Seminari di Geometria Superiore
a.a. 2012/2013
Prof. P.Piccinni

Interazioni tra Matematica e Fisica

Luca Romano

ABSTRACT
Lo scopo delle presenti note è quello di studiare alcuni argomenti fisici dal punto di vista matematico. Nella prima sezione verranno ripresi alcuni concetti di teoria delle forme differenziali e teoria di Hodge che verranno utilizzati nel seguito. La seconda sezione è dedicata alle equazioni Maxwell e verranno riscritte nel linguaggio delle forme differenziali. Verrà studiato inoltre il loro significato geometrico e verranno inquadrate nell' ambito delle teorie di Yang-Mills. Nell' ultima sezione verranno dati dei cenni di teorie di Kaluza Klein nel caso semplice del fibrato cerchio.

Indice

1 Cenni di Teoria di Hodge

In questa sezione si vogliono richiamare alcune nozioni di teoria delle forme armoniche che risulteranno utili nello studio delle equazioni di Maxwell nel seguito

1.1 Prodotto Scalare tra 1-forme

Sia (M, g) una varietà Riemanniana con g tensore metrico; g è una sezione di $T^*M \otimes T^*M$ che si può scrivere in un sistema di coordinate locali, nell' intorno di un punto x, come

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

ove

$$g_{ij}(x) = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)(x).$$

g definisce un prodotto scalare su T_xM. Dati $X, Y \in T_xM$ campi vettoriali si ha

$$\langle X, Y\rangle = g(X, Y) = X^i Y^j g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = g_{ij} X^i Y^J.$$

Tale prodotto scalare induce una corrispondenza tra elementi di TM e T^*M al modo seguente. Sia $\omega \in \Gamma(T^*M)$, si associa ad essa $X \in TM$ se vale

$$\omega(Y) = \langle X, Y\rangle \qquad \forall Y \in TM.$$

Espandendo in coordinate locali in un intorno $U \subset M$ di x (facendo attenzione ad indici alti e bassi) come

$$\omega = \omega_i dx^i \qquad X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

la relazione precedente conduce a

$$\omega(Y) = \omega_i Y^i = g_{km} X^k Y^m.$$

Scegliendo $Y = \partial/\partial x^k$ si ottiene

$$\omega_k = g_{ki} X^i \qquad X^k = g^{kj} \omega_j,$$

ove $g^{ij} = (g^{-1})_{ij}$. Dunque tramite l'identificazione operata è immediato definire un prodotto scalare su T^*M tra due 1-forme ω ed η associate mediante dualità ad $X, Y \in TM$ rispettivamente, come

$$\langle \omega, \eta\rangle := \langle X, Y\rangle,$$

che in coordinate locali diviene

$$\langle \omega, \eta\rangle = g_{ij} X^i Y^j = g^{ik} \omega_i \eta_j.$$

Utilizzando il prodotto scalare indotto sul fibrato cotangente è dunque possibile definire un prodotto scalare tra k-forme, generalizzando la definizione seguente

Definizione 1.1. Sia V uno spazio vettoriale con un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e sia $\Lambda^k V$ lo spazio di k-prodotti esterni di V. Si definisce un prodotto scalare su $\Lambda^k V$ come segue, date $\alpha, \beta \in \Lambda^k V$ con

$$\alpha = \alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_k \qquad \beta = \beta_1 \wedge ... \wedge \beta_k,$$
$$\langle \alpha, \beta\rangle = \det\big(\langle \alpha_{\mathrm{i}}, \beta_{\mathrm{j}}\rangle\big)$$

Esempio Siano ω, η due 2-forme in $\mathbb{R}^3$, con metrica Euclidea,

$$\omega = A dx_1 \wedge dx_2 + B dx_2 \wedge dx_3 + C dx_3 \wedge dx_1$$
$$\eta = D dx_1 \wedge dx_2 + E dx_2 \wedge dx_3 + F dx_3 \wedge dx_1$$

risulta

$$\langle \omega, \eta\rangle = AD + BE + CF.$$

Si introduce inoltre la nozione di prodotto interno,

Definizione 1.2 (prodotto interno). Presi $X \in TM$ ed $\omega \in \Lambda^p M$, si definisce il prodotto interno di X con ω

$$X \lrcorner \omega(Y_1, ..., Y_{p-1}) = \omega = (Y_1, ..., Y_{p-1})$$

ove $Y_1, ..., Y_{p-1} \in TM$.

In coordinate la precedente relazione può esprimersi come

$$X \lrcorner \omega = X^j \omega_{i_1 \ldots i_{p-1}} \frac{\partial}{\partial x^j} (dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_{p-1}}).$$

1.2 Operatore $*$ di Hodge

Nel seguito verrà introdotto l'operatore $*$ di Hodge nel caso di uno spazio vettoriale V generico, l'applicazione alle forme differenziali segue immediatamente.

Definizione 1.3 (operatore $*$ di Hodge). Sia V uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sia $\Lambda^p V$ il prodotto esterno p volte di V. Sia $\{e_i\}_{i=1,...,n}$ una base orientata di V ed

$$e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_p} \qquad 1 \leqslant i_1 < ... < i_p \leqslant n$$

Si definisce l'operatore lineare $*$ di Hodge

$$* : \Lambda^p V \to \Lambda^{n-p} V \qquad 0 \leqslant p \leqslant n$$

mediante

$$* \, e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_p} = e_{j_1} \wedge ... \wedge e_{j_{n-p}}$$

tale che $e_{i_1}, .., e_{i_p}, e_{j_1}, ..., e_{j_{n-p}}$ sia una base orientata positivamente di V.

In particolare dalle definizione segue

$$\begin{aligned} &* (1) = e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_n} \\ &* (e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_n}) = 1. \end{aligned}$$

Sia $f_1, .., f_n \in V$ ed sia A una matrice $n \times n$, risulta

$$\begin{aligned} &* (Af_1 \wedge ... \wedge Af_n) = *(A_{i_1 j_1}(f_1)_{j_1} \wedge ... \wedge A_{i_n j_n}(f_n)_{j_n}) = \\ &A_{i_1 j_1} ... A_{i_n j_n} \epsilon^{j_1 \ldots j_n} * (f_1)_{j_1} \wedge ... \wedge (f_n)_{j_n}) = \\ &A_{i_1 j_1} ... A_{n j_n} \epsilon^{j_1 \ldots j_n} * (f_1)_{j_1} \wedge ... \wedge (f_n)_{j_n}) = \det(A)(f_1 \wedge ... \wedge f_n) \end{aligned} \tag{1}$$

(ove $\epsilon^{j_1 \ldots j_n}$ è il tensore di Levi Civita completamente antisimmetrico). La relazione ottenuta suggerisce che se $\{f_i\}$ è una base ortonormale di V ed A una matrice di cambio base allora l'azione dell' operatore star di Hodge è indipendente dalla base scelta, purché essa abbia stessa orientazione. Di seguito verranno introdotti alcuni lemmi relativi alle proprietà di $*$ che saranno utilizzati nelle prossime sezioni;

Lemma 1.4.

$$** = (-1)^{p(n-p)} : \Lambda^p(V) \to \Lambda^p(V)$$

Dimostrazione. Per linearità basta dimostrare l'asserto su vettori di base. Si assuma

$$* (e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_p}) = e_{j_1} \wedge ... \wedge e_{j_{n-p}}$$

allora

$$**(e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_p}) = \pm e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_p}$$

ove il segno dipende dall'orientazione della base $e_{j_1}, ..., e_{j_{n-p}}, e_{i_1}, ..., e_{i_p}$. Tuttavia avendo assunto orientazione positiva per la base $e_{i_1}, ..., e_{i_p}, e_{j_1}, ..., e_{j_{n-p}}$ ed essendo

$$e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_p} \wedge e_{j_1} \wedge ... \wedge e_{j_{n-p}} = (-1)^{p(n-p)} e_{j_1} \wedge ... \wedge e_{j_{n-p}} \wedge e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_p}$$

dalla (1) si deduce che $(-1)^{p(n-p)}$ è il determinante della matrice di cambio base e dunque segue

$$** = (-1)^{p(n-p)} : \Lambda^p(V) \to \Lambda^p(V)$$

$\square$

Lemma 1.5. *Per $v, w \in \Lambda^p(V)$*

$$\langle v, w \rangle = *(w \wedge *v) = *(v \wedge *w)$$

Dimostrazione. Siano

$$v = \sum_i v_{i_1} e_{i_1} \wedge ... \wedge v_{i_p} e_{i_p} = \sum_i v_{[i_1} ... v_{i_p]} e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_p}$$
$$w = \sum_i w_{i_1} e_{i_1} \wedge ... \wedge w_{i_p} e_{i_p} = \sum_i w_{[i_1} ... w_{i_p]} e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_p},$$

ove [...] indica antisimmetrizzazione negli indici, risulta $\langle v, w \rangle = \det(\langle v_i, w_j \rangle)$; inoltre

$$* v = \sum_i v_{[i_1} ... v_{i_p]} e_{j_1} \wedge ... \wedge e_{j_{n-p}}$$
$$w \wedge *v = \sum_{i,k} w_{[k_1} ... w_{k_p]} v_{[i_1} ... v_{i_p]} e_{k_1} \wedge ... \wedge e_{k_p} \wedge e_{j_1} \wedge ... \wedge e_{j_{n-p}},$$

dovendo essere $k_m \neq j_s \ \forall m, s$, segue che gli indici i_m e k_m prendono valori nello stesso insieme di p indici, che,,senza perdita di generalità può essere fissato ad $\{1, ..., p\}$. Si può dunque riscrivere, definendo $A^i_j = v_i w_j$,

$$w \wedge *v = \sum_i A^1_{[i_1} ... A^p_{i_p]} e_{k_1} \wedge ... \wedge e_{k_p} \wedge e_{j_1} \wedge ... \wedge e_{j_{n-p}} = \det(A) e_{k_1} \wedge ... \wedge e_{k_p} \wedge e_{j_1} \wedge ... \wedge e_{j_{n-p}}$$

e dunque

$$* (w \wedge *v) = \det(A) = \det(\langle v_i, w_j \rangle)$$

$\square$

Lemma 1.6. *Sia $v_1, ..., v_n$ una arbitraria base di V, allora risulta*

$$* (1) = \frac{1}{\sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle)}} v_1 \wedge ... \wedge v_n$$

Dimostrazione. Sia $e_1, ..., e_n$ una base orientata positivamente ortonormale di V. Allora risulta

$$v_1 \wedge ... \wedge v_n = v_1^{i_1} e_{i_1} \wedge ... \wedge v_n^{i_n} e_{i_n} = v_1^{[i_1} ... v_n^{i_n]} e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_n} =$$
$$\langle v_1, e_{i_1} \rangle ... \langle v_n, e_{i_n} \rangle \epsilon^{i_1 ... i_n} e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_n} = \det(\langle v_i, e_j \rangle) e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_n}$$

dunque

$$* (v_1 \wedge ... \wedge v_n) = \det(\langle v_i, e_j \rangle) * (e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_n}) = \det(\langle v_i, e_j \rangle$$

da cui segue utilizzando il Lemma 1.4

$$* (1) = \frac{1}{\det(\langle v_i, e_j \rangle)} v_1 \wedge ... \wedge v_n.$$

Ponendo $A_{ij} = \langle v_i, e_j \rangle$, da $v_i = A_{ij} e_j \qquad e_i = A^{-1}_{ij} v_j$, i ottiene

$$\det(\langle v_i, e_j \rangle) = \det(\langle v_i, A^{-1}_{jk} v_k \rangle) = \overset{-1}{\det}(A) \det(\langle v_i, v_k \rangle)$$

e dunque

$$\det(\langle v_i, e_j \rangle) = \sqrt{\det(\langle v_i, v_k \rangle)},$$

da cui segue la tesi □

Lemma 1.7.

$$\langle *v, *w \rangle = \langle v, w \rangle$$

Dimostrazione. Usando i Lemmi 1.4 1.5 si ottiene

$$\langle *v, *w \rangle = *(*v \wedge * * w) = (-1)^{p(n-p)} * (*v \wedge w) = *(w \wedge *v) = \langle v, w \rangle$$

□

Sia (M, g) una varietà Riemanniana di dimensione n orientata, si può definire una orientazione sugli spazi tangenti $T_{x \in M} M$ e dunque sui loro duali $T^*_x M$. La struttura Riemanniana di M definisce un prodotto scalare su $T^*_x M$ e ciò permette di definire l'azione dell'operatore $*$ di Hodge sulle k-forme su M. Ricordando quanto detto in precedenza si deduce che $* : \Lambda^p M \to \Lambda^{n-p} M$ è tale che

$$*(1) = \sqrt{\det(g_{ij})}\; dx_1 \wedge ... \wedge dx_n.$$

$*(1)$ è detta forma volume, in particolare risulta

$$Vol(M) = \int_M *(1).$$

Definizione 1.8 (prodotto L^2). Siano $\alpha, \beta \in \Lambda^p M$ due p-forme a supporto compatto su M si definisce il loro prodotto L^2

$$(\alpha, \beta) = \int_M \langle \alpha, \beta \rangle * (1) = \int_M \alpha \wedge *\beta$$

Si opera dunque la definizione di aggiunto formale come segue

Definizione 1.9 (aggiunto formale). Sia (M^n, g) una varietà Riemanniana orientata con forma volume dv e siano E, F due fibrati Hermitiani su M con strutture Hermitiane rispettivamente $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ ed $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$. Siano $P : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ e $Q : \Gamma(F) \to \Gamma(F)$ due operatori differenziali lineari. Q si dice aggiunto formale di P se

$$\int_M \langle P\alpha, \beta \rangle_E * (1) = \int_M \langle \alpha, Q\beta \rangle_F * (1),$$

per ogni coppia di sezioni a supporto compatto $\alpha \in C^\infty_0(E)$, $\beta \in C^\infty_0(F)$.

ove si è fatto uso di una relazione che discende da un precedente lemma

$$\langle \alpha, \beta \rangle * (1) = \alpha \wedge *\beta.$$

Prima di intraprendere lo studio delle equazioni di Maxwell è utile definire l'operatore aggiunto formale dell' operatore differenziale d e delinearne le principali proprietà

Definizione 1.10 (operatore d^*). Si definisce d^* l'operatore aggiunto formale di d su $\bigoplus_{p=0}^n \Lambda^p M$ rispetto al prodotto L^2, ovvero $\forall\ \alpha \in \Lambda^{p-1}_0 M$, $\beta \in \Lambda^p_0 M$

$$(d\alpha, \beta) = \int_M \langle d\alpha, \beta \rangle * (1) = \int_M \langle \alpha, d^*\beta \rangle * (1)$$

Dalla definizione è immediato dedurre che d^* manda p-forme in p-1-forme. Per definire l'operatore d^* in modo operativo si fa uso del seguente

Lemma 1.11.

$$d^* : \Lambda^p M \to \Lambda^{p-1} M$$

soddisfa

$$d^* = (-1)^{n(p+1)+1} * d*$$

Dimostrazione. Prese $\alpha \in \Lambda_0^{p-1} M$, $\beta \in \Lambda_0^p M$ arbitrarie risulta

$$\begin{aligned}
&d(\alpha \wedge *\beta) = d\alpha \wedge *\beta + (-1)^{p-1} \alpha \wedge d * \beta = \\
&d\alpha \wedge *\beta + (-1)^{p-1} \alpha \wedge (-1)^{(p-1)(n-p+1)} * * d * \beta = \\
&d\alpha \wedge *\beta - (-1)^{(p-1)(n-p)+1} \alpha \wedge * * d * \beta = \\
&\big(\langle d\alpha, \beta\rangle - (-1)^{(p-1)(n-p)+1} \langle \alpha, *d * \beta\rangle\big) * (1)
\end{aligned}$$

Integrando ed usando il teorema di Stokes si vede che il membro a sinistra dell'uguale è nullo, il membro a destra riproduce la tesi □

Definizione 1.12 (operatore di Laplace-Beltrami)**.** L'operatore di Laplace-Beltrami è definito da

$$\Delta = dd^* + d^*d : \Lambda^p M \to \Lambda^p M$$

Corollario 1.13. Δ *è formalmente autoaggiunto, ovvero*

$$(\Delta\alpha, \beta) = (\alpha, \Delta\beta) \text{ per } \alpha, \beta \in \Lambda^p M$$

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla definizione □

Definizione 1.14 (forma armonica)**.** Una p-forma $\omega \in \Lambda^p M$ si dice armonica se soddisfa

$$\Delta\omega = 0$$

Lemma 1.15.

$$(\Delta\alpha, \alpha) = 0$$

se e solo se

$$d\alpha = d^*\alpha = 0$$

Dimostrazione. Facendo uso delle definizioni

$$(\Delta\alpha, \alpha) = ((dd^* + d^*d)\alpha, \alpha) = (dd^*\alpha, \alpha) + (d^*d\alpha, \alpha) = (d^*\alpha, d^*\alpha) + (d\alpha, d\alpha)$$

da cui segue l'asserto. □

2 Equazioni di Maxwell e Forme Differenziali

Le equazioni di Maxwell sono un insieme di equazioni alle derivate parziali lineari accoppiate che descrivono classicamente il comportamento dei campo elettrico e del campo magnetico in presenza date una certa densità di corrente e distribuzione di carica. Uno degli aspetti più importanti di tali equazioni risiede nel fatto che unificano descrivono il campo elettrico ed il campo magnetico come due aspetti di una unica interazione, l'interazione elettromagnetica. Le equazioni di Maxwell, in $\mathbb{R}^3$, con $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ campo elettrico, $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ campo magnetico, nel vuoto (ovvero in assenza di densità di corrente e cariche) sono

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{2a}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{2b}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = \mathbf{0} \tag{2c}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = \mathbf{0}. \tag{2d}$$

Sebbene il loro significato dal punto di vista fisico sia immediatamente deducibile è solo con il linguaggio delle forme differenziali che si riesce ad apprezzarne appieno il contenuto matematico. Ci si pone in uno spaziotempo rappresentato da una varietà Riemanniana quadridimensionale (M, g) orientata (la richiesta di orientazione è connessa all'uso dell'operatore $*$ di Hodge). Considerando un sistema di coordinate (t, x, y, z) in una carta locale (U_α, ϕ_α) nell' intorno di un punto $x \in M$ è possibile definire una 2-forma $F_{\mu\nu} \in \Omega^2(M|_U)$ come

$$F = (E_x dx + E_y dy + E_z dz)dt + B_x dydz - B_y dxdz + B_z dxdy$$

$F_{\mu\nu}$ è detto tensore elettromagnetico. Si noti il primo cambio di prospettiva rispetto alle (2). Lo spaziotempo nella nuova formulazione che si accinge a discutere è quadridimensionale, il tempo diviene la quarta direzione. E' immediato verificare che le equazioni (2a) e (2d) possono essere espresse come

$$dF = 0. \tag{3}$$

Procedendo al calcolo esplicito si ottiene

$$\begin{aligned} dF = &\left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}\right) dxdydz + \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial B_z}{\partial t}\right) dxdydt + \\ &+ \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{\partial B_y}{\partial t}\right) dxdzdt + \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial t}\right) dydzdt = 0, \end{aligned}$$

che riproducono esattamente le (2a) e (2d). Il tensore metrico, come precisato nella precedente sezione induce un prodotto scale tra forme differenziali e permette di definire il prodotto interno come in precedenza. Dunque utilizzando l'operatore d^* ed il Lemma 1.11, che permette di scriverlo come $d^* = (-1)^{p(n+1)+1} * d* : \Omega^p(M) \to \Omega^p(M)$ si può calcolare d^*F. Nel caso considerato in particolare $d^* = - * d*$. Agendo con l' operatore $*$ di Hodge si ottiene

$$* F = E_x dzdy + E_y dxdz + E_z dydx + B_x dtdx + B_y dtdy + B_z dtdz,$$

Prima di continuare è utile soffermarsi ad analizzare quanto ottenuto; l'operatore $*$ di Hodge scambia i campi secondo lo schema

$$\begin{aligned} E_x &\longleftrightarrow -B_x \qquad & B_x &\longleftrightarrow -E_x \\ E_y &\longleftrightarrow -B_y \qquad & B_y &\longleftrightarrow -E_y \\ E_z &\longleftrightarrow -B_z \qquad & B_z &\longleftrightarrow -E_z, \end{aligned}$$

ciò riflette il fatto che il campo elettrico ed il campo magnetico sono due espressioni di uno stesso tipo interazione, l'interazione elettromagnetica. Procedendo nel calcolo si ottiene

$$\begin{aligned} d * F = &\left(\frac{\partial E_x}{\partial t} dt + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx\right) dzdy + \left(\frac{\partial E_y}{\partial t} dt + \frac{\partial E_y}{\partial y} dy\right) dxdz + \left(\frac{\partial E_z}{\partial t} dt + \frac{\partial E_z}{\partial z} dz\right) dydx + \\ &+ \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} dy + \frac{\partial B_x}{\partial z} dz\right) dtdx + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} dx + \frac{\partial B_y}{\partial z} dz\right) dtdy + \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} dx + \frac{\partial B_z}{\partial y} dy\right) dtdz, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * d * F = &\left(\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial E_x}{\partial t}\right) dx + \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial E_y}{\partial t}\right) dy + \\ &+ \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial E_z}{\partial t}\right) dz + \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) dt \end{aligned}$$

Tale equazione posta a zero riproduce esattamente le (2b) e (2c). Dunque le equazioni di Maxwell possono essere scritte come

$$dF = 0 \tag{4}$$
$$d^*F = 0 \tag{5}$$

Dal Lemma 1.14 si deduce dunque che F è una forma armonica e dunque le equazioni di Maxwell possono essere riscritte semplicemente come

$$\boxed{\Delta F = 0}. \tag{6}$$

Nel linguaggio delle forme differenziali le equazioni di Maxwell rappresentano la richiesta che la 2-forma F, opportunamente definita, sia armonica. Alla luce di ciò si possono considerare due questioni rilevanti:

- la possibilità di riprodurre quanto ottenuto in un formalismo Lagrangiano,
- le modalità con le quali il campo elettromagnetico si accoppia al campo gravitazionale, ovvero come F interagisce con g.

2.1 Formalismo Lagrangiano ed Equazioni di Maxwell

La prima delle due questioni poste alla fine della precedente sezione può essere trattata introducendo una 1-forma, $A_\mu \in \Lambda^1 M$ detta potenziale elettromagnetico o anche campo del fotone, tale che

$$F = dA.$$

Naturalmente nulla assicura che esista una tale 1-forma e la legittimità di una tale scrittura è in generale non banale da giustificare, tuttavia si assume, nel presente contesto, come un ansatz. Dalla precedente relazione per la proprietà dell'operatore differenziale d, $d^2 = 0$ si deduce (4) è automaticamente soddisfatta. Ci si può concentrare su (5) e si può tentare di costruire un'azione che la riproduca. Una scelta opportuna per l'azione è

$$S(F) = (F, F) = (dA, dA) = \int_M \langle dA, dA\rangle * (1) = \int_M dA \wedge *dA.$$

L'equazione (4), come osservato, è immediatamente verificata dall'ansatz, si verifica dunque che l'azione introdotta riproduca la (5). Variando $S(F)$ rispetto ad A e ponendo a zero risulta

$$\delta_A S(F) = (F, F) = 2(d\delta A, dA) = 2(\delta A, d^*dA) = 0,$$

da cui segue l'equazione

$$d^*dA = d^*F = 0.$$

Si è dunque verificato che la Lagrangiana definita e l' ansatz imposto riproducono esattamente le equazioni di Maxwell. Si noti inoltre che l'azione presenta una simmetria per traslazione rispetto a forme chiuse ovvero sia $f \in Z^1(M) = \ker(d)|_{\Lambda^0 M}$ risulta

$$S(A + f) = (dA + df, dA + df) = (dA, dA) = S(A).$$

Tale simmetria e detta *simmetria di gauge*; a diverse A corrisponde la stessa F. Sebbene il formalismo Lagrangiano permetta di ricondurre la derivazione delle equazioni di Maxwell ad un problema variazionale esso non mette in luce la il significato geometrico della due forma F e del funzionale azione. Per fare emergere tale significato e generalizzare quanto visto, nella prossima sezione, saranno considerate le teorie di Yang-Mills.

3 Teorie di Yang-Mills

Il formalismo Lagrangiano introdotto presenta alcuni interessanti aspetti comuni a diverse teorie fisiche che trovano corrispondenza in strutture geometriche. Quanto visto si pone nel quadro più generale delle teorie di Yang-Mills. Tali teorie sono largamente utilizzante in fisica nell' ambito dello studio delle interazioni fondamentali e la teoria dell'elettromagnetismo ne è un esempio. Innanzitutto si ricorda la definizione di connessione in un fibrato e di metrica del fibrato

Definizione 3.1 (connessione)**.** Sia (E, M, π) un fibrato vettoriale sulla varietà M, una connessione lineare o derivata covariante su E è un mappa

$$\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(E) \otimes \Gamma(T^*M)$$

con le proprietà seguenti; siano $Y, X \in T_xM$, $\sigma, \tau \in \Gamma(E)$ ed $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$

i ∇ è tensoriale in X, ovvero

$$\nabla_{X+Y}\sigma = \nabla_X\sigma + \nabla_Y\sigma \tag{7a}$$
$$\nabla_{fX}\sigma = f\nabla_X\sigma \tag{7b}$$

ii è $\mathbb{R}$-lineare in σ

$$\nabla_X(\sigma + \tau) = \nabla_X\sigma + \nabla_X\tau \tag{7c}$$

iii soddisfa la regola di Leibniz

$$\nabla_X f\sigma = X(f)\sigma + f\nabla_X\sigma \tag{7d}$$

Definizione 3.2 (metrica del fibrato)**.** Sia (E, π, M) un fibrato vettoriale si dice metrica del fibrato una famiglia di prodotti scalari definita sulle fibre $E_x$che dipendono in maniera liscia da $x \in M$

Sia M^d una varietà differenziabile ed $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato vettoriale su M di rango n, con U aperto coordinato di M^d contenente x e sia $\{\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\}_{\alpha=1,..,d}$, base locale di T_xM. Tramite l'identificazione $E|_U \cong U \times \mathbb{R}^n$ si può definire una base di $\Gamma(E|_U)$, $\{\mu_i\}_{i=1,..,n}$. Data ∇, connessione su E, si definisce il simbolo di Christoffel mediante

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_\alpha}}\mu_j = \Gamma^k_{\alpha j}\mu_k$$

ove $j, k = 1, ..., n \quad \alpha = 1, ..., d$. In generale, con $X \in T_xM$ e $\mu \in \Gamma(E), (\mu = a_j\mu_j)$, si ha l'espressione in coordinate locali,

$$\nabla_X\mu = X^\alpha\frac{\partial a_j}{\partial x_\alpha}\mu_j + X^\alpha a_j\Gamma^k_{\alpha j}\mu_k.$$

Si può dunque vedere $\Gamma^k_{\alpha j}$ come una matrice $n \times n$ negli indici k, j, ovvero

$$\Gamma^k_{\alpha j} \in \Gamma(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \otimes T^*M|_U). \tag{8}$$

La scrittura precedente, con la definizione del simbolo di Christoffel può essere generalizzata alla scrittura seguente

$$\nabla = d + A, \tag{9}$$

con

$$A \in \Gamma(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \otimes T^*M|_U). \tag{10}$$

A è una matrice $n \times n$ a valori 1-forme su $U \subset M$, quindi si può scrivere

$$A_\alpha\mu_i = A^k_{\alpha\ i}\mu_k$$

ove α è l'indice di forma in T^*M ed i, k sono indici sullo spazio delle sezioni. Ne segue per quanto detto

$$A^k_{\alpha\ i}\mu_k dx^\alpha = \Gamma^k_{\alpha\ i}\mu_k dx^\alpha. \tag{11}$$

Si può studiare come varia A rispetto ad un cambio di banalizzazione locale. Siano (U_a, ϕ_a) (U_b, ϕ_b) due aperti banalizzanti di E e sia

$$\phi_{ba} = \phi_b \circ \phi_a^{-1} : U_a \cap U_b \to Gl(n, \mathbb{R})$$

la funzione di transizione tra i due aperti banalizzanti del fibrato. Sia μ_a una sezione su U_a e sia $\mu_b = \phi_{ba}\mu_a$ su $U_a \cap U_b$, deve aversi

$$\phi_{ba}(d + A^a)\mu_a = (d + A^b)\mu_b \text{ su } U_a \cap U_b$$

ove l'apice su A denota la carta in cui è definito. Dalla richiesta precedente si deduce, utilizzando la proprietà di ciclo di ϕ_{ba},

$$\phi_{ba}(d + A^a)\mu_a = \phi_{ba}(d + A^b)\phi_{ab}\phi_{ba}\mu_a = \phi_{ba}(d + A^b)\phi_{ab}\mu_b =$$
$$(d + \phi_{ba}d\phi_{ab} + \phi_{ba}A^b\phi_{ab})\mu_b = (d + \phi_{ba}d\phi_{ba}^{-1} + \phi_{ba}A^b\phi_{ba}^{-1})\mu_b$$

e dunque

$$A^a = \phi_{ba}d\phi_{ba}^{-1} + \phi_{ba}A^b\phi_{ba}^{-1}.$$

Si vuole ora estendere ∇ ad altri fibrati costruiti a partire da E, in particolare al fibrato duale, E^* ed a End(E) = E $\otimes$ E*. Sia dunque E^* il fibrato duale di E; localmente, in un intorno U del punto $x \in M$ è possibile definire un base per $\Gamma(E^*|_U)$, $\{\mu_j^*\}$, a partire dalla base locale per le sezioni di E $\{\mu_i\}$ per dualità, secondo la relazione

$$\mu_j^*(\mu_i) = (\mu_j^*, \mu_i) = \delta_{ij}.$$

Definizione 3.3. Sia ∇ una connessione su E. La connessione duale ∇' sul fibrato E^* è definita dalla richiesta

$$d(\mu, \nu^*) = (\nabla\mu, \nu^*) + (\mu, \nabla'\nu^*) \qquad \forall\mu \in \Gamma(E), \nu \in \Gamma(E^*)$$

(Si noti che essendo $\nabla\mu \in \Gamma(E \otimes T^{*M})$ risulta che $(\nabla\mu, \nu^*)$ e $(\mu, \nabla'\nu^*)$ sono 1-forme). Utilizzando l'espansione locale (9) e calcolando l'espressione precedente sulle sezioni di base risulta

$$0 = d(\mu_i, \nu_j^*) = (A_i^k\mu_k, \nu_j^*) + (\mu_i, A_j'^k\nu_k^*) = A_i^j + A_j'^i = 0$$

da cui

$$A' = -A^t.$$

Analogamente si può definire

Definizione 3.4. Siano E_1 ed E_2 due fibrati vettoriali sulla varietà M con connessioni ∇_1 e ∇_2 rispettivamente allora la connessione ∇ indotta su $E := E_1 \otimes E_2$ è definita dalla richiesta

$$\nabla(\mu_1 \otimes \mu_2) = \nabla_1\mu_1 \otimes \mu_2 + \mu_1 \otimes \nabla_2\mu_2 \qquad \forall\mu_A \in \Gamma(E_A), A = 1, 2$$

Dalle 3.3 3.4 risulta immediato definire la connessione indotta su End(E) = E $\otimes$ E*. Sia $\sigma = \sigma_j^i\mu_i \otimes \mu_j^*$ una sezione di End(E), si ha

$$\nabla(\sigma_j^i\mu_i \otimes \mu_j^*) = d\sigma_j^i\mu_i \otimes \mu_j^* + \sigma_j^i(A_i^k\mu_k \otimes \mu_j^* - A_j^k\mu_i \otimes \mu_k^*) = (d + \mathrm{AdA})\sigma = \mathrm{d}\sigma + [\mathrm{A}, \sigma].$$

Segue immediatamente l'estensione della definizione della connessione a $\Gamma(E) \otimes \Omega^p(M)$ come, date $\mu \in \Gamma(E)$ ed $\omega \in \Omega^p(M)$

$$\nabla(\mu \otimes \omega) = \nabla\mu \wedge \omega + \mu \otimes \nabla\omega.$$

Si può associare ad una connessione il concetto di curvatura

Definizione 3.5 (curvatura). Si dice curvatura della connessione ∇ l'operatore

$$F = \nabla \circ \nabla : \Omega^0(E) \to \Omega^2(E).$$

La connessione si dice piatta se $F = 0$.

Dunque presa $\mu \in \Gamma(E)$ risulta

$$F(\mu) = (d + A) \circ (d + A)\mu = (d + A)(d\mu + A\mu) = (dA)\mu - Ad\mu + Ad\mu + A \wedge A\mu$$

da cui segue

$$F = dA + A \wedge A. \tag{12}$$

Tale espressione in coordinate locali diviene

$$F = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} + A_\mu A_\nu \right) dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} + [A_\mu, A_\nu] \right) dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{13}$$

Dalla definizione di Curvatura segue ricordando $F \in \Omega^2(E) \otimes \Omega^0(E)^*$

Teorema 3.6 (seconda Identità di Bianchi). *La curvatura F di una connessione ∇ soddisfa*

$$\nabla F = 0 \tag{14}$$

Dimostrazione. Seguendo lo sviluppo dato si può scrivere (è implicito $A = A_\mu dx^\mu$)

$$\nabla F = (d + A)(dA + A \wedge A) = dA \wedge A - A \wedge dA + [A, dA + A \wedge A] = [A, A \wedge A] =$$
$$(A_\rho A_\mu A_\nu - A_\mu A_\nu A_\rho) dx^\rho \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu = 0$$

□

L'espressione appena dimostrata si dice seconda identità di Bianchi. Prima di procedere oltre è utile capire come la definizione di curvatura data possa avere punti di contatto con tensore di curvatura di Riemann. Da (11), ponendo

$$\begin{aligned} F : \Omega^0(E) &\to \Omega^2(E) \\ \mu &\mapsto R(\cdot, \cdot)\mu \end{aligned}$$

e definendo

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) \mu_i = R^k_{i\mu\nu} \mu_k$$

risulta

$$R(\cdot, \cdot)\mu_i = R^k_{i\mu\nu}\mu_k = F\mu_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Gamma^k_{\mu\ i}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^k_{\nu i}}{\partial x^\mu} + \Gamma^m_{\mu i}\Gamma^k_{\nu m} - \Gamma^m_{\nu i}\Gamma^k_{\mu m} \right) dx^\mu \wedge dx^\nu \otimes \mu_k \tag{15}$$

da cui

$$R^k_{i\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Gamma^k_{\mu\ i}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^k_{\nu i}}{\partial x^\mu} + \Gamma^m_{\mu i}\Gamma^k_{\nu m} - \Gamma^m_{\nu i}\Gamma^k_{\mu m} \right).$$

Vale dunque il teorema

Teorema 3.7. *La curvatura R di una connessione ∇ soddisfa*

$$R(X, Y)\mu = \nabla_X \nabla_Y \mu - \nabla_Y \nabla_X \mu - \nabla_{[X,Y]}\mu$$

per ogni $X, Y \in TM$ e $\mu \in \Gamma(E)$.

Si può dunque introdurre un lemma che riveste una grande importanza in fisica poiché e la base della descrizione formale delle interazioni tra particelle,

Lemma 3.8. *Sia ∇ una connessione metrica sul fibrato vettoriale E dotato di metrica del fibrato $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Si assuma che rispetto ad una carta locale del fibrato si possa scrivere*

$$\nabla = d + A.$$

Allora $\forall X \in TM$, la matrice $A(X)$ è antisimmetrica, ovvero

$$A(X) \in \mathfrak{o}(n) \text{ con } n \text{ rango del fibrato.}$$

Dimostrazione. Si consideri un aperto di banalizzazione del fibrato U e sia $\{\mu_i\}$ una base ortonormale di sezioni della fibra E_x con $x \in U$, poiché le μ_i sono costanti nella carta scelta risulta

$$d\mu_i = 0$$

Sia dunque $X \in T_xM$ segue dal fatto che la connessione è metrica

$$\begin{aligned}&\nabla_X\langle\mu_i,\mu_j\rangle = 0 = \langle\nabla_X\mu_i,\mu_j\rangle + \langle\mu_i,\nabla_X\mu_j\rangle - X\langle\mu_i,\mu_j\rangle = \langle\nabla_X\mu_i,\mu_j\rangle + \langle\mu_i,\nabla_X\mu_j\rangle = \\ &A(X)^j_i + A(X)^i_j = 0\end{aligned}$$

□

Si indica con $\Omega^p(\mathrm{AdE})$ lo spazio degli elementi di $\Omega^p(\mathrm{EndE})$ per cui l' endomorfismo di ogni fibra è antisimmetrico. Si può definire la connessione ∇^* procedendo in maniera analoga a quanto visto per d e d^*. Si definisce l'operatore $\nabla^* : \Omega^p(\mathrm{AdE}) \to \Omega^{p-1}(\mathrm{AdE})$ come l'aggiunto formale di ∇,

$$(\nabla^*\nu,\mu) = (\nu,\nabla\mu) \qquad \forall\mu \in \Omega^{p-1}(\mathrm{AdE}), \nu \in \Omega^p(\mathrm{AdE})$$

e si ottiene

$$(\nu, d\mu + A_\mu dx^\mu \wedge \mu) = (d^*\nu,\mu) - (A_\mu\nu, dx^\mu \wedge \mu)$$

ove si è usata l' antisimmetria di A. Per comprendere l'azione di A nel secondo membro a destra dell' uguale è utile considerare il seguente lemma

Lemma 3.9. *Siano $\omega \in \Omega^p(M)$, $\eta \in \Omega^{p-1}(M)$ ed $A \in \Omega^1(M)$ allora vale*

$$\langle A_\mu\omega, dx^\mu \wedge \eta\rangle = \langle A^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\omega, \eta\rangle$$

Dimostrazione. Senza perdere di generalità si può porre

$$\begin{aligned}\omega &= dx^{\alpha_0} \wedge ...dx^{\alpha_p}\\ \eta &= dx^{\beta_1} \wedge ...dx^{\beta_p}\end{aligned}$$

da cui si vede

$$\begin{aligned}&\langle A_\mu\omega, dx^\mu \wedge \eta\rangle = \langle A_\mu dx^{\alpha_0} \wedge ...dx^{\alpha_p}, dx^\mu \wedge dx^{\beta_1} \wedge ...dx^{\beta_p}\rangle = \\ &\det\begin{pmatrix} A^{\alpha_0} & g^{\alpha_0\beta_1} & \cdots & g^{\alpha_0\beta_p} \\ A^{\alpha_1} & g^{\alpha_1\beta_1} & \cdots & g^{\alpha_1\beta_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^{\alpha_p} & g^{\alpha_p\beta_1} & \cdots & g^{\alpha_p\beta_p}\end{pmatrix} = \sum_k (-1)^k A^{\alpha_k} \det\begin{pmatrix} g^{\alpha_{i_1}\beta_1} & \cdots & g^{\alpha_{i_1}\beta_p} \\ \vdots & & \vdots \\ g^{\alpha_{i_p}\beta_1} & \cdots & g^{\alpha_{i_p}\beta_p}\end{pmatrix}_{i_1,\dots,i_p\neq k} = \\ &\sum_k (-1)^k A^{\alpha_k}\langle dx^{\alpha_{i_1}} \wedge ...dx^{\alpha_{i_p}}, dx^{\beta_1} \wedge ...dx^{\beta_p}\rangle_{i_1,\dots,i_p\neq k} = \\ &\langle A^{\alpha_k}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha_k}}(dx^{\alpha_0} \wedge ...dx^{\alpha_p}), dx^{\beta_1} \wedge ...dx^{\beta_p}\rangle = \\ &\langle A^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\omega, \eta\rangle\end{aligned}$$

□

Da lemma appena enunciato segue immediatamente che

$$(\nu, d\mu + A_\mu dx^\mu \wedge \mu) = (d^* \nu, \mu) - (A_\mu \frac{\partial}{\partial_\mu} \nu, \mu)$$

da cui si deduce

$$\nabla^* = (-1)^{d(p+1)+1} * \nabla * . \tag{16}$$

Con quanto definito è possibile introdurre il funzionale di Yang-Mills

Definizione 3.10 (funzionale di Yang-Mills). Sia M una varietà Riemanniana compatta orientata, E un fibrato vettoriale con una metrica di fibrato su M, sia inoltre ∇ una connessione metrica su E con curvatura $F \in \Omega^2(\mathrm{AdE})$. Si definisce il funzionale di Yang-Mills applicato a ∇

$$YM(\nabla) := (F_\nabla, F_\nabla) = \int_M \langle F_\nabla, F_\nabla \rangle * (1).$$

Si noti che spesso, sopratutto in testi di fisica si trova scritto $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ piuttosto che $\langle F, F \rangle$, è immediato dimostrare che le due espressioni sono equivalenti,

$$\langle F, F \rangle = \langle F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, F_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta \rangle = F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \langle dx^\mu \wedge dx^\nu, dx^\alpha \wedge dx^\beta \rangle =$$
$$F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \det \begin{pmatrix} g^{\mu\alpha} & g^{\mu\beta} \\ g^{\nu\alpha} & g^{\nu\beta} \end{pmatrix} = F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha}) = 2F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

ove si è posto

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}.$$

Si possono ora definire le equazioni di Eulero-Lagrange per il funzionale di Yang-Mills considerando la variazione

$$\nabla + tB \qquad B \in \Omega^1(\mathrm{AdE}).$$

Presa $\sigma \in \Omega^0(E)$ risulta

$$F_{\nabla + tB} \sigma = (\nabla + tB)(\nabla + tB)\sigma = \nabla^2 + t\nabla(B\sigma) + tB \wedge \nabla \sigma + t^2 b \wedge B = (F_\nabla + t(\nabla B) + t^2 B \wedge B)\sigma$$

dunque

$$\left.\frac{dYM}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt} \int_M \langle F_{\nabla+tB}, F_{\nabla+tB} \rangle * (1)\right|_{t=0} = 2 \int_M \langle \nabla B, F_\nabla \rangle * (1)$$

da cui si ottiene l'equazione

$$\nabla^* F = 0. \tag{17}$$

Definizione 3.11 (connessione di Yang-Mills). Una connessione ∇ su un fibrato vettoriale E con una ,metrica di fibrato su una varietà Riemanniana orientata M è detta di Yang-Mills se soddisfa

$$\nabla^* F = 0. \tag{18}$$

Con E fibrato vettoriale su M si indica con Aut(E) il fibrato con fibra su $x \in M$ data dal gruppo delle trasformazioni ortogonali della fibra E_x in se.

Definizione 3.12 (trasformazione di gauge). Una trasformazione di gauge è una sezione di Aut(E). Il gruppo $\mathcal{G}$ di trasformazione di gauge è detto gruppo di gauge del fibrato metrico E.

In particolare, presa $s \in \mathcal{G}$, risulta

$$s^*(\nabla) = s^{-1} \circ \nabla \circ s$$

da cui si ha

$$s^*(A) = s^{-1}ds + s^{-1}As.$$

Dunque si può usare la notazione

$$A_s = s^{-1}ds + s^{-1}As.$$

e ricavare come trasforma la curvatura da

$$\begin{aligned}
&F_s = dA_s + A_s \wedge A_s = d(s^{-1}ds + s^{-1}As) + (s^{-1}ds + s^{-1}As) \wedge (s^{-1}ds + s^{-1}As) = \\
&ds^{-1} \wedge ds + ds^{-1} \wedge As - s^{-1}A \wedge ds + s^{-1}dAs + s^{-1}ds \wedge s^{-1}ds + s^{-1}As \wedge s^{-1}As
\end{aligned}$$

usando $d(s^{-1}s) = ds^{-1}s + s^{-1}ds = 0$ si riscrive

$$\begin{aligned}
&F_s = s^{-1}(dA + A \wedge A)s + ds^{-1} \wedge ds + ds^{-1} \wedge As - s^{-1}A \wedge ds + s^{-1}ds \wedge s^{-1}ds = \\
&s^{-1}Fs + ds^{-1} \wedge ds + ds^{-1}s \wedge s^{-1}As - s^{-1}As \wedge s^{-1}ds - ds^{-1} \wedge ds = \\
&s^{-1}Fs + ds^{-1} \wedge ds + ds^{-1}s \wedge s^{-1}As - s^{-1}As \wedge s^{-1}ds = \\
&s^{-1}Fs + ds^{-1} \wedge ds + d(s^{-1}s) \wedge s^{-1}As = \\
&s^{-1}Fs
\end{aligned}$$

Dunque La curvatura sotto trasformazioni di gauge trasforma come

$$F_s = s^{-1}Fs.$$

Dunque il funzionale di Yang-Mills è invariante per trasformazioni di gauge essendo per definizione s una trasformazione ortogonale; si può enunciare tale risultato come

Teorema 3.13. *Il funzionale di Yang-Mills è invariante per trasformazioni di gauge.*

Con il formalismo introdotto è utile ora studiare un semplice esempio. I gruppi $\mathfrak{o}(n)$ con $n > 2$ sono non Abeliani; si considera $n = 2$ per il quale $\mathfrak{o}(2) \simeq \mathfrak{u}(1)$ è Abeliano. In tal caso la matrice A appartiene ad un' algebra Abeliana e dunque l'espressione della curvatura (12) diviene semplicemente

$$F = dA,$$

la seconda identità di Bianchi assume la forma

$$dF = 0$$

e l'equazione di Yang-Mills è

$$d^*F = 0.$$

Inoltre le trasformazioni di gauge sono, ponendo $s = e^u$,

$$s^*(A) = du + A.$$

Si può notare dunque che il funzionale di Yang-Mills nel caso $\mathfrak{u}(1)$ riproduce esattamente l' azione che si era precedentemente definita. Le equazioni di Maxwell in questo contesto sono rappresentate dalla seconda identità di Bianchi e dalla condizione di Yang-Mills. E' in questo quadro che le equazioni di Maxwell cessano di essere semplici equazioni fenomenologiche ma si combinano ad una forte caratterizzazione geometrica. Si noti che il fatto che la teoria elettromagnetica sia riprodotta per un fibrato con endomorfismi delle fibre in $\mathfrak{u}(1)$ è strettamente connesso con la natura stessa dell' interazione elettromagnetica. In fisica ed in particolare in fisica delle particelle elementari le teorie di Yang-Mills ricorrono nella descrizione delle interazioni e rappresentano uno degli elementi fondanti del Modello Standard, il modello che descrive le interazioni elettromagnetiche, deboli e forti. Queste ultime due, sono infatti descritte in maniera analoga, con fibrati differenti, associati ad $\mathfrak{su}(2)$ ed $\mathfrak{su}(3)$ rispettivamente. Si noti tuttavia che l'equazione scritta $F = dA$ in generale non significa che F è coomologa a zero poiché essa dipende dalla decomposizione locale $\nabla = d + A$. Tuttavia il 3.6 ci dice che F è chiusa, dunque si ha che F è armonica se e solo se è la curvatura associata ad una connessione di Yang-Mills. Nella seguente sezione si daranno alcuni cenni circa la possibilità di definire F come forma esatta.

4 Elettromagnetismo e Gravità ($F_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$)

Fino ad ora la struttura metrica della varietà M che ha fatto da sfondo a quanto visto non è entrata in maniera esplicita nella caratterizzazione delle equazioni di Maxwell. Dal punto di vista fisico la metrica descrive l'azione del campo gravitazionale, nel quale è immerso lo stesso campo elettromagnetico e dunque è lecito chiedersi come interagiscano. La risposta a tale problema è non banale e necessita di costruzioni piuttosto complesse, dunque nel seguito verranno fatte alcune considerazioni senza dimostrazione. Il punto di partenza è costituito dal problema a cui si accennava precedentemente, ci si chiede se è possibile scrivere

$$F = dA.$$

anche quando F non è coomologa a zero (si noti che con A ora si intende la generica 1-forma su M, $A \in \Omega^1(M)$, che non è necessariamente legata alla decomposizione locale di ∇). Per dare significato a tale scrittura può costruirsi il fibrato cerchio $P \xrightarrow{\pi} M$ sulla varietà Riemanniana 4-dimensionale M. Dunque $\forall p \in M$ esiste un intorno U_α ed un diffeomorfismo ϕ_α tali che $\pi^{-1}(U)$ sia diffeomorfo ad $U \times S^1$ in maniera tale che π letta su $U_\alpha \times S^1$ sia la proiezione al primo fattore, ovvero che il seguente diagramma commuti (π_1 è la proiezione al primo fattore)

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\phi_\alpha"] \arrow[d, "\pi"] & U_\alpha \times S^1 \arrow[dl, "\pi_1"] \\ U_\alpha & \end{tikzcd}$$

Si può dimostrare che π^*F è coomologa a zero e dunque la relazione $F = dA$ diviene legittima se posta nella forma

$$\pi^*F = dA.$$

Per ricondurre A alla varietà M è necessaria una sezione del fibrato, ovvero una mappa C^∞, $s : M \to P$ tale che $\pi \circ s = 1_M$. Definita tale sezione si ottiene

$$ds^*A = s^*dA = s^*\pi^*F = F$$

ove si è usato il fatto che l'operatore differenziale d commuta con il pullback. Dunque s^*A è la 1-forma richiesta su M. In aggiunta per limitare l' ambiguità nella definizione di A si può stipulare che A sia invariante sotto l'azione di S^1 su P.
Le informazioni racchiuse in un A del tipo sopra definito possono essere codificate come segue. Sia scelta una metrica su S^1, con S^1 di lunghezza Λ, e sia tale metrica invariante rispetto all' azione di S^1 su P. Sia g una metrica fissata su M. Si consideri l'insieme delle metriche $\tilde{g}$ S^1-invarianti su P tali che

1. $\tilde{g}$ coincide con la metrica scelta su ogni orbita S^1 di un punto in P, ovvero sulle fibre di π
2. $\tilde{g}$ ristretta al complemento g-ortonormale di una fibra su un punto $p \in P$ è isomorfa a g in $\pi(p) \in M$

In maniera equivalente introducendo le definizioni seguenti,

Definizione 4.1 (sottofibrato). Sia (E, π, M) un fibrato vettoriale di rango n Sia $F \subset E$ e si supponga che per ogni $x \in M$ eista una carta del fibrato (U_α, ϕ_α) con $x \in U_\alpha$ e

$$\phi_\alpha(\pi^{-1}(U_\alpha) \cap F) = U_\alpha \times \mathbb{R}^m (\subset U_\alpha \times \mathbb{R}^n, m \leqslant n).$$

Il fibrato vettoriale risultante $(F, \pi|_F, M)$ è detto sottofibrato di E di rango m.

Definizione 4.2 (fibrato verticale). Sia $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato vettoriale e sia $p \in E$ con $\pi(p) = x \in M$. Lo spazio verticale V_pE in p è lo spazio tangente in p alla fibra E_x, $V_pE = T(E_{\pi(p)})$. Lo spazio verticale V_pE è dunque un sottospazio di T_pE. L' unione degli spazi verticali, $VE = \bigcup_p V_pE$ definisce un sottofibrato di TE detto fibrato verticale.

(ovvero il fibrato vettoriale verticale VE è il sottofibrato del fibrato tangente che consiste nei vettori tangenti le fibre)

Definizione 4.3 (fibrato orizzontale). Sia $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato vettoriale e sia $p \in E$ con $\pi(p) = x \in M$. Lo spazio orizzontale H_pE in p è lo spazio complementare allo spazio tangente in p alla fibra E_x, $H_pE = (V_pE)^c$. L' unione degli spazi orizzontali, $HE = \bigcup_p H_pE$ definisce un sottofibrato di TE detto fibrato orizzontale.

si può rienunciare quanto detto precedentemente come

Il potenziale elettromagnetico A è completamente determinato dal sottospazio orizzontale $H_A(p) \in T_pP$ dello spazio tangente in p a P su cui A si annulla.

Esplicitamente ciò significa che si richiede che la metrica su M non dipenda dalla quinta dimensione, S^1. Dunque si costruisce la Lagrangiana di Hilbert-Einstein su P come

$$S(\tilde{g}) = \int_P R(\tilde{g}) * (1).$$

ove R e lo scalare di Ricci. Esprimendo $R(\tilde{g})$ in funzione di g si ha

$$R(\tilde{(}g)) = \pi^* \left(R(g) - \frac{\Lambda^2}{2} \langle F, F \rangle \right). \tag{19}$$

Si ottiene

$$S(\tilde{g}) = \int_P \pi^* \left(R(g) - \frac{\Lambda^2}{2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) * (1) \tag{20}$$

da cui, usando il teorema di Fubini, si ottiene

$$S(\tilde{g}) = \int_M \left(R(g) - \frac{\Lambda^2}{2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) * (1).$$

Operando le variazioni rispetto ad A ed alla metrica si trovano le equazioni

$$dF = 0 \tag{21}$$

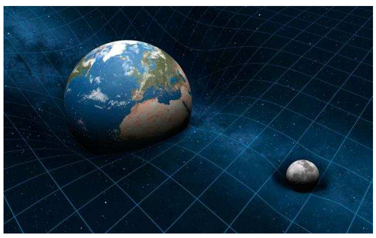
$$d^*F = 0 \tag{22}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{1}{\Lambda^2} T_{\mu\nu}, \tag{23}$$

ove

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha} F^{\nu\beta} g^{\alpha\beta} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}.$$

Dalla costruzione fatta si è ricavato un formalismo Lagrangiano che riproduce le equazioni di Maxwell più una ulteriore equazione,(23), detta equazione di Einstein. Tale equazione è l'equazione, propria della teoria della Relatività Generale, che descrive l'interazione tra la struttura metrica della varietà ed il campo elettromagnetico. E' interessante notare che la presenza del campo elettromagnetico, in quanto energia, produce una deformazione nella metrica della varietà di base M. Per visualizzare ciò, può pensarsi all'orbita della Luna intorno



alla Terra; la Terra deforma lo spaziotempo inducendo una metrica tale che la Luna si muova lungo una geodetica. Un altro spunto interessante è fornito dal fatto che in partenza la teoria iniziale viveva in dimensione 5, mentre lo spaziotempo ha dimensione 4. Il processo compiuto nel ridursi alla varietà M dal fibrato cerchio è detto compattificazione di Kaluza Klein ed è comune anche ad altre teorie fisiche, come ad esempio la teoria delle stringhe. Inoltre lo stretto legame tra le equazioni di Maxwell e la struttura metrica del fibrato ambiente emerge anche dall' accoppiamento dell' ultimo termine nell' equazione di Einstein, dato dalla lunghezza quadra inversa di S^1. Si è visto come le equazioni di Maxwell, che hanno apparentemente una semplice struttura matematica, se enunciate nel linguaggio delle forme differenziali, si rivestono di un significato geometrico profondo. Questo è solo un esempio delle numerose interazioni tra fisica e matematica; costruzioni formali ed astratte in matematica possono, non solo, trovare una naturale applicazione in fisica, ma anche fornire un importante strumento di comprensione e confutazione di teorie fisiche.

Riferimenti bibliografici

[Bot85] Raoul Bott, *On some recent interactions between mathematics and physics*, Canad.Math.Bull **Vol. 28 (2)** (1985).

[Car00] Manfredo P. Do Carmo, *Differential Forms and Applications (Universitext)*, 1st ed. 1994. corr. 2nd printing 1998 ed., Springer, 12 2000.

[Jos11] Jürgen Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis (Universitext)*, 6th ed. 2011 ed., Springer, 8 2011.

[Mor01] Shigeyuki Morita, *Geometry of Differential Forms (Translations of Mathematical Monographs, Vol. 201)*, American Mathematical Society, 8 2001.

[Mor07] Andrei Moroianu, *Lectures on Kähler Geometry (London Mathematical Society Student Texts)*, Cambridge University Press, 5 2007.