambda^{p,q+1}M)$. Chiameremo ∂ e $\overline{\partial}$ le due componenti dell'operatore di differenziazione.
$\partial : C^\infty(\Lambda^{p,q}M) \to C^\infty(\Lambda^{p+1,q}M)$, $\overline{\partial} : C^\infty(\Lambda^{p,q}M) \to C^\infty(\Lambda^{p,q+1}M)$.
Gli operatori sono quindi legati dalla relazione $d = \partial + \overline{\partial}$.

Possiamo anche scrivere esplicitamente come agiscono i due operatori appena definiti.

Sia f una funzione (ovvero una 0-forma). Ricordiamo che, scelto un sistema di coordinate olomorfe locale $z_1, \dots, z_n$, vale

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_i}\mathrm{d}z_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i}\mathrm{d}\bar{z}_i$$

La decomposizione di df come somma di una $(1,0)-$ forma e una $(0,1)-$forma è immediata:

$$\partial f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_i}\mathrm{d}z_i, \quad \overline{\partial} f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i}\mathrm{d}\bar{z}_i.$$

Se α è una (p,q)-forma allora possiamo scrivere

$$\alpha = \sum_{IJ} \alpha_{IJ}\mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\bar{z}_J$$

dove $I = (i_1, \dots, i_p)$ e $J = (j_1, \dots, j_q)$ sono multi indici e $\mathrm{d}z_I = \mathrm{d}z_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}z_{i_p}$, $\mathrm{d}\bar{z}_J = \mathrm{d}\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\bar{z}_{j_q}$.
Si avrà allora

$$\mathrm{d}\alpha = \sum_{IJ} \mathrm{d}\alpha_{IJ} \wedge \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\bar{z}_J,$$

pertanto risulta chiaro che

$$\partial\alpha = \sum_{IJ} \partial\alpha_{IJ}\mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\bar{z}_J = \sum_{I,J} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \alpha}{\partial z_i}\mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\bar{z}_J,$$

$$\overline{\partial}\,\alpha = \sum_{IJ} \overline{\partial}\,\alpha_{IJ} \wedge \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\bar{z}_J = \sum_{IJ} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}_i} \mathrm{d}\bar{z}_i \wedge \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\bar{z}_J.$$

2.2 Funzioni Olomorfe

Ricordiamo una caratterizzazione delle funzioni olomorfe $f : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$.

Osservazione 2.1. Una funzione $f : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ è olomorfa se e solo se è differenziabile e soddisfa

$$j_m \circ (F_*)_p = (F_*)_p \circ j_n \quad \forall p \in U$$

La nozione di funzione olomorfa si può estendere in maniera molto immediata al contesto delle varietà complesse.

Definizione 2.2. Una funzione differenziabile $f : M \to \mathbb{C}$ è olomorfa se e solo se per ogni carta (U, φ_U) di M, $f \circ \varphi_U^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ è olomorfa.

Vediamo ora alcune condizioni equivalenti all'olomorfia di una funzione $f : M \to \mathbb{C}$.

Proposizione 2.1. *Sia $f : M \to \mathbb{C}$ una funzione differenziabile, (M, J) varietà complessa. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *f è olomorfa*
2. *$f_* \circ J = i f_*$*
3. *$\mathrm{d}f \in C^\infty(\Lambda^{(1,0)} M)$*
4. *$Z(f) = 0 \quad \forall Z \in T^{(0,1)} M$*

Dimostrazione.$3 \Leftrightarrow 4$ $\mathrm{d}f \in \Lambda^{(1,0)} M$ vuol dire, per definizione, $\mathrm{d}f(Z) = Z(f) = 0\ \forall Z \in T^{(0,1)} M$.

$1 \Leftrightarrow 2$ Per definizione f è olomorfa se lo è $f \circ \varphi_U^{-1}$, per ogni carta (U, φ_U) di M, ovvero se $i \circ (f_* \circ (\varphi_U)_*^{-1}) = (f_* \circ (\varphi_U)_*^{-1}) \circ j_m \quad \forall p \in U$, ovvero, ricordando $J|_U = (\varphi_U)_*^{-1} \circ j_m \circ (\varphi_U)_*$, $f_* \circ J = i f_*$.

$2 \Leftrightarrow 3$ $f_* \circ J = i f_*$ è equivalente a dire che $\forall X \in TM$ vale $\mathrm{d}f(JX) = i\mathrm{d}f(x)$ ovvero $i\mathrm{d}f(X + iJX) = 0$ ovvero $\mathrm{d}f \in \Lambda^{(1,0)} M$.

□

Definizione 2.3. Siano (M, I) e (N, J) varietà complesse. Diremo che una applicazione $g : M \to N$ è olomorfa se vale $J \circ f_* = I \circ f_*$.

È facile mostrare che, anche in questo caso, una funzione : $M \to N$ è olomorfa se e solo se è olomorfa in coordinate locali ovvero, per ogni (U, φ) carta locale di M e per ogni (V, ψ) carta locale di N, la funzione $\psi \circ g \circ \varphi^{-1}$ è olomorfa nell'aperto in cui è definita.

2.3 Forme Olomorfe

Osserviamo che la condizione 3 della proposizione è equivalente a richiedere $\overline{\partial} f = 0$. A questo punto sorge spontanea questa definizione.

Definizione 2.4. Una $(p,0)$-forma ω è detta olomorfa se $\overline{\partial}\,\omega = 0$.

La defizione è stata data solo per $(p,0)$-forme perché la condizione $\overline{\partial}\,\omega = 0$ in generale è piuttosto debole. Per esempio per tutte le (p,m) forme ($m = dim(M)$) vale $\overline{\partial}\,\omega = 0$.

Notiamo che ω è olomorfa se e solo se tutte le f_I sono funzioni olomorfe.
Se infatti localmente $\omega = \sum_I f_I \mathrm{d}z_I$, abbiamo che

$$\overline{\partial}\,\omega = \sum_{I,j} \frac{\partial f_I}{\partial \bar{z}_j} \mathrm{d}\bar{z}_j \wedge \mathrm{d}z_I$$

e, dato che gli elementi $\mathrm{d}\bar{z}_j \wedge \mathrm{d}z_I$ sono linearmente indipendenti (qui stiamo usando che ω è una $(p,0)$- forma) deve essere, per ogni I e per ogni j,

$$\frac{\partial f_I}{\partial \bar{z}_j} = 0$$

o, equivalentemente $\overline{\partial}\, f_I = 0$ per ogni I.

2.4 Campi Olomorfi

Passiamo ora a definire quando un campo vettoriale è olomorfo.

Definizione 2.5. Un campo vettoriale $Z \in C^\infty(T^{1,0}M)$ è detto olomorfo, se per ogni funzione olomorfa $f : U \subset M \to \mathbb{C}$ definita su un aperto U di M, $Z(f) : U \to \mathbb{C}$ è olomorfa.

Definizione 2.6. Un campo vettoriale reale $X \in C^\infty(TM)$ è detto reale olomorfo se $X - iJX$ è olomorfo.

Queste definizioni sono giustificate dalla seguente Proposizione che non dimostreremo. Per chi fosse interessato la dimostrazione può essere trovata sul libro [Mor07].

Proposizione 2.2. *Sia X un campo vettoriale reale sulla varietá complessa (M,J). Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- *X è reale olomorfa*
- *Il flusso di X consiste di trasformazioni olomorfe di M*

3 Conseguenze e generalizzazione della decomposizione di d - Giuseppe Martone

Come si può ben immaginare dal titolo, gli obiettivi di questa parte del seminario sono due:

1. Mostrare alcune conseguenze della decomposizione $\mathrm{d} = \partial + \overline{\partial}$;

2. Vedere se, e in che misura, sia possibile estendere tale discorso al caso quasi complesso.

3.1 Conseguenze della decomposizione

La prima e immediata proprietà deriva dall'equazione $\mathrm{d}^2 = 0$. Algebricamente abbiamo che

$$0 = \mathrm{d}^2 = (\partial + \overline{\partial})(\partial + \overline{\partial}) = \partial^2 + (\partial\,\overline{\partial} + \overline{\partial}\,\partial) + \overline{\partial}^2$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} \partial^2 &\colon C^\infty(\Lambda^{p,q}M) \to C^\infty(\Lambda^{p+2,q}M) \\ \overline{\partial}^2 &\colon C^\infty(\Lambda^{p,q}M) \to C^\infty(\Lambda^{p,q+2}M) \\ \partial\,\overline{\partial} + \overline{\partial}\,\partial &\colon C^\infty(\Lambda^{p,q}M) \to C^\infty(\Lambda^{p+1,q+1}M) \end{aligned}$$

ovvero, questi tre operatori hanno immagini in spazi con intersezione vuota per cui ciascuno di essi deve essere nullo. Otteniamo, quindi, le seguenti relazioni:

$$\partial^2 = 0, \quad \partial\,\overline{\partial} = -\,\overline{\partial}\,\partial, \quad \overline{\partial}^2 = 0$$

che ci danno il complesso doppio

$$\begin{tikzcd} & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\ \cdots \arrow[r] & C^\infty(\Lambda^{p,q}M) \arrow[r, "\overline{\partial}"] \arrow[d, "(-1)^q\partial"'] & C^\infty(\Lambda^{p,q+1}M) \arrow[r] \arrow[d, "(-1)^{q+1}\partial"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & C^\infty(\Lambda^{p+1,q}M) \arrow[r, "\overline{\partial}"] \arrow[d] & C^\infty(\Lambda^{p+1,q+1}M) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots. \\ & \vdots & \vdots & \end{tikzcd}$$

Difatti, le righe e le colonne sono complessi perché $\partial^2 = 0$ e $\overline{\partial}^2 = 0$ e ciascun quadrato commuta perché $(-1)^q\,\overline{\partial}\,\partial = (-1)^q(-\partial\,\overline{\partial})$. In un altro seminario si parlerà approfonditamente di coomologia di Dolbeault e vedremo quanto importante essa sia come strumento nello studio delle varietà complesse. Tuttavia è bene definirla ora come la coomologia associata ai complessi orizzontali nel nostro precedente diagramma. In formule:

$$H^{p,q}_{\overline{\partial}}(M) = \frac{\ker\{\overline{\partial}\colon C^\infty(\Lambda^{p,q}M) \to C^\infty(\Lambda^{p,q+1}M)\}}{\operatorname{im}\{\overline{\partial}\colon C^\infty(\Lambda^{p,q-1}M) \to C^\infty(\Lambda^{p,q}M)\}}.$$

Procediamo con lo studio delle proprietà algebriche degli operatori $\partial, \overline{\partial}$ osservando che questi sono complessi coniugati nel senso della seguente

Proposizione 3.1. *Sia $\alpha \in C^\infty(\Lambda^{p,q}M)$. Allora*

$$\overline{\partial\alpha} = \overline{\partial}\,\overline{\alpha}.$$

Dimostrazione. Per questa dimostrazione si usa l'espressione di α in coordinate locali. Supponiamo, quindi, di essere in un aperto banalizzante per M, allora si hanno le seguenti uguaglianze (utilizzando la notazione compatta, con I e J, multi-indici di lunghezza rispettivamente p e q):

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sum_{I,J} \alpha_{IJ} \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\overline{z}_J, \\
\partial\alpha &= \sum_{I,J}\sum_k \frac{\partial \alpha_{IJ}}{\partial z_k} \mathrm{d}z_k \wedge \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\overline{z}_J, \\
\overline{\partial}\,\overline{\alpha} &= \sum_{I,J}\sum_k \frac{\partial \overline{\alpha}_{IJ}}{\partial \overline{z}_k} \mathrm{d}\overline{z}_k \wedge \mathrm{d}\overline{z}_I \wedge \mathrm{d}z_J
\end{aligned}$$

e concludiamo osservando che $\overline{\left(\frac{\partial \alpha_{IJ}}{\partial z_k}\right)} = \frac{\partial \overline{\alpha}_{IJ}}{\partial \overline{z}_k}$. □

Questi preliminari ci portano alla seguente interessante proprietà:

Lemma 3.2 ($i\partial\overline{\partial}$-lemma)**.** *Sia M una varietà complessa. Consideriamo la 2-forma reale ω su M di tipo (1,1). Allora ω è chiusa se e solo se per ogni punto $x \in M$ esiste un intorno U del punto tale che:*

$$\omega|_U = i\partial\overline{\partial}\, u$$

per qualche funzione reale u su U.

Esempio 3.1. Questo risultato dovrebbe ricordarci quanto abbiamo visto per la metrica di Fubini-Study per la varietà complessa $\mathbb{C}P^n$. Difatti, abbiamo visto che la (1,1)-forma chiusa reale ω_{FS} si può ottenere proiettando la funzione

$$\varphi(z) = i\partial\overline{\partial}\,\frac{\log|z|^2}{2}$$

definita su $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Questo lemma ci sta dicendo che quanto accade in questo particolare caso è, in realtà, la norma. Vediamone, dunque, la dimostrazione.

Dimostrazione. Se ω è della forma desiderata, chiaramente, è una forma chiusa. Infatti:

$$\mathrm{d}(\partial\,\overline{\partial}) = (\partial + \overline{\partial})(\partial\,\overline{\partial}) = (\partial^2\,\overline{\partial} + \overline{\partial}\,\partial\,\overline{\partial}) = 0$$

Viceversa, supponiamo ω sia reale chiusa di tipo (1,1). Per il lemma di Poincaré, esiste localmente una 1-forma reale τ tale che $\mathrm{d}\tau = \omega$. Grazie alla nostra decomposizione, sappiamo che $\tau = \tau^{1,0} + \tau^{0,1}$ dove $\tau^{1,0}$ è di tipo (1,0) e $\tau^{0,1}$ è di tipo (0,1). Abbiamo anche visto che $\tau^{1,0} = \overline{\tau^{0,1}}$. Allora:

$$\omega = \mathrm{d}\tau = \partial\tau^{1,0} + (\partial\tau^{0,1} + \overline{\partial}\,\tau^{1,0}) + \overline{\partial}\,\tau^{0,1}$$

Ma ω è di tipo $(1,1)$, quindi $\omega = (\partial\tau^{0,1} + \overline{\partial}\,\tau^{1,0})$ e $\partial\tau^{1,0} = \overline{\partial}\,\tau^{0,1} = 0$. A questo punto usiamo quello che è il corrispettivo del lemma di Poincarè in teoria complessa:

Lemma 3.3 (di Dolbeault)**.** *Una (0,1)-forma $\overline{\partial}$-chiusa è localmente $\overline{\partial}$-esatta.*

La dimostrazione è abbastanza lunga (ma non difficile) e per questo non la tratteremo in questo contesto. In ogni caso si può trovare su [GH94]. Questo ci assicura che, localmente, esiste una funzione f tale che, sempre localmente, $\tau^{0,1} = \overline{\partial}\,f$ e, per quanto visto nella proposizione 3.1, prendendone il coniugato si ha $\tau^{1,0} = \partial\overline{f}$. Dunque:

$$\omega = \partial\tau^{0,1} + \overline{\partial}\,\tau^{1,0} = \partial\,\overline{\partial}\,f + \overline{\partial}\,\partial\bar{f} = \partial\,\overline{\partial}(f - \overline{f}) = i\partial\,\overline{\partial}(2\,\mathrm{Im}(f))$$

e concludiamo ponendo $u = 2\,\mathrm{Im}(f)$. □

3.2 Generalizzazione al caso quasi complesso

Quello che faremo ora è cercare di capire come si decompone l'operatore d nel caso quasi complesso. Sia dunque M una $2m$-varietà e J una struttura quasi complessa su M, ossia un endomorfismo del tangente tale che $J^2 = -Id$. Osserviamo che possiamo, anche in questo caso, definire senza alcun problema le (p,q)-forme dato che, come abbiamo visto, l'operatore J è tutto quello di cui necessitiamo (definiamo l'operatore J sul cotangente e consideriamo le potenze esterne dei sottofibrati associati ai due autovalori). Il problema è che non possiamo definire coordinate locali complesse su M perché non abbiamo una struttura complessa. L'esistenza di tali coordinate è stata essenziale per poter scrivere localmente una (p,q)-forma α come $\sum_{I,J}\alpha_{IJ}\mathrm{d}z_I\wedge\mathrm{d}\overline{z}_J$. Proviamo a ovviare a questo problema. Ricordiamo che, essendo $\Lambda^{1,0}M$ un fibrato, esiste un riferimento locale $\omega_1,\ldots,\omega_n$ e, prendendo i coniugati $\overline{\omega}_1,\ldots,\overline{\omega}_n$ si ha un riferimento per $\Lambda^{0,1}M$. Segue che, con ragionamento analogo a quello già visto in precedenza, una (p,q)-forma si scrive localmente come:

$$\omega = \sum_{I,J} f_{IJ}\omega_I \wedge \overline{\omega}_J$$

dove f_{IJ} è una (0,0)-forma, ossia una funzione, I è un multi-indice di lunghezza p e J è di lunghezza q. Per capire, quindi, se e come sia possibile decomporre d anche nel caso quasi complesso, ci basta capire come questo operatore agisce sulle funzioni, sulle (1,0)-forme e sulle (0,1)-forme perché queste generano lo spazio delle (p, q)-forme nel senso appena descritto.

Proposizione 3.4. *Se $C^\infty(\Lambda^{p,q}M)$ è lo spazio delle (p, q)-forme su una varietà quasi complessa, allora*

$$\mathrm{d}C^\infty(\Lambda^{p,q}M) \subset C^\infty(\Lambda^{p+2,q-1}M) \oplus C^\infty(\Lambda^{p+1,q}M) \oplus C^\infty(\Lambda^{p,q+1}M) \oplus C^\infty(\Lambda^{p-1,q+2}M)$$

Dimostrazione. Per quanto detto, osserviamo che

$$\begin{aligned} \mathrm{d}C^\infty(\Lambda^{0,0}M) &\subset C^\infty(\Lambda^{1,0}M \oplus \Lambda^{0,1}M) = C^\infty(\Lambda^1 M), \\ \mathrm{d}C^\infty(\Lambda^{1,0}M) &\subset C^\infty(\Lambda^{2,0}M \oplus \Lambda^{1,1}M \oplus \Lambda^{0,2}M) = C^\infty(\Lambda^2 M), \\ \mathrm{d}C^\infty(\Lambda^{0,1}M) &\subset C^\infty(\Lambda^{2,0}M \oplus \Lambda^{1,1}M \oplus \Lambda^{0,2}M) = C^\infty(\Lambda^2 M). \end{aligned}$$

dato che differenziando una funzione si ha una 1-forma, mentre, differenziando una (1,0)-forma o una (0,1)-forma si ottiene, a priori, una 2-forma. Questo ci dà la formula per la generica (p, q)-forma dato che, quando differenziamo una funzione, un addendo fa aumentare di 1 l'indice p e l'altro quello q. Invece, ad esempio, quando differenziamo una parte di tipo (1,0), un addendo ci fa aumentare di 1 l'indice p, uno ci fa aumentare di 1 l'indice q e il terzo ci fa diminuire di 1 l'indice p e aumentare di 2 l'indice q. □

Abbiamo, quindi, una nuova decomposizione per d:

$$\mathrm{d} = \overline{N} + \partial + \overline{\partial} + N$$

dove continuiamo a chiamare ∂ la proiezione sulla componente di tipo $(p + 1, q)$ e $\overline{\partial}$ quella sulla componente di tipo $(p, q + 1)$. La parte N viene così denotata perché si può identificare con il tensore di Nijenhuis.

Osserviamo, infine, che nel caso complesso, siamo riusciti a definire la coomologia di Dolbeault grazie al fatto che $\mathrm{d}^2 = 0$ implica che $\overline{\partial}^2 = 0$ essendo l'unico operatore coinvolto nell'equazione con immagine in $C^\infty(\Lambda^{p,q+2}M)$. Ora, però, tale ragionamento ci porta a dire che

$$\overline{\partial}^2 + \partial N + N\partial = 0$$

e, quindi, non possiamo più definire l'utilissima coomologia di Dolbeault.

Riferimenti bibliografici

[GH94] Philip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of Algebraic Geometry.* Wiley, Hoboken, 1994.

[Joy] Dominic Joyce. *Complex Manifolds and Kähler Geometry, Oxford Autumn term 2012.* `http://people.maths.ox.ac.uk/joyce/KahlerGeometry2012/KahlerGeom.html`.

[KN96] S. Kobayashi and K. Nomitzu. *Foundations of Differential Geometry.* Wiley-Interscience, 1996.

[Mor07] Andrei Moroianu. *Lectures on Kähler Geometry* Volume 69 of London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.