Seminario a cura di:
Lorenzo De Biase, Leonardo Alese, Francesca Carocci, Enrico Fatighenti

Operatori naturali su varietà Kähleriane

Anno Accademico 2012-2013
Corso di Geometria Superiore, Prof.re Paolo Piccinni.

In questo seminario svilupperemo il linguaggio degli operatori differenziali lineari per fibrati hermitiani: nella prima parte daremo le prime definizioni e studieremo in generale le proprietà di aggiunzione formale; nella seconda introdurremo l'operatore $*$ di Hodge, ne studieremo le proprietà e calcoleremo l' aggiunto formale di operatori differenziali classici ; nella terza introdurremo l'operatore di Lefschetz e studieremo la decomposizione primitiva dello spazio delle k-forme; nella quarta ci caleremo nel contesto delle varietà di Kähler dove valgono alcune notevoli identità di commutazione tra operatori che sono centrali nello sviluppo della teoria di Hodge.

Capitolo 1

Operatori differenziali lineari e loro aggiunti formali

A cura di Lorenzo De Biase

Sia la coppia (M, g) una varietà riemanniana ($dim_{\mathbb{C}} M = n$) e siano $E \to M$, $F \to M$ due fibrati vettoriali di rango rispettivamente r e s.

Definizione 1.0.1. *Un operatore differenziale lineare di grado t è un operatore $\mathbb{C}$-lineare $P : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(F)$ della forma*

$$P(u)(x) = \sum_{|\alpha| \leq t} A_\alpha(x) D^\alpha(u)(x) \tag{1.1}$$

per ogni aperto $\Omega \subset M$ banalizzante per entrambi i fibrati ($E_{|\Omega} \simeq \Omega \times \mathbb{K}^r$, $F_{|\Omega} \simeq \Omega \times \mathbb{K}^s$) con coordinate locali per M $(x_1, \ldots, x_n)$ e dove $A_\alpha(x)$ sono applicazioni lineari tra E_x e F_x che variano in maniera C^∞ al variare delle fibre.
Inoltre $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, mentre $D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$.

Esempio 1.0.1. *Nel caso in cui il grado sia uguale a zero, localmente un operatore differenziale è semplicemente un insieme di applicazioni lineari dalle fibre di E alle fibre di F; possiamo rappresentarle tramite matrici $s \times r$ i cui coefficienti variano in maniera C^∞ al variare dei punti della varietà.*

Esempio 1.0.2. *Sia $dim_{\mathbb{C}} M = 2$ e siano $E = \Lambda^1 T^* M$, $F = \Lambda^2 T^* M$.*
Localmente una sezione $\omega \in \Gamma(E)$ si potrà scrivere nella forma $\omega = f_1(x)dx_1 + f_2(x)dx_2$ e la sua immagine tramite un operatore differenziale di grado 2 sarà

$$P(\omega)(x) = A_0(x) \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} + A_{(1,0)}(x) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} \end{pmatrix} + A_{(0,1)}(x) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Se prendiamo $A_0 = (0,0)$, $A_{(1,0)} = (1,0)$ *e* $A_{(0,1)} = (0,-1)$ *abbiamo che*

$$P(\omega)(x) = \left(\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2$$

che è il differenziale esterno di De Rham.

Osservazione 1.0.2. *Siano* E, F *come sopra e sia* $G \to M$ *un altro fibrato vettoriale. Sia* $P : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ *un operatore differenziale lineare di grado* t_P*:*

- *Se* $Q : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ *è un operatore differenziale lineare di grado* t_Q*, allora lo è anche* $P + Q$ *e il suo grado è* $t_{P+Q} = max\{t_P, t_Q\}$*.*
- *Se* $Q : \Gamma(F) \to \Gamma(G)$ *è un operatore differenziale lineare di grado* t_Q*, allora lo è anche* $Q \circ P$ *e il grado è* $t_{Q \circ P} = t_P + t_Q$*.*

Allora l'insieme degli operatori differenziali lineari è chiuso rispetto all'operazione di bracket ($[P,Q] = P \circ Q - Q \circ P$*).*

Supponiamo da ora in poi che (M, g) sia orientata e la dotiamo la forma di volume $dv = \gamma(x)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ con γ funzione C^∞. Inoltre supponiamo che i fibrati E F siano hermitiani con prodotti che inicheremo $\langle \bullet, \bullet \rangle_E$ $\langle \bullet, \bullet \rangle_F$.

Consideriamo lo spazio di Hilbert delle sezioni globali L^2 di E

$$L^2(E) = \left\{ u \in \Gamma(E) : \int_M \|u(x)\|_E \, dv < +\infty \right\} \tag{1.2}$$

su tale spazio possiamo definire il seguente prodotto hermitiano per ogni $u, v \in L^2(E)$

$$\langle\langle u, v \rangle\rangle_E = \int_M \langle u(x), v(x) \rangle_E dv. \tag{1.3}$$

Siamo interessati ad un particolare sottospazio denso di $L^2(E)$, ovvero le sezioni a supporto compatto che indicheremo con il simbolo $\Gamma_0(E)$.

Abbiamo quindi operatori lineari tra spazi dotati di un prodotto hermitiano, è quindi abbastanza naturale definire la nozione di aggiunto di un operatore.

Definizione 1.0.3. *Siano* $P : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ *e* $Q : \Gamma(F) \to \Gamma(E)$ *operatori differenziali lineari tra i fibrati hermitiani* E *e* F*.*
L'operatore Q *è detto* aggiunto formale *di* P *se*

$$\langle\langle P(u), v \rangle\rangle_F = \langle\langle u, Q(v) \rangle\rangle_E \qquad \forall u \in \Gamma_0(E),\ \forall v \in \Gamma_0(F) \tag{1.4}$$

o equivalentemente

$$\int_M \langle P(u)(x), v(x)\rangle_F dv = \int_M \langle u(x), Q(v)(x)\rangle_E dv \quad \forall u \in \Gamma_0(E),\ \forall v \in \Gamma_0(F)$$

Teorema 1.0.4. *Per ogni operatore differenziale lineare $P : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ esiste ed è unico il suo aggiunto formale.*

Dimostrazione. Dimostriamo prima l'unicità e poi l'esistenza:

- Unicità:
  Supponiamo per assurdo che Q e Q' siano due aggiunti formali distinti di P.
  Consideriamo l'operatore $R = Q - Q'$; dal momento che sia Q che Q' sono aggiunti formali di P si dovrà avere che per ogni coppia di sezioni a supporto compatto

  $$\langle\langle u, Q(v)\rangle\rangle_E - \langle\langle u, Q'(v)\rangle\rangle_E = \langle\langle P(u), v\rangle\rangle_F - \langle\langle P(u), v\rangle\rangle_F = 0 \tag{1.5}$$

  per cui

  $$\int_M \langle u(x), R(v)(x)\rangle_E dv = 0 \quad \forall u \in \Gamma_0(E),\ \forall v \in \Gamma_0(F) \tag{1.6}$$

  Ma Q e Q' sono due operatori distinti, deve quindi esistere una sezione $\sigma \in \Gamma(F)$ la cui immagine tramite i due operatori sia diversa; questo si traduce nel fatto che esiste un punto $x \in M$ per cui $Q(\sigma)(x) \neq Q'(\sigma)(x)$, cioè $R(\sigma)(x) \neq 0$.
  Consideriamo un intorno U di x e un compatto K che lo contiene e prendiamo una funzione a bernoccolo ρ di classe C^∞ tale che

  $$\rho(x) = \begin{cases} 1 & x \in U \\ 0 & x \notin K \end{cases}$$

  Gli operatori differenziali, coinvolgendo nella loro definizione la nozione di derivazione (e quindi di limite) hanno una dipendenza esclusivamente locale: questo significa che i valori in un punto $x \in M$ delle immagini tramite un operatore differenziale di due sezioni che coincidono in almeno un intorno di x devono coincidere; in altre parole il valore di $R(\sigma)$ in x dipende esclusivamente del valore del germe[1] di σ in x.
  Quindi $R(\rho\sigma)(x) \neq 0$.
  Ma ora sia $\rho\sigma$ che $R(\rho\sigma)$ sono sezioni a supporto compatto; se quindi chiamiamo $u = R(\rho\sigma)$ e $v = \rho\sigma$ abbiamo che

  $$0 = \int_M \langle u(x), R(v)(x)\rangle_E dv = \int_M \|R(\rho\sigma)(x)\|_E^2 dv \neq 0 \qquad \textit{assurdo.}$$

[1] Ricordiamo la definizione di germe di una funzione.
Definiamo una relazione di equivalenza nell'insieme delle funzioni: f si equivalente a g in x se esiste un intorno aperto U di x su cui coincidono; le singole classi di equivalenza si dicono germi di funzioni nel punto x

- Esistenza:
  Dal momento che abbiamo dimostrato l'unicità dell'aggiunto formale, ci basta dimostrarne l'esistenza locale: con un facile argomento di partizioni dell'unità se ne deduce l'esistenza globale.
  Sia
  $$P(u)(x) = \sum_{|\alpha|\leq t} A_\alpha(x) D^\alpha(u)(x)$$
  l'espansione di P rispetto a banalizzazioni locali di E e F date da basi locali ortonormali su qualche aperto coordinato $\Omega \subset M$.
  Supponiamo che $Supp(u) \cap Supp(v) \subset\subset \Omega$.
  Vale
  $$\langle\langle P(u), v\rangle\rangle_F = \int_\Omega \langle P(u)(x), v(x)\rangle_F \; dv =$$
  $$= \int_\Omega \langle \sum_{|\alpha|\leq t} A_\alpha(x) D^\alpha(u)(x), v(x)\rangle_F \; \gamma(x) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n =$$
  utilizzando la notazione matriciale
  $$= \int_\Omega \sum_{\substack{|\alpha|\leq t \\ \lambda,\mu}} A_\alpha^{\lambda,\mu}(x) D^\alpha(u_\mu)(x), \overline{v_\lambda(x)} \gamma(x) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n =$$
  integrando per parti e ricordandoci che u e v sul bordo di Ω sono nulle
  $$= \int_\Omega \sum_{\substack{|\alpha|\leq t \\ \lambda,\mu}} (-1)^{|\alpha|} u_\mu(x) D^\alpha(\gamma(x) A_\alpha^{\lambda,\mu}(x) \overline{v_\lambda(x)}) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n =$$
  ricordandoci che $\gamma(x)$ assume valori reali
  $$= \int_\Omega \sum_{\substack{|\alpha|\leq t \\ \lambda,\mu}} (-1)^{|\alpha|} u_\mu(x) \overline{D^\alpha(\gamma(x) \overline{A_\alpha^{\lambda,\mu}(x)} v_\lambda(x))} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n =$$
  indicando con A_α^T la trasposta di A_α
  $$= \int_\Omega \langle u(x), \sum_{|\alpha|\leq t} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(\gamma(x) \overline{A_\alpha^T(x)} v(x)\rangle_E \; dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n =$$
  $$= \int_\Omega \langle u(x), \sum_{|\alpha|\leq t} (-1)^{|\alpha|} \gamma^{-1}(x) D^\alpha(\gamma(x) \overline{A_\alpha^T(x)} v(x)\rangle_E \; dv$$
  Per cui l'aggiunto di P è
  $$Q(v)(x) = \sum_{|\alpha|\leq t} (-1)^{|\alpha|} \gamma^{-1}(x) D^\alpha(\gamma(x) \overline{A_\alpha^T(x)} v(x))$$

□

Denoteremo con P^* l'aggiunto formale di P e diremo che un operatore differenziale lineare è autoaggiunto se $P^* = P$.

Osservazione 1.0.5. *Dall'unicità dell'aggiunto formale segue che P è l'aggiunto formale di P^* e che $(P \circ Q)^* = Q^* \circ P^*$.*
Infatti se $P : \Gamma(F) \to \Gamma(G)$ e $Q : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ allora

$$\langle\langle u, (P \circ Q)^*(v)\rangle\rangle_E = \langle\langle (P \circ Q)(u), v\rangle\rangle_G = \langle\langle Q(u), P^*(v)\rangle\rangle_F = \langle\langle u, (Q^* \circ P^*)(v)\rangle\rangle_E$$

Concludiamo questa sezione con un'utile caratterizzazione dell'aggiunto formale

Lemma 1.0.6. *Siano $P : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ e $Q : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ operatori differenziali lineari. Se esiste una sezione $\omega \in \Gamma(E * \otimes F^* \otimes \Lambda^{n-1} T^*M)$ tale che*

$$(\langle P(u), v\rangle_F - \langle u, Q(v)\rangle_E)\, dv = d(\omega(u, v)) \quad \forall u \in \Gamma(E),\ \forall v \in \Gamma(F) \tag{1.7}$$

allora Q è l'aggiunto formale di P.

Dimostrazione. Per ogni $u \in \Gamma_0(E)$ e per ogni $v \in \Gamma_0(F)$, la (n-1)-forma $\omega(u, v)$ è a supporto compatto.
Allora

$$\int_M (\langle P(u), v\rangle_F - \langle u, Q(v)\rangle_E)\, dv = \int_M d(\omega(u, v)) = \int_{\partial M} \omega(u, v) = 0$$

dove nella penultima uguaglianza abbiamo utilizzato Stokes. □

Capitolo 2

L'operatore $*$ di Hodge

A cura di Leonardo Alese

In questa sezione del seminario introdurremo l'operatore $*$ di Hodge tra spazi di forme differenziali, ne daremo una scrittura in coordinate e ne evidenzieremo alcune proprietà. Tale operatore ha un ruolo centrale nell'aggiunzione di operatori differenziali tra fibrati; lo utilizzeremo infatti per calcolare l'aggiunto formale del differenziale di de Rham d e, nel caso complesso, delle sue componenti ∂ e $\bar{\partial}$. Si opererà nel contesto di spazi vettoriali per rendere l'argomento il più intuitivo possibile, ma l'estensione dei concetti trattati su varietà e loro fibrati é banale attraverso la scelta di carte e aperti banalizzanti.

2.1. Esistenza,unicità e proprietà

Sia $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo di dimensione $n < \infty$. Sia $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una sua base ortonormale e $\{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*\}$ la corrispettiva base duale. Denotiamo con $(\Lambda^* V^*, \langle\ ,\ \rangle)$ lo spazio vettoriale delle forme su V, equipaggiato con il prodotto scalare indotto da quello euclideo. Esplicitamente, se $u_1, u_2, \ldots, u_k, v_1, v_2, \ldots, v_k \in V^*$ e dunque $u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_k$ e $v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_k$ sono due elementi in $\Lambda^k V^*$, abbiamo

$$\langle u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_k, v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_k \rangle = \det(\langle u_i, v_j \rangle)_{i,j} \tag{2.1}$$

dove il prodotto scalare $\langle u_i, v_j \rangle$ tra gli elementi del duale è indotto da quello euclideo attraverso gli isomorfismi musicali $\sharp$ e $\flat$. Tale prodotto indotto vale zero se calcolato tra forme di grado diverso. Quest'ultimo fatto ci permette di evidenziare una scomposizione in somma diretta ortogonale dello spazio delle forme su V

$$\Lambda^* V^* = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^k V^*. \tag{2.2}$$

Del resto, all'interno di ciascuna componente diretta $\Lambda^k V^*$, l'insieme $\{e^*_{i_1} \wedge e^*_{i_2} \wedge \ldots \wedge e^*_{i_k},\ i_1 < i_2 < \ldots < i_k\}$ individua una sua base ortonormale. Se $I = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ è un multiindice di modulo k, denotiamo più semplicemente questo insieme con $\{e^*_I\}$, sottointendendo l'ordinamento degli indici.

Consideriamo ora l'applicazione

$$* : \Lambda^* V^* \longrightarrow \Lambda^* V^*$$

tale che $\forall \alpha, \beta \in \Lambda^* V^*$ si abbia

$$\alpha \wedge *\beta = \langle \alpha, \beta \rangle dV \tag{2.3}$$

dove con dV abbiamo denotato la forma di volume associata alla base scelta.

Notiamo che, sebbene questa definizione sia implicita e non costruttiva, essa evidenzia la natura di operatore di dualità dello $*$ di Hodge. Naturalmente, a questo punto, ancora non siamo certi che una tale applicazione esista e, nel caso, che sia unica: nella prossima pagina vogliamo mostrare proprio questi fatti. Prima di proseguire, osserviamo che, nel caso non banale in cui α, β siano entrmabe in $\Lambda^k V^*$ (in caso contrario il prodotto scalare nel secondo membro sarebbe nullo), dovremo avere $grd(\alpha \wedge *\beta) = n$, poichè n è ovviamente il grado della forma di volume dV; da questo segue che $*\beta$ deve appartenere a $\Lambda^{n-k} V^*$. Attraverso semplici osservazioni sul grado abbiamo dunque concluso che, a patto esista, l'operatore $*$ agisce così

$$* : \Lambda^k V^* \longrightarrow \Lambda^{n-k} V^*. \tag{2.4}$$

L'esistenza e l'unicità dell'operatore $*$, come isomorfismo tra i due spazi sopra, si deducono dalla non degenerazione dell'accoppiamento

$$\begin{array}{rcl} \Lambda^k V^* \times \Lambda^{n-k} V^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v) & \longmapsto & \langle u \wedge v, dV \rangle \end{array}$$

Vediamo un esempio semplice per capire come funziona questo accoppiamento e per prendere dimestichezza con il prodotto scalare definito sulle forme. Su $V = \mathbb{R}^3$ scegliamo $u = e^*_3 \wedge e^*_2$ e $v = e^*_1$ Attraverso l'accoppiamento definito sopra abbiamo

$$e^*_3 \wedge e^*_2 \wedge e^*_1 \longmapsto \langle e^*_3 \wedge e^*_2 \wedge e^*_1, e^*_1 \wedge e^*_2 \wedge e^*_3 \rangle = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -1$$

In generale, tra due elementi delle basi $e^*_I \in \Lambda^k V^*$, $e^*_J \in \Lambda^{n-k} V^*$

$$(e^*_I, e^*_J) \longmapsto \epsilon(I, J)$$

dove con $\epsilon(I, J)$ abbiamo indicato il segno della $n-$permutazione (I, J). A questo punto è evidente che, dati due generici elementi scritti in coordinate $\sum_{|I|=k} u_I e^*_I$, $v = \sum_{|J|=n-k} v_J e^*_J$, si abbia

$$(u, v) \longmapsto u = \sum_{|I|=k} \epsilon(I, \mathbf{C}I) u_I v_{\mathbf{C}I} \tag{2.5}$$

dove con $\mathbf{C}I$ abbiamo indicato il multiindice complementare ordinato del multiindice I. In questa scrittura, la somma eseguita solo sui multiindici di modulo k è giustificata dal fatto che i complementari $\mathbf{C}I$ assumono tutte le possibili configurazioni dei multiindici J di modulo $n-k$ in cui non si ripetono indici che già non siano in I (in caso contrario $e_I^* \wedge e_J^* = 0$).

Consideriamo ora l'elemento $z \in \Lambda^k V^*$, avente scrittura in coordinate $z = \sum_{|I|=k} z_I e_I^*$. Posta l'esistenza dell'operatore $*$, si avrebbe la scrittura formale in coordinate $*z = \sum_{|I|=k} \tilde{z}_I e_{\mathbf{C}I}^*$, dove si è preferito, senza errore, sommare su $\mathbf{C}I$ con I di modulo k, piuttosto che su J di modulo $n-k$. Ricordando ora la definizione implicita dello $*$ di Hodge, abbiamo

$$u \wedge *z = \langle u, z \rangle dV$$

$$\langle u \wedge *z, dV \rangle = \langle u, z \rangle \qquad \forall u \in \Lambda^k V^*$$

dove la seconda uguaglianza è ottenuta facendo il prodotto scalare di entrambi i membri con dV e osservando che la norma della forma di volume è unitaria. Utilizzando ora la caratterizzazione in coordinate dell'accoppiamento sopra definito si ottiene

$$\sum_{|I|=k} \epsilon(I, \mathbf{C}I) u_I \tilde{z}_I = \sum_{|I|=k} u_I z_I \qquad \forall u \in \Lambda^k V^*$$

poichè nella scrittura in coordinate di $*z$ il coefficiente di $e_{\mathbf{C}I}^*$ è proprio $\tilde{z}_I$. Da questo segue necessariamente che $\tilde{z}_I = \epsilon(I, \mathbf{C}I) z_I$ e dunque concludiamo

$$*z = \sum_{|I|=k} \epsilon(I, \mathbf{C}I) z_I e_{\mathbf{C}I}^*. \tag{2.6}$$

l'unicità segue dall'univocità delle implicazione presentate.

Esercizio 1. *Dimostrare l'unicità dell'operatore $*$ di Hodge utilizzando la sua definizione implicita.*

Evidenziamo ora alcune proprietà dell'operatore $*$

Teorema 2.1.1 (Proprietà dello $*$ di Hodge)**.** *Siano $u \in \Lambda^k V^*$ e $v \in \Lambda^{n-k} V^*$ allora si ha*
1) Lo $*$ di Hodge è autoaggiunto a meno del segno

$$\langle u, *v \rangle = (-1)^{k(n-k)} \langle *u, v \rangle. \tag{2.7}$$

2) Lo $*$ di Hodge è involutivo a meno del segno

$$* * u = (-1)^{k(n-k)} u. \tag{2.8}$$

3) Lo $*$ di Hodge è un'isometria dello spazio $(\Lambda^* V^*, \langle , \rangle)$.

Dimostrazione. 1) Segue dalla definizione implicita di $*$. Dato che il prodotto scalare è euclideo abbiamo

$$\langle u, *v\rangle dV = \langle *v, u\rangle dV = *v \wedge *u = (-1)^{k(n-k)} * u \wedge *v = (-1)^{k(n-k)}\langle *u, v\rangle dV$$

dove nella penultima uguaglianza abbiamo utilizzato la commutatività
graduata del prodotto wedge.
2) Si ottiene, ricordando la scrittura in coordinate di $*$

$$* * u = \sum_{|I|=k} \epsilon(I, \mathbf{C}I)\epsilon(\mathbf{C}I, I)u_I e_I^*.$$

La tesi segue dal fatto che $\epsilon(I, \mathbf{C}I)\epsilon(\mathbf{C}I, I) = \epsilon(I, \mathbf{C}I)\epsilon(I, \mathbf{C}I)(-1)^{k(n-k)} = (-1)^{k(n-k)}$ poichè la permutazione $(\mathbf{C}I, I)$ è ottenibile con lo stesso numero di trasposizioni necessarie a ottenere $(I, \mathbf{C}I)$, a patto di scambiare prima, con al più $k(n-k)$ trasposizioni, I e $\mathbf{C}I$. L'aver considerato il numero massimo delle trasposizioni, e non quello esatto, di certo non compromette la parità del numero di trasposizioni necessarie.
3) Questa importante conclusione segue dai punti 1) e 2) usati in sequenza; abbiamo

$$\langle *u, *v\rangle = (-1)^{k(n-k)}\langle * * u, v\rangle = (-1)^{k(n-k)}(-1)^{k(n-k)}\langle u, v\rangle = \langle u, v\rangle.$$

□

Finora abbiamo ragionato nei termini di uno spazio vettoriale reale e di un prodotto scalare euclideo. Nonostante questo, quanto osservato finora si estende al caso di uno spazio vettoriale complesso dotato di prodotto scalare hermitiano: semplicemente si procede per estensione $\mathbb{C}$-lineare dello $*$ di Hodge. In questo caso, se $(V_{\mathbb{C}}, \langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{C}})$ è uno spazio vettoriale complesso di dimensione complessa n, dotato di prodotto scalare hermitiano, avremo che l'applicazione $*$ è quella tale che $\forall \alpha, \beta \in \Lambda^* V_{\mathbb{C}}^*$ si abbia

$$\alpha \wedge *\bar{\beta} = \langle \alpha, \beta\rangle dV. \tag{2.9}$$

Quando non crei confusione, da ora in poi, eviteremo di esplicitare che lo spazio vettoriale è complesso, denotando $V_{\mathbb{C}}$ ancora con V. A questo punto è legittimo chiedersi come l'operatore di Hodge agisca sulle forme bigraduate. Analogamente a quanto osservato per il caso reale, nel caso non banale in cui α, β siano entrmabe in $\Lambda^{p,q}V^*$, dovremo avere $grd(\alpha \wedge *\bar{\beta}) = (n, n)$, poichè (n, n) è il bigrado della forma di volume dV; da questo segue, se non dimentichiamo che nella definizione implicita compare un coniugato, che $*\beta$ deve appartenere a $\Lambda^{n-q,n-p}V^*$ (i complementari dei gradi risultano scambiati). Concludiamo quindi che l'operatore $*$ sulle forme bigraduate agisce così

$$* : \Lambda^{p,q}V^* \longrightarrow \Lambda^{n-q,n-p}V^*. \tag{2.10}$$

2.2. Aggiunti formali di d, ∂ e $\bar{\partial}$

Procediamo ora al calcolo dell'aggiunto formale del differenziale di de Rham rispetto al prodotto globale definito nella precedente parte del seminario, attraverso l'azione di coniugio operata dallo $*$ di Hodge. Ricordiamo ancora una volta che quanto svolto finora continua a valere se, invece di un solo spazio vettoriale, ne consideriamo tanti quanti i punti di una varietà, a patto che, ovviamente, essa abbia almeno struttura e metrica differenziabili.

Teorema 2.2.1. *Sia (M, g) una varietà riemanniana con metrica g. L'operatore $d^* = (-1)^{nk+1} * d*$ è l'aggiunto formale del differenziale di de Rham d, che agisce sullo spazio delle sezioni $\Gamma(\Lambda^* T_M^*)$ del fibrato delle forme differenziali su M.*

Dimostrazione. Siano $u \in \Gamma(\Lambda^k T_M^*)$ e $v \in \Gamma(\Lambda^{k+1} T_M^*)$ sezioni a supporto compatto (ricordiamo che è per questa classe che abbiamo definito l'aggiunzione formale). Abbiamo

$$\langle\langle du, v\rangle\rangle = \int_M \langle du, v\rangle dV = \int_M du \wedge *v = \int_M d(u \wedge *v) - (-1)^k u \wedge d * v$$

dove, nelle prime uguaglianze, abbiamo esplicitato la definizione di prodotto scalare globale e quella di $*$ di Hodge, mentre nella terza abbiamo utilizzato che il differenziale di de Rham è una derivazione nello spazio delle forme differenziali e che soddisfa una regola di Leibnitz graduata. A questo punto, data la compattezza del supporto delle nostre sezioni, grazie al teorema di Stokes, la catena di uguaglianze prosegue cosí

$$\langle\langle du, v\rangle\rangle = -(-1)^k(-1)^{k(n-1)} \int_M u \wedge * * d * v = (-1)^{kn+1} \langle\langle u, *d * v\rangle$$

dove abbiamo sfruttato la 2) del Teorema (2.1.1) e il fatto che
$(-1)^{k(n-k)} = (-1)^{k(n-1)}$ poichè non cambia la parità dell'esponente. $\square$

Passiamo ora a chiarire chi siano gli aggiunti formali di ∂ e $\bar{\partial}$, nel caso fossimo in presenza di una varietà con struttura hermitiana.

Teorema 2.2.2. *Sia (M, h) una varietà hermitiana con metrica h. Gli operatori $\bar{\partial}^* = - * \partial *$ e $\partial^* = - * \bar{\partial} *$ sono gli aggiunti formali delle componenti del differenziale di de Rham $d = \partial + \bar{\partial}$ che agisce sullo spazio delle sezioni $\Gamma(\Lambda^{*,*} T_M^*)$ del fibrato delle forme differenziali bigraduate su M.*

Dimostrazione. Di certo, noto che $d^* = (-1)^{2nk+1} * d*$ ($2n$ è la dimensione della varietà realificata), avremo

$$\partial^* + \bar{\partial}^* = - * \partial * + - * \bar{\partial} * .$$

Se ora riflettiamo sul grado di ciascun operatore che compare nell'uguaglianza, riusciamo facilmente a concludere; abbiamo infatti

$$\begin{array}{ll} grd(\partial^*) = (-1, 0) & \quad grd(\partial^*) = (0, -1) \\ grd(*\partial*) = (0, -1) & \quad grd(*\bar{\partial}*) = (-1, 0) \end{array}$$

da cui, ricordando che applicazioni di grado diverso non possono interagire tra loro se combinate linearmente, segue la corrispondenza definita nella tesi. $\square$

Definizione 2.2.3. *Gli operatori*

$$\Delta = dd^* + d^*d$$

$$\Delta^{\partial} = \partial\partial^* + \partial^*\partial$$
$$\Delta^{\bar{\partial}} = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}$$

si dicono operatori di Laplace.

Tali operatori rendono lecito parlare di forme differenziali armoniche, forme che hanno un ruolo centrale nella teoria di Hodge.

2.3. Un esempio esplicito

In questa sezione daremo scrittura in coordinate esplicita degli enti finora introdotti, considerando come varietà un aperto di $\mathbb{R}^n$. Ricordiamo prima la definizione di contrazione di una forma su un vettore ed evidenziamone alcune proprietà.

Definizione 2.3.1. *Sia $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo, $v \in V$ e $u \in \Lambda^k V^*$. Definiamo $v \lrcorner u \in \Lambda^{k-1} V^*$ con*

$$v \lrcorner u(\eta_1, \cdots, \eta_{k-1}) = u(v, \eta_1, \cdots, \eta_{k-1}) \quad \forall \eta_1, \cdots, \eta_{k-1} \in V.$$

è facile caratterizzare questo operatore nei termini di un base. Abbiamo infatti, se $I = (i_1, \cdots, i_k)$

$$e_l \lrcorner (e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_k}) = \begin{cases} 0 & l \notin I \\ (-1)^{p-1} e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_{p-1}} \wedge e^*_{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_k} & l = i_p \end{cases}$$

In coordinate, si mostra facilmente che l'operatore di contrazione è una derivazione graduata nell'algebra delle forme. Essa soddisfa infatti, se
$u, z \in \Lambda^* V^*$

$$v \lrcorner (u \wedge z) = (v \lrcorner u) \wedge z + (-1)^{grd(u)} u \wedge (v \lrcorner z).$$

D'altro canto, se $\sharp v = \langle\ , v\rangle \in V^*$, si conclude, sempre in coordinate, che l'operatore $\sharp v \wedge \bullet$ è l'aggiunto di $v \lrcorner \bullet$ rispetto al prodotto scalare indotto sulle forme, ovvero

$$\langle v \lrcorner u, z\rangle = \langle u, \sharp v \wedge z\rangle \forall u, z \in \Lambda^* V^*.$$

Sia ora M un aperto di $\mathbb{R}^n$, considerato con la metrica euclidea $g = \sum_{s=1}^n dx_s^2$ (abbiamo denotato la base duale con $\{dx_1, \cdots, dx_n\}$). Siano $u \in \Lambda^k M$ e $z \in \Lambda^{k-1} M$ a supporto compatto; in coordinate abbiamo

$$u = \sum_{|I|=k} u_I dx_I \qquad z = \sum_{|J|=k-1} z_J dx_J$$

$$du = \sum_{|I|=k,s} \frac{\partial u_I}{\partial x_s} dx_s \wedge dx_I \qquad dz = \sum_s dx_s \wedge \frac{\partial z}{\partial x_s}$$

dove nel differenziale di z, si intende $\frac{\partial z}{\partial x_s} = \sum_{|J|=k-1} \frac{\partial z_J}{\partial x_s} dx_J$. Scriviamo dunque

$$\langle\langle d^* u, z \rangle\rangle = \langle\langle u, dz \rangle\rangle = \int_M \langle u, \sum_s dx_s \wedge \frac{\partial z}{\partial x_s} \rangle dV = \int_M \sum_s \langle \frac{\partial}{\partial x_s} \lrcorner u, \frac{\partial z}{\partial x_s} \rangle dV$$

avendo usato, nell'ultima uguaglianza, la caratterizzazione dell'aggiunto dell'operatore di contrazione. Integrando ora per parti e utilizzando la scrittura in coordinate del prodotto scalare sulle forme differenziali, si ottiene

$$\langle\langle d^* u, z \rangle\rangle = -\sum_s \int_M \langle \frac{\partial}{\partial x_s} \lrcorner \frac{\partial u}{\partial x_s}, z \rangle dV.$$

Poichè la relazione sopra vale per ogni generico elemento z di $\Lambda^{k-1} V^*$, ne deduciamo

$$d^* u = -\sum_s \frac{\partial}{\partial x_s} \lrcorner \frac{\partial u}{\partial x_s} = -\sum_{|I|=k,s} \frac{\partial u_I}{\partial x_s} \frac{\partial}{\partial x_s} \lrcorner dx_I.$$

Da questo

$$dd^* u = -\sum_{I,s,t} \frac{\partial^2 u_I}{\partial x_s \partial x_t} dx_s \wedge (\frac{\partial}{\partial x_t} \lrcorner dx_I)$$

$$d^* du = -\sum_{I,s,t} \frac{\partial^2 u_I}{\partial x_s \partial x_t} \frac{\partial}{\partial x_t} \lrcorner (dx_s \wedge dx_I)$$

da cui, dato che $\frac{\partial}{\partial x_t} \lrcorner (dx_s \wedge dx_I) = (\frac{\partial}{\partial x_t} \lrcorner dx_s) \wedge dx_I + (-1)^1 dx_s \wedge (\frac{\partial}{\partial x_t} \lrcorner dx_I)$, si ha

$$\Delta u = -\sum_I (\sum_t \frac{\partial^2 u_I}{\partial x_t^2}) dx_I$$

che, nel caso delle 0-forme, è proprio l'usuale laplaciano, a meno del segno.

Capitolo 3

Operatori di Lefschetz e decomposizione di Lefschetz

A cura di Francesca Carocci

Torniamo su spazi vettoriali euclidei dotati di struttura quasi complessa compatibile, $(V, \langle\, ,\, \rangle\, , J)$, per definire un ultimo operatore linerare ed il suo aggiunto, che serviranno nel mostrare le identità di Kähler.

Definizione 3.0.2. *Si definisce operatore di Lefschetz l'applicazione*

$$L : \bigwedge^{*} V^{*}_{\mathbb{C}} \to \bigwedge^{*} V^{*}_{\mathbb{C}}$$

$$\alpha \to \omega \wedge \alpha$$

dove ω è la 2-forma fondamentale associata a $(\langle\, ,\, \rangle, J)$, che ricordiamo essere una 2-forma reale di tipo $(1,1)$.

Osservazione 3.0.3.

1. *L non è altro che l'estensione $\mathbb{C}$-lineare di*

$$L : \bigwedge^{*} V^{*} \to \bigwedge^{*} V^{*}$$

$$\alpha \to \omega \wedge \alpha.$$

   Con un abuso di notazione li indicheremo entrambi con L.

2. *L è un operatore bigraduato di bigrado $(1,1)$, cioè*

$$L(\bigwedge^{p,q} V^{*}) \subset \bigwedge^{p+1,q+1} V^{*},$$

è facile convincersi di questo se ricordiamo la definizione di prodotto $\wedge$ su (p,q)-forme ed il fatto che ω è di tipo $(1,1)$.

Definizione 3.0.4. *L'agginto formale dell'operatore di Lefschetz è l'operatore $\Lambda : \bigwedge^* V^* \to \bigwedge^* V^*$, univocamente determinato dalla condizione:*

$$\langle \Lambda\alpha, \beta\rangle = \langle \alpha, L\beta\rangle \ \ \forall \beta \in \bigwedge^* V^*.$$

L'estensione $\mathbb{C}$-lineare dell'aggiunto di L verrà ancora denotata con Λ.

Lemma 3.0.5. *L'aggiunto dell'operatore di Lefschetz Λ è di grado -2, cioè $\Lambda\left(\bigwedge^k V^*\right) \to \bigwedge^{k-2} V^*$. Inoltre $\Lambda = *^{-1} \circ L \circ *$.*

Dimostrazione. Il grado di Λ sia uguale a -2: segue dal fatto che la decomposizione $\bigwedge^* V^* = \bigoplus \bigwedge^k V^*$ è ortogonale rispetto al prodotto scalare indotto sulle potenze esterne del duale e dalla definizione stessa di aggiunto formale. Inoltre, utilizzando la definizione di $*$ di Hodge e la simmetria del prodotto scalare (stiamo in spazi euclidei e poi considereremo varietà riemanniane), si ha: $\langle \alpha, L\beta\rangle \cdot dV = \langle L\beta, \alpha\rangle dV = L\beta \wedge *\alpha = \omega \wedge \beta \wedge *\alpha = \beta \wedge (\omega \wedge *\alpha) = \beta \wedge * *^{-1} (L(*\alpha)) = \langle \beta, *^{-1}(L(*\alpha))\rangle \cdot dV.$ □

Denotiamo con $\langle\, ,\rangle_{\mathbb{C}}$ l'estensione hermitiana a $\bigwedge^* V^*_{\mathbb{C}}$ del prodotto scalare su $\bigwedge^* V^*$; chiaramente l'operatore di Lefschetz e il suo aggiunto Λ sono aggiunti formali anche rispetto a $\langle\, ,\rangle_{\mathbb{C}}$; dunque $\Lambda = *^{-1} \circ L \circ *$ anche su $\bigwedge^* V^*_{\mathbb{C}}$.

Osservazione 3.0.6. *L'aggiunto dell'operatore di Lefschetz è bigraduato di bigrado (-1,-1), cioè*

$$\Lambda\left(\bigwedge^{(p,q)} V^*\right) \subset \bigwedge^{(p-1,q-1)} V^*.$$

L'affermazione segue nuovamente dal fatto che la decompoizione in (p,q)-forme è ortogonale rispetto all'estensione hermitiana del prodotto su k-forme e dalla definizione di aggiunto formale.

Il punto di arrivo di questo seminario sarà la dimostrazione della seguente:

Proposizione 3.0.7. *Sia $(V\,, \langle\, ,\, \rangle, J)$ come sopra e siano L, Λ l'operatore di Lefschetz e il suo aggiunto (associati a $(\langle\, ,\, \rangle, J)$).*

(i) *Esiste una decomposizione in somma diretta del tipo*

$$\bigwedge^k V^* = \bigoplus_{i\geq} L^i\left(P^{k-2i}\right),$$

detta decomposizione di Lefschetz. Tale decomposizione è anche ortogonale rispetto al prodotto $\langle\, ,\, \rangle$;

(ii) $P^k = 0$ *se* $k > n$*;*

(iii) $L^{n-k} : P^k \to \bigwedge^{2n-k} V^*$ *è iniettivo per* $k \leq n$*;*

(iv) *La mappa* $L^{n-k} : P^k \to \bigwedge^{2n-k} V^*$ *è biettiva per* $k \leq n$;

(v) $P^k = \left\{ \alpha \in \bigwedge^k V^* \mid L^{n-k+1}\alpha = 0 \right\}$ *per* $k \leq n$*.*

Dove per definizione, $P^k = \left\{ \alpha \in \bigwedge^k V^* \mid \Lambda\alpha = 0 \right\}$*. Gli elementi di* P^k *sono dette forme primitive.*

Per arrivare a tale risultato, che sarà utile nel mostrare le identità kähleriane, saranno necessari un paio di lemmi preliminari e qualche richiamo sulle rappresentazioni di dimensione finita dell'algebra di Lie $sl(2, \mathbb{C})$.

Definizione 3.0.8. *Definiamo operatore di conteggio*

$$H : \bigwedge^{*} V^* \to \bigwedge^{*} V^*$$

$$H = \sum_{k=0}^{2n} (k-n)\pi_k,$$

dove con π_k *stiamo denotando la proiezione* $\pi_k : \bigwedge^* V^* \to \bigwedge^k V^*$*.*

Lemma 3.0.9. *Sia* V *uno spazio vettoriale euclideo dotato di struttura quasi complessa compatibile. Gli operatori lineari* L*,* Λ*,* H *su* $\bigwedge^* V^*$ *soddisfano:*

$$(i)\, [H, L] = 2L; \quad (ii)\, [H, \Lambda] = -2\Lambda; \quad (iii)\, [L, \Lambda] = H.$$

Dimostrazione. (i) e (ii) si mostrano semplicemente utilizzando la definizione; prendiamo $\alpha \in \bigwedge^k V^*$,allora $[H, L](\alpha) = H(L(\alpha)) - L(H(\alpha)) = H(\omega \wedge \alpha) - L((k-n)\alpha) = (k+2-n)\omega \wedge \alpha - (k-n)\omega \wedge \alpha = 2\omega \wedge \alpha = 2L(\alpha)$. Per la (ii) il procedamento è del tutto analogo. La terza asserzione si dimostra per induzione sulla dimensione di V; poiché il caso che a noi interessa è quello di $V_{\mathbb{C}} = V^{(1,0)} \oplus V^{(0,1)}$, possiamo assumere che $V = W_1 \oplus W_2$, dove la decomposizione in somma diretta è compatibile sia con il prodotto scalare che con la struttura quasi complessa. Dunque,

$$(V, \langle\, , \,\rangle, J) = (W_1, \langle\, , \,\rangle_1, J_1) \oplus (W_2, \langle\, , \,\rangle_2, J_2),$$

$$\bigwedge^{*} V^* = \bigwedge W_1^* \otimes \bigwedge^{*} W_2^*.$$

Dalle ipotesi di compatibilità della decomposizione si ha: $\omega = \omega_1 \oplus \omega_2$ (ovvero è una 2-forma senza componenti in $W_1 \otimes W_2$), da cui $L = L_1 \otimes 1 + 1 \otimes L_2$, e un'analoga decomposizione varrà per Λ. A questo punto prendendo una generica forma $\alpha = \alpha_1 \otimes \alpha_2 \in \bigwedge^* V^*$, basta calcolare esplicitamente $[L, \Lambda](\alpha)$ utilizzando tutte le suddette decomposizioni e si avrà la tesi dall'ipotesi induttiva. $\square$

Corollario 3.0.10. $\left[L^i, \Lambda\right](\alpha) = i(k-n+i-1)L^{i-1}(\alpha)\ \forall \alpha \in \bigwedge^k V^*$

Dimostrazione. Si mostra per induzione su i; il caso $i = 1$ è il punto (iii) del lemma precedente; per $i > 1$:
$\left[L^i, \Lambda\right](\alpha) = L^i\Lambda\alpha \,-\, \Lambda L^i\alpha \,=\, L\left(L^{i-1}\Lambda\alpha \,-\, \Lambda L^{i-1}\alpha\right) \,+\, L\Lambda L^{i-1}\alpha \,-\, \Lambda L L^{i-1}\alpha =$
$= L\left[L^{i-1}, \Lambda\right](\alpha) \,+\, [L, \Lambda]\left(L^{i-1}\right)(\alpha),$
da cui la tesi per ipotesi induttiva. □

Prima di procedere con la dimostrazione della Proposizione, richiamiamo brevemente quanto necessario sulle rappresentazioni di dimensione finita di $sl(2)$.

1. Denotiamo con x, $y\, h$ i generatori standard dell'algebra di Lie $sl(2)$:

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

   con le relazioni $[h, x] = 2x,\ [h, y] = -2y,\ [x, y] = h$.

2. Ricordiamo che uno spazio vettoriale complesso di dimensione finita si dice $sl(2)$-rappresentazione se è definito un omomorfismo di algebre di Lie

$$\rho :\ sl(2) \to\ End(V);$$

   $W \subset V$ è una sottorappresentazione se è a sua volta una $sl(2)$-rappresentazione. Inoltre $W \subset V$ è irriducibile se non ammette sottorappresentazioni non banali.

3. Per un risultato noto come Teorema di Weyl, essendo $sl(2)$ semisemplice, ogni sua rappresentazione di dimensione finita si decompone in somma diretta di sottorappresentazioni irriducibili, o, equivalentemente, per ogni $W \subset V$ sottorappresentazione esiste W' sottorappresentazione complementare tale che $V = W \oplus W'$.

4. Vale il seguente risultato sulle rappresentazioni irriducibili di $sl(2)$:

   Teorema 3.0.11. *Sia V una $sl(2)$ rappresentazione irriducibile:*

   (a) *Relativamente all'azione di $h := \rho(h)$, V si decompone in somma diretta di h-autospazi V_λ, detti spazi peso, con $\lambda = m, m-2, \cdots -(m-2), -m$, dove $m + 1 = dim\, V$ e $dim\, V_\lambda = 1$ per ogni λ;*

   (b) *se $v \in V_\lambda$, allora $x.v \in V_{\lambda+2}$ e $y.v \in V_{\lambda-2}$;*

   (c) *V ha (a meno di multipli scalari non nulli) un unico vettore minimale, ovvero tale che $y.v = 0$, il cui peso è $-m$;*

   (d) *si può scegliere come base di V quella costruita a partire dal vettore di peso minimo v: $\langle v_0 = v,\, v_1 = x.v_0, \cdots v_m = x.v_{m-1}\rangle$. In particolare esiste un'unica rappresentazione irriducibile, che si denota con $V_{(-m)}$, a meno di isomorfismi, di dimensione $m + 1$ per ogni m.*

5. Utilizzando il precedente teorema si decompone praticamente ogni rappresentazione di dimensione finita in sottorappresentazioni irriducibili. Per prima cosa, si decompone V in somma diretta di spazi peso; dunque si considera un vettore di peso minimale e si costruisce la rappresentazione irriducibile associata come in (d). Abbiamo allora decomposto V in $V = V_{(-m)} \oplus W, \exists m$, dove W è la sottorappresentazione complementare che esiste per completa riducibilità. Iterando il ragionamento su W si arriva alla completa decomposizione.

Applichiamo la teoria generale al caso che ci interessa.

Dimostrazione. Proposizione (3.0.7)

(i) Per il Lemma (3.0.9), l'applicazione $\rho : sl(2) \to End\,(\bigwedge^* V^*)$ che mappa $x \to L$, $y \to \Lambda$, $h \to H$ definisce una struttura di $sl(2)$ rappresentazione su $\bigwedge^* V^*$, chiaramente di dimensione finita. Utilizzando la teoria precedentemente richiamata, iniziamo con lo scomporre l'algebra delle forme su V in spazi peso. In realtà se ricordiamo come stato definito H, ci accorgiamo che la decomposizione in spazi peso non è altro che la decomposizione in k-forme:

$$\bigwedge^{*} V^* = \bigoplus_{k=-n}^{k=n} \bigwedge^{k+n} V^*;$$

Procedendo come nel punto 5 dei precedenti richiami decomponiamo la nostra rappresentazione in somma diretta di irriducibili, osservando che in questo caso i vettori di peso minimo non sono altro che le forme primitive, e le rappresentazioni irriducibili si costruiscono facendo agire l'operatore di Lefschetz su tali forme. E dunque risulta a questo punto chiaro che[1]

$$\bigwedge^{k} V^* = \oplus_{i \geq 0} L^i(P^{k-2i}).$$

(ii) Sia $\alpha \in P^k$, $k > n$, e $i \geq 0$ il più piccolo indice tale che $L^i\alpha = 0$. Allora, per il Corollario (3.0.10) si ha:

$$0 = \left[L^i, \Lambda\right](\alpha) = i(k - n + i - 1)L^{i-i}\alpha,$$

da cui necessariamente $i = 0$, cioè $\alpha = 0$;

(iii) Sia $0 \neq \alpha \in P^k$, $k \leq n$ il più piccolo indice tale che $L^i\alpha = 0$. Utilizzando la stessa identità del punto precedente, avendo ora supposto $\alpha \neq 0$, si deve avere $k-n+i-1 = 0$, e dunque $\forall i \leq n-k$, $L^i\alpha \neq 0$. Osserviamo che invece $L^{n-k+1}\alpha = 0$.

[1] è comunque dato un esempio più avanti.

(iv) Segue direttamente dai primi punti, facendo attenzione agli indici.

(v) Per il punto (iii) sappiamo già che $P^k \subset Ker(L^{n-k+1})$. D'altra parte se $\alpha \in \bigwedge^k V^*$ e $L^{n-k+1}\alpha = 0$, allora $L^{n-k+2}\Lambda\alpha = L^{n-k+2}\Lambda\alpha - \Lambda L^{n-k+2}\alpha = (n-k+2)L^{n-k+1}\alpha = 0$. Poiché la mappa L^{n-k+2} è iniettiva su $\bigwedge^{k-2} V^*$, allora $\Lambda\alpha = 0$.

□

Esempio 3.0.1. *Consideriamo ad esempio uno spazio vettoriale euclideo dotato di struttura quasi complessa compatibile di dimensione reale 4. Vediamo cosa ci dice la decomposizione di Lefschetz in questo caso: ovviamente, per ragioni dimensionali si avrà che* $\bigwedge^0 V^* = P^0$ *e* $\bigwedge^1 V^* = P^1$. *Inoltre, provando a costruire esplicitamente la decomposizione in irriducibili, e sfruttando la teoria delle* $sl(2)$*-rappresentazioni, ci si convince facilmente che* $\bigwedge^2 V^* = \omega\mathbb{R} \oplus P^2$ *(dove* ω *è la due forma fondamentale che caratterizza l'azione di* L*),* $\bigwedge^3 V^* = L(P^3)$ *e* $\bigwedge^4 V^* = L^2(P^0)$. *In questo caso semplicissimo, anche diffidando della teoria generale sulle rappresentazioni di algebre di Lie semisemplici, si riescono a verificare le precedenti decomposizioni con calcolo diretto; è conveniente scegliere una base di* V *che tenga conto della sua struttura quasi complessa e scrivere esplicitamente* ω *in coordinate.*

Osservazione 3.0.12. *Poiché gli operatori* L, Λ *e* H *sono di tipo rispettivamente (1,1), (-1,-1), (0,0), come già sottolineato nella trattazione, la decomposizione di Lefschetz è compatibile con la decomposizione bigraduata in (p,q)-forme, ovvero si ha:*

$$\bigwedge^k V^*_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{i\geq 0} L^i(P^k_{\mathbb{C}})$$

$$\bigwedge^{(p,q)} V^* = \bigoplus_{i\geq 0} L^i(P^{(p,q)}),$$

dove $P^k_{\mathbb{C}} \bigoplus_{p+q=k} P^{(p,q)}$ *e* $P^{(p,q)} = P^k_{\mathbb{C}} \cap \bigwedge^{(p,q)}$.

Esempio 3.0.2. *Consideriamo* $V \simeq \mathbb{C}^2$*, con base delle (p,q)-forme data da* $\{dz_1, dz_2, d\bar{z}_1, d\bar{z}_2\}$*, e* $\omega = \frac{i}{2}(dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + dz_2 \wedge d\bar{z}_2)$ *due forma fondamentale nella base canonica, rispetto al prodotto scalare standard. Non è difficile scrivere esplicitamente la decomposizione di Lefschetz:*

$$\bigwedge^0 V^*_{\mathbb{C}} = P^{(0,0)} = P^0_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{C}; \quad \bigwedge^1 V^*_{\mathbb{C}} = \bigwedge^{(1,0)} V^* \oplus \bigwedge^{(0,1)} V^* = P^{(1,0)} \oplus P^{(0,1)};$$

$$\bigwedge^2 V^*_{\mathbb{C}} = \bigwedge^{(2,0)} V^* \oplus \bigwedge^{(1,1)} V^* \oplus \bigwedge^{(0,2)} V^* = P^{(2,0)} \oplus \left(P^{(1,1)} \oplus L(P^{(0,0)})\right) \oplus P^{(0,2)};$$

$$\bigwedge^{3} V_{\mathbb{C}}^{*} = \bigwedge^{(2,1)} V^{*} \oplus \bigwedge^{(1,2)} V^{*} = L(P^{(1,0)}) \oplus L(P^{(0,1)}); \quad \bigwedge^{4} V_{\mathbb{C}}^{*} = \bigwedge^{(2,2)} V^{*} = L^{2}(P^{(0,0)}).$$

Concludiamo osservando come quanto detto finora si estenda naturalmente su varietà hermitiane; sia $(X,\, h,\, J)$ una varietà hermitiana con struttura quasi complessa compatibile e denotiamo con $\mathcal{A}^{k}(X)$ l'insieme delle $k-$forme su tale varietà[2]. Data la struttura posta su X è ben definita la 2-forma fondamentale ω, con espressione locale in coordinate già vista nei precedenti seminari. Allora è immediato estendere l'operatore di Lefschetz ad un'applicazione

$$L : \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^{k}(X) \to \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^{k+2}(X), \quad \alpha \to \omega \wedge \alpha.$$

L'aggiunto Λ in questo caso non è latro che l'aggiunto calcolato rispetto al prodotto globale definito nel primo seminario. Per linearità dell'integrale, Λ avrà esattamente le stesse caratteristiche che sono state descritte su spazi vettoriali. Non è allora difficile convincersi del fatto che valga il seguente.

Corollario 3.0.13. *Sia $(X,\, h,\, J)$ una varietà hermitiana. Vale la seguente decomposizione:*

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^{k}(X) = \bigoplus_{i \geq 0} L(P_{\mathbb{C}}^{k}),$$

dove con P^{k} indichiamo ancora il Ker dell'operatore Λ. Tale decomposizione è inoltre ortogonale rispetto al prodotto globale.

Dimostrazione. Entrambe le affermazioni seguono dalle analoghe mostrate su spazi vettoriali. Per la prima ricordiamo che il fascio $\mathcal{A}_{X,\mathbb{C}}$ delle sezioni di $\bigwedge^{*}(TX)^{*}$, è un fascio di moduli graduati. La decomposizione vale senz'altro a livello di spighe, pur di restringersi ad un intorno sufficientemente piccolo, ma, per le proprietà di incollameto dei fasci, questo implica immediatamente il risultato sulle sezioni globali. La seconda affermazione segue da quanto mostrato su spazi vettoriali e dalla linearità dell'integrale. $\square$

[2] ovvero le sezioni globali della k-sima potenza esterna del complessificato del fibrato cotangente, o equivalentemente, le sezioni globali del fascio di sezioni associate al suddetto fibrato.

Capitolo 4

Identità di Kähler

A cura di Enrico Fatighenti

4.1. Alcuni risultati interessanti su varietà Kähler

Nelle sezioni precedenti del nostro seminario non abbiamo mai parlato di varietà Kähler; in effetti, tutti i risultati che abbiamo ottenuto valgono in generale per varietà riemanniane, o al più (quasi)-complesse, senza bisogno di tirare in ballo ipotesi più forti. In quest'ultima sezione l'ipotesi di struttura Kähler risulterà essenziale, e in effetti i discorsi che seguiranno saranno validi solo per questa particolare classe di varietà. In particolare il tema che di seguito andremo a trattare si svilupperà seguendo due fili conduttori: per prima cosa, prendendo le mosse dagli argomenti trattati nel capitolo precedente, daremo una breve carrellata di risultati, senza alcuna dimostrazione, che valgono solamente per varietà Kähleriane, mentre nel seguito andremo a trattare nel dettaglio alcune identità di commutazione, interessanti di per sé, ma soprattutto utili quando si andrà, in altri seminari, a dimostrare il teorema di Hodge. Per prima cosa, si ha che la *decomposizione primitiva di Lefschetz* trattata in precedenza, su varietà Kähler passa in coomologia: questo è l'enunciato del

Teorema 4.1.1 (Teorema difficile di Lefschetz)**.** *Sia X una varietà complessa Kähler. Si ha allora la decomposizione*

$$H^k(X,\mathbb{R}) = \bigoplus_{i\geq 0} L^i(H^{k-2i}(X,\mathbb{R})_p) \tag{4.1}$$

dove $H^k(X,\mathbb{R})_p := ker(\Lambda : H^k(X,\mathbb{R}) \to H^{k-2}(X,\mathbb{R}))$.

La dimostrazione di questo teorema, come suggerisce il nome, non è affatto facile (rimandiamo per referenze a [GH78] e a seminari successivi), e sfrutta risultati piuttosto profondi di teoria di Hodge; l'idea di base è però quella di notare come l'operatore di Lefschetz L (e dunque il suo aggiunto Λ) siano operatori ben definiti in coomologia, agendo infatti come il wedge per una forma ω che, nel caso delle varietà Kähler, è chiusa (ma non esatta). Questa decomposizione è particolarmente importante, soprattutto ai fini pratici: quel che è necessario notare infatti è che, se X è una varietà complessa, allora la struttura Kähler associata, se esiste, non sarà necessariamente unica; in particolare la decomposizione 4.1 varrà per ogni forma ω che corrisponda a una qualche struttura hermitiana h, nel senso che $\omega = \langle J\bullet, \bullet \rangle_h$, con J struttura quasi-complessa integrabile e dω=0. Una domanda piuttosto naturale è dunque chiedersi, data una varietà complessa X, di quante strutture la si possa dotare che la rendano Kähler.Per questo abbiamo bisogno di una

Definizione 4.1.2. *Sia X una varietà compatta Kähler. La* classe Kähler *associata a una struttura Kähler su X è la classe in coomologia $[\omega] \in H^{1,1}(X)$*[1] *della sua forma di Kähler. Chiameremo il* cono Kähler [2]

$$\mathcal{K}_X \subset H^{1,1}(X) \cap H^2(X, \mathbb{R})$$

l'insieme delle classi Kähler associate a ogni possibile struttura Kähler su X.

Per fare un esempio a noi noto, nel caso di $\mathbb{CP}^n$ l'$H^2(X, \mathbb{R})$ è 1-dimensionale, generato dalla forma di *Fubini-Study* $[\omega_{FS}]$ che, come visto a lezione, è la classe in coomologia della forma di Kähler, ad esempio, della metrica standard su S^{2n+1} una volta indotta su $\mathbb{CP}^n$; in questo caso, il cono Kähler avrà una struttura particolarmente semplice, coincidendo con l'$H^2(X, \mathbb{R})$. In casi meno semplici, determinare il cono Kähler non è così facile; un criterio piuttosto famoso, dovuto a Demailly e Paun, ce ne dà però una caratterizzazione:

Criterio 4.1.3 (Demailly-Paun, 2004, [DP04])**.** *Se X è una varietà compatta Kähler, allora il suo cono Kähler $\mathcal{K}_X$ è una componente connessa del cono positivo $\mathcal{C}_X$, ovvero l'insieme delle classi $\alpha \in H^{1,1}(X) \cap H^2(X, \mathbb{R})$ tale che $\int_{[Y]} \alpha^p > 0$, per ogni $[Y]$ rappresentante in omologia di una sottovarietà $Y \subset X$ di dimensione p.*

Facciamo un rapido esempio in cui il criterio sopracitato fornisce una caratterizzazione più completa: sia X una superficie compatta Kähler semplicemente connessa e con prima classe di Chern $c_1(X) := c_1(TX) = 0$ [3] Supponiamo inoltre che tale superficie abbia gruppo

[1] Senza addentrarci in una trattazione della coomologia di Dolbeault, definiamo semplicemente $H^{1,1}(X) := \dfrac{ker\ (\bar\partial : \mathcal{A}^{1,1}(X) \to \mathcal{A}^{1,2}(X))}{\mathrm{Im}\ (\bar\partial : \mathcal{A}^{0,1}(X) \to \mathcal{A}^{1,1}(X))}$

[2] qui *cono* è inteso secondo l'accezione più generale: ovvero se ω è una forma di Kähler, $\lambda\omega$ è ancora una forma di Kähler, per λ numero reale positivo. Il cono Kähler è inoltre un convesso: in particolare, se ω_1, ω_2 sono forme di Kähler, anche $\omega_1 + \omega_2$ lo sarà. Entrambi gli enunciati seguono facilmente dalle proprietà delle matrici hermitiane.

[3] superfici caratterizzate in questo modo si dicono $K3$. In generale vengono definite come superfici con primo numero di Betti $b_1(X) = 0$ e fibrato canonico banale: d'altra parte la prima condizione, poiché si dimostra che l'$H^1(X, \mathbb{Z})$ è privo di torsione, è equivalente alla semplice connessione, e avere il canonico banale (ovvero $c_1(K_X) = 0$), è equivalente a $c_1(TX) = 0$, sfruttando la definizione $K_X = \Lambda^n T^*M$, il fatto che $c_1(TX) = -c_1(T^*X)$ e che $c_1(\Lambda^r E) = c_1(E)$, se E è un fibrato di rango r.

di Picard $Pic(X) = 0$, dove ricordiamo brevemente che il gruppo di Picard non è altro che il gruppo dei fibrati lineari a meno di isomorfismo. Ora, poiché $Pic(X) = 0$ implica che sulla nostra superficie non ci sono curve su cui integrare [4] e dunque la condizione recita $\int \alpha^2 > 0$, ovvero $\pm\alpha \in C_X$ e dunque $\mathcal{K}_X = \mathcal{C}_X$.
La conoscenza del cono delle Kähler $\mathcal{K}_X$ può portare risultati interessanti. Sappiamo infatti, per averlo visto in classe, che ogni varietà proiettiva è una varietà Kähleriana, semplicemente restringendo a $X \subset \mathbb{CP}^n$ la forma ω_{FS} di cui questi è sempre dotato. La domanda che si potrebbe porre è quando sia vero il viceversa, ovvero quando una varietà Kähleriana sia proiettiva. Si dimostra allora che questa implicazione è vera se e solo se si ha $\mathcal{K}_X \cap H^2(X, \mathbb{Z}) \neq \emptyset$ [5], ovvero se è possibile equipaggiare X con una $(1,1)$-forma di Kähler a coefficienti interi (forma di Hodge). Esempi di varietà Kähler non proiettive sono molto facili da produrre: si pensi per esempio a un toro complesso (con metrica Kähler indotta da quella standard su $\mathbb{C}^g$) $X = \mathbb{C}^g/\Lambda$, con $g \geq 2$ e Λ reticolo di rango massimo, isomorfo a $\mathbb{Z}^{2g}$. Sia $\lambda_1, \dots, \lambda_{2g}$ una base di Λ e $e_1, \dots, e_g$ una base complessa di X. Definiamo la *matrice dei periodi* di Λ come la matrice $g \times 2g$ definita da $\Omega = (\zeta_{\alpha i})$ tale che $\lambda_i = \sum_\alpha \zeta_{\alpha i} e_\alpha$ e dunque

$$dz_\alpha = \sum_i \zeta_{\alpha i} dx_i$$

$$d\bar{z}_\alpha = \sum_i \bar{\zeta}_{\alpha i} dx_i$$

Si ha allora

Teorema 4.1.4 (Codizioni di Riemann)**.** *Un toro complesso $X = V/\Lambda$ è una varietà abeliana (ovvero, una varietà proiettiva) se e solo se esiste una matrice Q intera antisimmetrica che soddisfi*

$$\Omega Q^{-1} \Omega^t = 0; \quad -i\Omega Q^{-1} \bar{\Omega}^t > 0$$

.

Inoltre un conto diretto (si veda [GH78]) prova che

Lemma 4.1.5. *Se $Q(,)$ è una forma antisimmetrica intera su $\Lambda = \mathbb{Z}^{2n}$, allora esiste una base $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ per Λ rispetto alla quale Q è data dalla matrice*

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \Theta_\theta \\ -\Theta_\theta & 0 \end{pmatrix}$$

con $\Theta_\theta = diag(\theta_1, \dots, \theta_n)$, dove i $\theta_\alpha \in \mathbb{Z}$ e $\theta_\alpha | \theta_{\alpha+1}$.

[4] Questo deriva dall'isomorfismo di $Pic(X) = Div(X)/PDiv(X)$, dove $PDiv(X)$ è il gruppo dei divisori principali definiti nel seminario di Matteo Braghiroli. D'altra parte è facile vedere che un divisore $D \in Div(X)$ è principale se e solo se il fibrato lineare associato $\mathcal{O}(D) \cong \mathcal{O}$. Ma allora questa giustifica la frase detta in precendenza, vista l'ipotesi di compattezza.

[5] questo non è altro che un corollario del famoso teorema di embedding di Kodaira, [Huy04]

Come conseguenza di questo lemma, possiamo trovare una base $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ per Λ tale che

$$\omega = \sum \theta_\alpha dx_\alpha \wedge dx_{n+\alpha}$$

e, se ω è non degenere possiamo porre

$$e_\alpha = \theta_\alpha^{-1} \lambda_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, n$$

di modo che la matrice dei periodi sia della forma

$$\Omega = (\Theta_\theta, Z)$$

andando allora a sostituire nelle (4.1.4) si trova che

Lemma 4.1.6 (Condizioni di Riemann, II)**.** *$X = V/\Lambda$ è una varietà abeliana se e solo se esiste una base $\lambda_1, \dots, \lambda_{2g}$ per Λ e una base complessa $e_1, \dots, e_g$ per V tale che*

$$\Omega = (\Theta_\theta, Z)$$

con Z simmetrica e ImZ definita positiva.

La classe in coomologia $[\omega]$ di una forma di Hodge ω su una varietà abeliana X si dirà una *polarizzazione* di X. Se scriviamo

$$\omega = \sum_\alpha \theta_\alpha dx_\alpha \wedge dx_{n+\alpha}$$

con $\theta_\alpha | \theta_{\alpha+1}$, gli interi θ_i si chiameranno i divisori elementari della polarizzazione. Se $\theta_\alpha = 1$ per ogni α, ω si dirà una *polarizzazione principale.* In presenza di una polarizzazione, un toro complesso sarà allora una varietà proiettiva. Quando questa dovesse venire a mancare (ed è ad esempio il caso di reticoli a coefficienti irrazionali) avremo allora prodotto esempi di varietà Kähler non proiettive. Questo ad esempio è il caso di un toro in $\mathbb{C}^2$ con reticolo $\Lambda = \{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\sqrt{2}\\i\sqrt{3}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\sqrt{5}\\i\sqrt{7}\end{pmatrix}\}$: in tal caso la matrice dei periodi, rispetto alla base canonica di $\mathbb{C}^2$, sarà $\begin{pmatrix}1 & 0 & i\sqrt{2} & i\sqrt{5}\\0 & 1 & i\sqrt{3} & i\sqrt{7}\end{pmatrix}$ che non può essere portata, tramite l'azione di $GL(4, \mathbb{Z})$ a una matrice il cui secondo blocco Z sia, in particolare, hermitiano. Tale toro sarà allora un esempio cercato di varietà Kähler non proiettiva.

4.2. Identità di commutazione su varietà Kähler

Andiamo adesso ad enunciare e dimostrare alcune identità di commutazione, che costituiscono il fulcro di questa ultima parte del nostro seminario; il teorema seguente si dividerà sostanzialmente in tre parti, le cui ultime due sfrutteranno in maniera pesante la prima.

D'altra parte questa si baserà sul fatto che, per ω forma fondamentale su varietà Kähler, si avrà $\mathrm{d}\omega = 0$; è chiaro allora che, togliendo questa ipotesi, verranno a cadere tutti i risultati dimostrati nel seguito. I conti che seguiranno saranno spesso lunghi e complessi: per questo spesso rimanderemo a [Huy04] per i dettagli tecnici, ponendo invece maggiore enfasi sulle idee dietro ai conti stessi. Abbiamo dunque il

Teorema 4.2.1. *Sia X una varietà complessa dotata di struttura Kähler, con forma fondamentale ω. Valgono allora le seguenti identità:*

1. $[\bar{\partial}, L] = [\partial, L] = 0$ *e* $[\bar{\partial}^*, \Lambda] = [\bar{\partial}^*, \Lambda] = 0$*;*
2. $[\bar{\partial}^*, L] = i\partial$*,* $[\partial^*, L] = -i\bar{\partial}$ *e* $[\Lambda, \bar{\partial}] = -i\partial^*$*,* $[\Lambda, \partial] = i\bar{\partial}^*$*;*
3. $\Delta_\partial = \Delta_{\bar{\partial}} = \frac{1}{2}\Delta$*, e inoltre il laplaciano* Δ *commuta con tutti gli operatoti precedentemente definiti.*

Prima di iniziare la dimostrazione, introduciamo un nuovo operatore, nei termini del quale proveremo il punto 2). Si ha, se J è la struttura quasi-complessa integrabile associata alla varietà,

Definizione 4.2.2. *Definiamo* $d^c := J^{-1} \circ d \circ J$ *e il suo aggiunto* $d^{c*} := - * \circ d^c \circ *$.

In realtà si può dare una caratterizzazione più utile all'atto pratico dell'operatore d^c; infatti, notando che J agisce sulle (p, q) forme come i^{p-q} si ha che, per α (p, q)-forma, $J(\partial - \bar{\partial})(\alpha) = i^{p+1-q}\partial(\alpha) - i^{p-q-1}\bar{\partial}(\alpha) = i^{p+1-q}d(\alpha) = id(J(\alpha))$, e dunque

$$d^c = -i(\partial - \bar{\partial}).$$

La ragione per l'introduzione di questo operatore è evidente: il punto 2) infatti implica $[\Lambda, d] = i(\bar{\partial}^* - \partial^*) = -i*(\partial - \bar{\partial})* = -d^{c*}$, e dunque sarà equivalente mostrare $[\Lambda, d] = -d^{c*}$ per ottenere il risultato enunciato.

Dimostrazione. Andiamo ora a dimostrare il punto 1). Faremo vedere solamente la commutazione di $\bar{\partial}$ con L e $\bar{\partial}^*$ con Λ, essendo gli altri due punti sostanzialmente identici. Per quanto riguarda la prima parte, basta notare che, se α è una k-forma,

$$[\bar{\partial}, L](\alpha) = \bar{\partial}(\omega \wedge \alpha) - \omega \wedge \bar{\partial}(\alpha) = \bar{\partial}(\omega) \wedge \alpha = 0;$$

d'altronde, $\bar{\partial}(\omega)$ è la parte $(1, 2)$ della forma $\mathrm{d}\omega$ che, su varietà Kähler è uguale a 0, e dunque $[\bar{\partial}, L](\alpha) = 0$. Non è difficile d'altronde vedere che $[\bar{\partial}^*, \Lambda](\alpha) = 0$, semplicemente ricordandosi la definizione di $\Lambda = *^{-1}L*$ e di $\bar{\partial}^* = - * \partial *$; infatti

$$[\bar{\partial}^*, \Lambda](\alpha) = - * \partial * *^{-1} L * (\alpha) + *^{-1} L * * \partial * (\alpha)$$

che, usando che, sulle k-forme su una varietà complessa $*^2 = (-1)^k$ è uguale a $-*[\partial, L]*(\alpha)$, uguale a 0 per quanto dimostrato poco sopra.

Per quanto riguarda il secondo punto, come detto in precedenza, vogliamo dimostrare che $[\Lambda, d] = -d^{c*}$; in particolare l'idea sarà di sfruttare la decomposizione primitiva di Lefschetz definita nel seminario precedente, provando tale identità per forme del tipo $L^j(\alpha)$, con $\alpha \in P^k$. Se α è una k-forma, d$\alpha \in \mathcal{A}^{k+1}(X)$ e dunque anch'essa ammetterà una decomposizione primitiva. Quel che stiamo dicendo è che possiamo scrivere

$$d\alpha = \alpha_0 + L\alpha_1 + L^2\alpha_2 + \dots$$

dove ogni $\alpha_j \in P^{k+1-2j}$. D'altra parte ci ricordiamo, sfruttando i risultati ottenuti da Francesca, che per α k-forma primitiva $L^{n-k+1}(\alpha) = 0$: applichiamo allora tale operatore all'espressione precedente e, sfruttando la commutazione di L con d, si ha

$$0 = L^{n-k+1}\alpha_0 + L^{n-k+2}\alpha_1 + \dots$$

dove, poiché la decomposizione è in somma diretta, ogni singolo pezzo è uguale a 0 Sempre per quanto detto in precedenza, L^l è iniettivo su $\mathcal{A}^i(X)$ per $l \leq n - i$; in questo caso si ha dunque che per $n - k + j \leq n - (k + 1 - 2j) \Leftrightarrow j \geq 2$ avremo $\alpha_j = 0$. In particolare abbiamo ottenuto che la decomposizione di dα è particolarmente semplice: potrà essere ridotta a d$\alpha = \alpha_0 + L\alpha_1$. Ora si tratta di andare a computare $\Lambda dL^j\alpha$; qui sfruttiamo il corollario dimostrato in precedenza da Francesca, che ci assicurava che $[L^j, \Lambda](\alpha) = j(k - n + j - 1)L^{j-1}(\alpha)$, per α k-forma. Ci scriviamo allora per prima cosa, sfruttando $[L, d] = 0$, $\Lambda dL^j\alpha = \Lambda L^j d\alpha = \Lambda L^j\alpha_0 + \Lambda L^{j+1}\alpha_1$; d'altra parte, se a quest'espressione sommiamo le quantità nulle $-L^j\Lambda\alpha_0$ e $-L^{j+1}\Lambda\alpha_1$ si ha

$$\Lambda dL^j\alpha = [\Lambda, L^j](\alpha_0) + [\Lambda, L^{j+1}](\alpha_1) = -j(k-n+j)L^{j-1}\alpha_0 - (j+1)(k-1-n+j)L^j\alpha_1).$$

Analogamente, si ha che

$$d\Lambda L^j\alpha = -j(k - n + j - 1)(L^{j-1}\alpha_0 + L^j(\alpha_1)$$

e d'altronde, ripetute applicazioni dell'identità $*L^j\alpha = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \dfrac{j!}{(n-k-j)!} L^{n-k-j} J(\alpha)$[6] mostrano che $-d^{c*}L^j\alpha = \Lambda dL^j\alpha - d\Lambda L^j\alpha$. Infatti

$$-d^{c*}L^j\alpha = *J^{-1}dJ * L^j\alpha = *J^{-1}dJ\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \frac{j!}{(n-k-j)!} L^{n-k-j} J(\alpha)\right) =$$

$$= (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}+k} \frac{j!}{(n-k-j)!} J^{-1} * L^{n-k-j} d\alpha =$$

$$= (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}+k} \frac{j!}{(n-k-j)!} (J^{-1}(*L^{n-k-j}\alpha_0 + *L^{n-k-j+1}\alpha_1)) =$$

[6]Per una dimostrazione di tale identità si rimanda a [Huy04]

$$= (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}+k+\frac{k(k-1)}{2}}(n-k-j+1)(L^j\alpha_1) = -jL^{j-1}\alpha_0 - (k-n+j-1)L^j\alpha_1$$

che dimostra $[\Lambda, d] = -d^{c*}$. Ci manca da vedere ora la terza parte: anche qui si tratterà semplicemente di scriversi le definizioni del de-laplaciano e del debar-laplaciano, sfruttando le identità precedentemente dimostrate e aggiungendo e sottraendo termini opportuni. Si ha infatti

$$\Delta_\partial = \partial^*\partial + \partial\partial^* =$$

$$= i([\Lambda, \bar{\partial}]\partial + \partial[\Lambda, \bar{\partial}]) = i(\Lambda\bar{\partial}\partial - \bar{\partial}\Lambda\partial + \partial\Lambda\bar{\partial} - \partial\bar{\partial}\Lambda)$$

Ma ora ci scriviamo $-\bar{\partial}\Lambda\partial$ come $\bar{\partial}[\Lambda, \partial] + \bar{\partial}\partial\Lambda$ e analogamente $-\partial\Lambda\bar{\partial}$ come $[\partial, \Lambda]\bar{\partial} + \Lambda\partial\bar{\partial}$ e, andando a sostituire nell'espressione precedente, si ha che

$$\Delta_\partial = i(\Lambda\bar{\partial}\partial - i\bar{\partial}\bar{\partial}^* - \bar{\partial}\partial\Lambda - i\bar{\partial}^*\bar{\partial} + \Lambda\partial\bar{\partial} - \partial\bar{\partial}\Lambda) = \Delta_{\bar{\partial}}.$$

D'altra parte, scrivendoci

$$\Delta = (\partial + \bar{\partial})(\partial^* + \bar{\partial}^*) + (\partial^* + \bar{\partial}^*)(\partial + \bar{\partial}) =$$

$$= \Delta_\partial + \Delta_{\bar{\partial}} + (\partial\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\partial) + \overline{(\partial\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\partial)}$$

Si ha però che $\partial\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\partial = 0$; infatti il punto 2) implica $i(\partial\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\partial) = \partial[\Lambda, \partial] + [\Lambda, \partial]\partial = \partial\Lambda\partial - \partial\Lambda\partial = 0$. Dunque $\Delta = \Delta_\partial + \Delta_{\bar{\partial}} + 0 = 2\Delta_\partial$. Chiudiamo la dimostrazione notando che il laplaciano commuta con tutti gli operatori definiti in precedenza: ovvero si ha che $[\Delta, P] = 0$, per $P = *, \partial, \bar{\partial}, \partial^*, \bar{\partial}^*, L, \Lambda$. Le dimostrazioni sono perlopiù immediate, e sfruttano le tecniche precedenti: in particolare di seguito svilupperemo il caso $[\Lambda, \Delta] = 0$, essendo gli altri casi analoghi. Per prima cosa notiamo che dalla definizione di d^c segue immediatamente che $dd^c = 2i\partial\bar{\partial} = -d^c d$; si ha poi $\Lambda\Delta = \Lambda dd^* + \Lambda d^* d = d\Lambda d^* - d^{c*}d^* + d^*\Lambda d = dd^*\Lambda + d^* d^{c*} + d^* d\Lambda - d^* d^{c*} = \Delta\Lambda$, che conclude la dimostrazione.

□

Bibliografia

[Dem04] Jean-Pierre Demailly. *Complex Analytic and Differential Geometry.* 2004.

[DP04] Jean-Pierre Demailly and Mihai Paun. Numerical charachterization of the kähler cone of a compact kähler manifold. *Annals of Mathematics*, (159):1247–1274, 2004.

[GH78] Phillip Griffiths and Joe Harris. *Principles of Algebraic Geometry.* Wiley Classic Library, New York, 1978.

[Hum72] James Humpreys. *Introduction to Lie Algebras and representation theory.* Springer, 1972.

[Huy04] Daniel Huybrechts. *Complex Geometry.* Springer, New York, 2004.

[Mor06] Andrei Moroianu. *Lectures on Kähler Geometry.* London Mathematical Society, 2006.

[Voi02] Claire Voisin. *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry, I.* Cambridge, Cambridge, 2002.