Seminari di Geometria Superiore

a.a. 2012/2013 Prof. P.Piccinni

METRICHE HERMITIANE E KÄHLERIANE

Alice Cuzzucoli, Alessio Cipriani, Bruno Federici, Claudio Onorati

Capitolo 1

Definizioni e Proprietà

di Alice Cuzzucoli.

In questa prima sezione ci occupiamo di dare alcune definizioni di base riguardo alla costruzione di metriche Hermitiane e Kähleriane, in particolare sottolineando le ipotesi richieste alla varietà per la loro definizione e le proprietà da queste soddisfatte. Nei precedenti seminari abbiamo visto come sia possibile definire su di una varietà differenziabile M l'endomorfismo J tale che $J^2 = -Id$ definendo una struttura quasi complessa su tale varietà. Nel seguito supporremo quindi di essere nelle ipotesi di una varietà quasi complessa (M, J).

Metriche Hermitiane

Definizione 1.1. *Una* ***metrica hermitiana*** *su una varietà quasi complessa è una metrica riemanniana h tale che*

$$h(X, Y) = h(JX, JY) \qquad \forall X, Y \in TM$$

In particolare, questo significa richiedere che J sia una isometria rispetto alla metrica riemanniana h.

Osservazione 1.1. *Ogni varietà quasi complessa ammette una metrica hermitiana: infatti, è possibile definirla come*

$$h(X, Y) = g(X, Y) + g(JX, JY)$$

dove g è la metrica riemanniana associata alla varietà M (la quale è sempre ben definita dato che si tratta di una varietà differenziabile). Facilmente si verifica che h è una metrica hermitiana sfruttando $J^2 = -Id$ e la bilinearità di g.

Definizione 1.2. *La **2-forma fondamentale** di una metrica hermitiana è definita come*

$$\Omega(X,Y) = h(JX,Y)$$

Tale operatore risulta una 2-forma non degenere (poichè definita a partire dalla metrica) e antisimmetrica: infatti sfruttando J isometria per h e h riemanniana si ha

$$(X,Y) = h(JX,Y) = -h(X,JY) = -h(JY,X) = -\Omega(Y,X).$$

Definendo la metrica hermitiana, ci stiamo restringendo alla varietà TM (reale). Volendo estendere la metrica della varietà quasi complessa al suo fibrato complessificato $TM^{\mathbb{C}}$, estendiamo h per $\mathbb{C}$-linearità. Questa metrica soddisfa alcune proprietà:

1. $h(\overline{Z},\overline{W})) = \overline{h(Z,W)} \qquad \forall Z,W \in TM^{\mathbb{C}}$
2. $h(Z,\overline{Z}) > 0 \forall Z \in TM^{\mathbb{C}}$
3. $h(Z,W) = 0 \qquad \forall Z,W \in T^{1,0}M \quad o \quad \forall Z,W \in T0,1M$

Dove $T^{1,0}M = \{X - iJX | X \in TM\}$ e $T^{0,1}M = \{X + iJX | X \in TM\}$.
Infatti, per $Z = X_1 + iY_1$ e $W = X_2 + iY_2$, sfruttando la $\mathbb{C}$-linearità

$$h(\overline{Z},\overline{W}) = h(X_1 - iY_1, X_2 - iY_2) = h(X_1,X_2) - h(Y_1,Y_2) - i[h(Y_1,X_2) + h(h(X_1,Y_2)]$$

$$h(Z,W) = h(X_1 + iY_1, X_2 + iY_2) = h(X_1,X_2) - h(Y_1,Y_2) + i[h(Y_1,X_2) + h(X_1,Y_2)]$$

da cui l'uguaglianza.
Per la seconda proprietà, se $Z = X + iY$, dato che h è metrica riemanniana, si ottiene:

$$h(X + iY, X - iY) = h(X,X) + h(Y,Y) + i[h(Y,X) - h(X,Y)] = h(X,X) + h(Y,Y) > 0$$

Per la terza consideriamo il caso $Z,W \in T^{1,0}M$ (il caso $T^{0,1}M$ è analogo). Siano quindi $Z = X - iJX$ e $W = Y - iJY$, per J isometria rispetto ad h risulta:

$$\begin{aligned} h(X - iJX, Y - iJY) &= h(X,Y) - h(JX,JY) - ih(JX,Y) - ih(X,JY) = \\ &= h(X,Y) - h(X,Y) - ih(JX,Y) + ih(JX,Y) = 0 \end{aligned}$$

Al contrario, un h tensore simmetrico su $TM^{\mathbb{C}}$ tale che soddisfi tali proprietà risulta definire una metrica hermitiana su TM: infatti, per verificare la proprietà di isometria di J consideriamo la terza proprietà applicata sia al caso $T^{1,0}M$ che a $T^{0,1}M$ ottenendo le uguaglianze:

$$h(X,Y) - h(JX,JY) - ih(JX,Y) - ih(X,JY) = 0$$

$$h(X,Y) - h(JX,JY) + ih(JX,Y) + ih(X,JY) = 0$$

dalle quali, mediante la somma, si ha:

$$2h(X,Y) - 2h(JX,JY) = 0$$

ossia, $h(X,Y) = h(JX,JY)$.

Abbiamo definito, nel precedente seminario, la struttura hermitiana per un fibrato complesso: questa costruzione prevede un campo di prodotti hermitiani H sulle fibre di $\pi : E \to M$ sopra i punti $x \in M$ che soddisfi le proprietà:

- $H(u,v)$ $\mathbb{C}$-lineare in u $\forall v \in E_x$
- $H(u,u) > 0$ $\forall u \neq 0$
- $H(u,v) = \overline{H(v,u)}$ $\forall u,v \in E_x$

Per una varietà quasi complessa, sul fibrato tangente è possibile costruire una struttura hermitiana a partire da una metrica hermitiana h definendo

$$H(X,Y) = h(X,Y) - ih(JX,Y) = (h - i\Omega)(X,Y) \quad \forall X,Y \in TM$$

Infatti H risulta $\mathbb{C}$-lineare e positiva poichè definita mediante h, ed inoltre, sfruttando la commutatività di h e l'anticommutatività di Ω si ottiene:

$$H(X,Y) = h(X,Y) - i\Omega(X,Y) = h(Y,X) + i\Omega(Y,X) = \overline{H(Y,X)}$$

Al contrario, data una struttura hermitiana H su $TM^{\mathbb{C}}$, questa in coordinate risulta

$$H = \sum_{a,b=1}^{n} H_{ab} dz^a \otimes d\overline{z}^b$$

la quale, mediante il cambio di coordinate $z^a = x^a + iy^a$, si esprime come

$$H = \sum_{a,b=1}^{n} H_{ab}[(dx^a + idy^a) \otimes (dx^b - idy^b)] =$$

$$= \sum_{a,b=1}^{n} H_{ab}[(dx^a \otimes dx^b + dy^a \otimes dy^b) - 2i(dx^a \wedge dy^b)]$$

ossia, è scomponibile in una parte simmetrica, rappresentata dai prodotti $dx^a \otimes dx^b + dy^a \otimes dy^b$, e da una antisimmetrica data dai wedge $dx^a \wedge dy^b$. In altre parole, la metrica hermitiana richiesta si ricava restringendosi alla parte reale della struttura H, mentre la parte immaginaria rappresenta la 2-forma fondamentale (antisimmetrica).
In definitiva,

$$h = \mathfrak{Re}(H) \qquad \Omega = \mathfrak{Im}(H)$$

Nel caso in cui ci troviamo su (M^{2n}, J, h) varietà complessa hermitiana, sappiamo che esiste localmente un sistema di coordinate olomorfe per il fibrato tangente $TM^{\mathbb{C}}$. È utile quindi avere una ricostruzione della metrica mediante tali coordinate olomorfe, i quali coefficienti risultano espressi mediante

$$h_{\alpha\overline{\beta}} = h(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}^\beta})$$

In coordinate, abbiamo una espressione per Ω:

Lemma 1.1. $\Omega = i \sum_{\alpha\beta=1}^{n} h_{\alpha\overline{\beta}} dz^\alpha \wedge d\overline{z}^\beta$.

Dimostrazione. Basta calcolare Ω per i campi in $TM^{\mathbb{C}}$ $\frac{\partial}{\partial z^\alpha}$ e $\frac{\partial}{\partial \overline{z}^\beta}$:

$$\Omega(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}^\beta}) = h(J\frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}^\beta}) = h(i\frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}^\beta}) = ih(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}^\beta}).$$

In particolare, dalla proprietà 3 della metrica h, due vettori dello stesso autospazio sono ortogonali rispetto ad h, quindi dei prodotti in coordinate sopravvive solo la parte antisimmetrica. □

Metriche Kähleriane

Definizione 1.3. *Una metrica hermitiana h su di una varietà quasi complessa è detta **metrica kähleriana** se risulta:*

1. $N^J = 0$

2. $d\Omega = 0$

La condizione 1 (tensore di torsione nullo) si traduce come J integrabile sulla varietà quasi complessa, il che suggerisce il fatto che stiamo in realtà su una varietà complessa. La condizione 2 la interpretiamo nei termini del $i\partial\overline{\partial}$-lemma: come abbiamo visto, questo ci assicurava, per una 2-forma chiusa ω su M, l'espressione del tipo $\omega = i\partial\overline{\partial}u$ in un intorno U di un punto $x \in M$ per qualche u reale definita sul tale aperto.
Se consideriamo quindi localmente la 2-forma fondamentale Ω, questa in coordinate risulta della forma $\Omega = i\frac{\partial^2 u}{\partial z^\alpha \partial \overline{z}^\beta} dz^\alpha \wedge d\overline{z}^\beta$, e confrontando con l'espressione del lemma si ottiene una espressione locale per i coefficienti $h_{\alpha\overline{\beta}} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^\alpha \partial \overline{z}^\beta}$. Perciò la condizione di chiusura equivale alla possibilità di esprimere localmente i coefficienti della 2-forma fondamentale in termini di derivate seconde di una unica funzione reale rispetto alle coordinate olomorfe. La funzione u in tal caso è detta *potenziale kähleriano* (locale) della matrica h.

Siamo ora pronti a formalizzare il concetto di varietà Käleheriana:

Definizione 1.4. *Sia (M,g) varietà riemanniana, una* ***struttura kälheriana*** *su M è data da un campo di endomorfismi $J \in End(TM)$ e una 2-forma Ω (detta* ***forma di Kälher****) che soddisfi le condizioni:*

1. *J è struttura quasi complessa ($J^2 = -Id$)*

2. *è possibile definire una metrica hermitiana h rispetto a J ($h(X,Y) = h(JX,JY)$ $\forall X,Y \in TM$)*

3. *$\Omega(X,Y) = h(JX,Y)$ $\forall X,Y \in TM$*

4. *Ω è chiusa ($d\Omega = 0$)*

5. *J è integrabile ($N^J = 0$)*

Una varietà che ammette una struttura Kähleriana è detta ***varietà Kähleriana****.*

Alcune varietà che ammettono strutture Kähleriane sono ad esempio:

- $(\mathbb{C}^n, <,>)$ con $<,>$ prodotto hermitiano standard, per il quale abbiamo visto che nel passaggio di coordinate da complesse a reali tale prodotto risulta scomponibile in una parte reale ed una immaginaria, ossia il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^{2n}$ e la 2-forma di Kähler

$$\Omega = \frac{i}{2}\sum_{\alpha} dz^{\alpha} \wedge d\overline{z}^{\alpha} = i\partial\overline{\partial}|z|^2$$

- $(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$ con ω_{FS} metrica di Fubini-Study, da cui la 2-forma di Kähler risulta

$$\Omega = \frac{i}{2}\partial\overline{\partial}log(|z|^2)$$

- Le superfici di Riemann, in quanto sono delle superfici reali 2-dimensionali orientate, quindi ammettono una struttura quasi complessa J che risulta integrabile, ed inoltre $d\Omega = 0$ dato che si tratta di una 3-forma su una superficie 2-dimensionale.

Capitolo 2

Due caratterizzazioni delle metriche kähleriane

di Alessio Cipriani.

Lo scopo di questo seminario è dare due caratterizzazioni delle metriche kähleriane che poi saranno sfruttate anche successivamente.
La prima mette in relazione le condizioni che garantiscono che una metrica sia kähleriana con la connessione di Levi-Civita associata alla metrica presa in considerazione, mentre la seconda dà una descrizione analitica.
Insieme al fatto che $J^2 = -Id$, sarà molto utile il seguente

Lemma 2.1. *Sia h una metrica hermitiana su una varietà quasi complessa (M, J), allora:*

i) gli operatori J e $\nabla_X J$ anticommutano, ovvero $J(\nabla_X)Y = -(\nabla_X J)(JY)$ $\forall Y$

ii) $h((\nabla_X J)Y, Z) = -h(Y, (\nabla_X J), Z)$ $\forall X, Y, Z$.

Dimostrazione.
i) Sfruttando che $(\nabla_X J)Y = \nabla_X JY - J\nabla_X Y$ e svolgendo i calcoli si ha che

$$\begin{aligned} J(\nabla_X J)Y &= J(\nabla_X JY - J\nabla_X Y) = J\nabla_X JY - J^2\nabla_X Y \\ &= J\nabla_X JY + \nabla_X Y \end{aligned}$$

mentre

$$
\begin{aligned}
(\nabla_X J)(JY) &= \nabla_X J^2 Y - J\nabla_X JY = \nabla_X(-Y) - J\nabla_X JY \\
&= -\nabla_X Y - J\nabla_X JY
\end{aligned}
$$

da cui segue la tesi.
ii) Calcolando esplicitamente si ha che

$$
\begin{aligned}
h((\nabla_X J)Y, Z) &= h(\nabla_X JY, Z) - h(J\nabla_X Y, Z) = h(\nabla_X JY, Z) + h(\nabla_X Y, JZ) \\
&= Xh(JY, Z) - h(JY, \nabla_X Z) + Xh(Y, JZ) - h(Y, \nabla_X JZ) \\
&= Xh(JY, Z) - h(JY, \nabla_X Z) - Xh(JY, Z) - h(Y, \nabla_X JZ) \\
&= h(Y, J\nabla_X Z) - h(Y, \nabla_X JZ) = h(Y, J\nabla_X Z - \nabla_X JZ) \\
&= h(Y, -(\nabla_X JZ - J\nabla_X Z)) = -h(Y, \nabla_X JZ - J\nabla_X Z) \\
&= -h(Y, (\nabla_X J)Z).
\end{aligned}
$$

□

Lemma 2.2. *Sia h una metrica hermitiana su (M, J) varietà quasi complessa con ∇ la connessione di Levi-Civita associata, allora*

$$
J \text{ è integrabile } \Leftrightarrow (\nabla_{JX} J)Y = J(\nabla_X J)Y \quad \forall X, Y \in TM.
$$

Dimostrazione.
$\Leftarrow)$: $\forall x \in M$, estendendo X e Y a campi vettoriali su M in modo parallelo rispetto a ∇, si ha che

$$
\begin{aligned}
N^J(X, J) &= [X, Y] + J\,[JX, Y] + J\,[X, JY] - [JX, JY] \\
&= \nabla_X Y - \nabla_Y X + J(\nabla_{JX} Y - \nabla_Y JX) + J(\nabla_X JY - \nabla_{JY} X) - \nabla_{JX} JY + \nabla_{JY} JX \\
&= (\nabla_X Y + J\nabla_X JY) - (\nabla_Y X + J\nabla_Y JX) + J(\nabla_{JX} Y + J\nabla_{JX} JY) + \\
&\qquad + (\nabla_{JY} JX - J\nabla_{JY} X) \\
&= J(\nabla_X JY - J\nabla_X Y) - J(\nabla_Y JX - J\nabla_Y X) - (\nabla_{JX} JY - J\nabla_{JX} Y) + \\
&\qquad + (\nabla_{JY} JX - J\nabla_{JY} X) \\
&= J(\nabla_X J)Y - J(\nabla_Y J)X - (\nabla_{JX} J)Y + (\nabla_{JY} J)X \\
&= (J(\nabla_X J)Y - (\nabla_{JX} J)Y) - (J(\nabla_Y J)X - (\nabla_{JY} J)X)
\end{aligned}
$$

e visto che per ipotesi $(\nabla_{JX}J)Y = J(\nabla_X J)Y \ \forall X, Y \in TM$ si ottiene che $N^J = 0$.
$\Rightarrow$) :Viceversa sia $N^J = 0$ e definiamo

$$A(X,Y,Z) = h(J(\nabla_X J)Y - (\nabla_{JX}J)Y, Z);$$

dato che

$$0 = N^J(X,Y) = (J(\nabla_X J)Y - (\nabla_{JX}J)Y) - (J(\nabla_Y J)X - (\nabla_{JY}J)X)$$

si ottiene che

$$J(\nabla_X J)Y - (\nabla_{JX}J)Y = J(\nabla_Y J)X - (\nabla_{JY}J)X$$

da cui

$$A(X,Y,Z) = A(Y,X,Z), \tag{2.1}$$

ovvero A è simmetrico nelle prime due variabili. Si ha inoltre che

$$A(X,Y,Z) = -A(X,Z,Y), \tag{2.2}$$

cioè A è antisimmetrico nelle ultime due variabili, infatti

$$\begin{aligned}
A(X,Y,Z) &= h(J(\nabla_X J)Y - (\nabla_{JX}J)Y, Z) \\
&= h(J(\nabla_X J)Y, Z) - h((\nabla_{JX}J)Y, Z) \\
&= h(J^2(\nabla_X J)Y, JZ) - h((\nabla_{JX}J)Y, Z) \\
&= -h((\nabla_X J)Y, JZ) - h((\nabla_{JX}J)Y, Z) \\
&= h(Y, (\nabla_X J)JZ) + h(Y, (\nabla_{JX}J)Z) \\
&= -h(Y, J(\nabla_X J)Z) + h(Y, (\nabla_{JX}J)Z) \\
&= -h(Y, J(\nabla_X J)Z - (\nabla_{JX}J)Z) \\
&= -h(J(\nabla_X J)Z - (\nabla_{JX}J)Z, Y) \\
&= -A(X,Z,Y).
\end{aligned}$$

Operando quindi con permutazioni cicliche e sfruttando la commutatività nelle prime due variabili e l'anticommutatività nelle ultime due variabili di A si ottiene che

$$\begin{aligned}
A(X,Y,Z) = A(Y,X,Z) = -A(Y,Z,X) = -A(Z,Y,X) = A(Y,Z,X) \\
= -A(Y,X,Z) = -A(X,Y,Z) \quad \forall\ X,Y,Z
\end{aligned}$$

da cui si ricava che

$$A(X,Y,Z) = 0 \ \forall \ X,Y,Z.$$

Per la definizione di A si ha quindi che

$$h(J(\nabla_X J)Y - (\nabla_{JX} J)Y, Z) = 0 \quad \forall X,Y,Z$$

ovvero

$$J(\nabla_X J)Y - (\nabla_{JX} J)Y \quad \forall X,Y$$

il che garantisce

$$J(\nabla_X J)Y = (\nabla_{JX} J)Y \ \forall X,Y.$$

□

Sfruttando quanto visto nel precedente Lemma si puó ora dare la prima caratterizzazione delle metriche kähleriane:

Teorema 2.1. *Sia h una metrica hermitiana su (M,J) varietà quasi complessa e ∇ la connessione di Levi-Civita di h, si ha che*

$$h \text{ è kähleriana } \Leftrightarrow \nabla J = 0$$

Dimostrazione.
$\Leftarrow$) : Dall'ipotesi $\nabla J = 0$ si ricava che $N^J = 0$ e $\nabla h = 0$; inoltre per come è stata definita la forma fondamentale, $\Omega(X,Y) = h(JX,Y)$, si ha che $\nabla\Omega = 0$. Ricordando che in generale il differenziale di una k-forma è la $(k+1)$-forma

$$d\Omega(X_o,\ldots,X_k) = \sum_{i=o}^{k}(-1)^i(\nabla_{X_i}\Omega)(X_o,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_k),$$

visto che in questo caso $\nabla\Omega = 0$, ciò implica che ogni $\nabla_{X_i}\Omega = 0$, per cui $d\Omega = 0$. Essendo quindi soddisfatte le due condizioni $N^J = 0$ e $d\Omega = 0$ si ha che h è kähleriana.
$\Rightarrow$) : Sia $B(X,Y,Z) = h((\nabla_X J)Y, Z)$, si nota che

i) $B(X,Y,JZ) = B(X,JY,Z)$

ii) $B(X,Y,JZ) + B(JX,Y,JZ) = 0$

Infatti:

$$\begin{aligned}B(X,Y,JZ) &= h((\nabla_X J)Y, JZ) = h(J(\nabla_X J)Y, J^2 Z) = -h(J(\nabla_X J)Y, Z)\\ &= h((\nabla_X J)JY, Z) = B(X, JY, Z)\end{aligned}$$

dove nel penultimo passaggio si è usata la prima parte del Lemma 2.1, mentre

$$\begin{aligned}B(X,Y,JZ) &= h((\nabla_X J)Y, JZ) = h(J(\nabla_X J)Y, J^2 Z) = -h(J(\nabla_X J)Y, Z)\\ &= -h((\nabla_{JX} J)y, Z) = -B(JX, Y, Z)\end{aligned}$$

avendo usato nella penultima uguaglianza il Lemma 2.2, poichè J è integrabile in quanto h è una metrica kähleriana.
Sfruttando ancora che h è kähleriana si ha che $d\Omega = 0$ che calcolato prima in X, Y, JZ e poi in X, JY, Z fornisce rispettivamente

$$B(X,Y,JZ) + B(Y,JZ,X) + B(JZ,X,Y) = 0, \tag{2.3}$$

$$B(X,JY,Z) + B(JY,Z,X) + B(Z,X,JY) = 0. \tag{2.4}$$

Sommando membro a membro le due equazioni ottenute e sfruttando le proprietà $i)$ e $ii)$ di B osservate precedentemente si ottiene che

$$2B(X,Y,JZ) = 0 \;\; \forall\ X,Y,Z$$

ovvero che

$$h((\nabla_X J)Y, JZ) = 0 \;\; \forall\ X,Y,Z$$

il che implica che

$$(\nabla_X J)Y = 0 \;\; \forall\ X,Y$$

ovvero ancora che

$$\nabla_X J = 0 \;\; \forall\ X \Rightarrow \nabla J = 0.$$

Resta da mostrare che valgono le equazioni (2.3) e (2.4); ad esempio per la prima si ha che

$$\begin{aligned}
0 = d\Omega(X,Y,JZ) &= X\Omega(Y,JZ) + Y\Omega(JZ,X) + JZ\Omega(X,Y) - \Omega([X,Y],JZ)+\\
&\quad - \Omega([Y,JZ],X) - \Omega([JZ,X],Y)\\
&= Xh(JY,JZ) + Yh(J^2Z,X) + JZh(JX,Y) - h(J[X,Y],JZ)+\\
&\quad - h(J[Y,JZ],X) - h(J[JZ,X],Y)\\
&= Xh(Y,Z) - Yh(Z,X) + JZh(JX,Y) - h([X,Y],Z) - h(J[Y,JZ],X)+\\
&\quad - h(J[JZ,X],Y)\\
&= h(\nabla_X Y,Z) + h(Y,\nabla_X Z) - h(\nabla_Y Z,X) - h(Z,\nabla_Y X) + h(\nabla_{JZ}JX,Y)+\\
&\quad + h(JX,\nabla_{JZ}Y) - h(\nabla_X Y,Z) + h(\nabla_Y X,Z) - h(J\nabla_Y JZ,X)+\\
&\qquad + h(J\nabla_{JZ}Y,X) - h(J\nabla_{JZ}X,Y) + h(J\nabla_X JZ,Y)\\
&= h(\nabla_X Z,Y) - h(\nabla_Y Z,X) + h(\nabla_{JZ}JX,Y) - h(J\nabla_Y JZ,X) - h(J\nabla_{JZ}X,Y)+\\
&\quad + h(J\nabla_X JZ,Y)\\
&= h(\nabla_X Z + J\nabla_X JZ,Y) - h(\nabla_Y Z + J\nabla_Y JZ,X) + h(\nabla_{JZ}JX - J\nabla_{JZ}X,Y)\\
&= h(J(\nabla_X J)Z,Y) - h(J(\nabla_Y J)Z,X) + h((\nabla_{JZ}J)X,Y)\\
&= -h((\nabla_X J)JZ,Y) + h((\nabla_Y J)JZ,X) + h((\nabla_{JZ}J)X,Y)\\
&= h(JZ,(\nabla_X J)Y) + h((\nabla_Y J)JZ,X) + h((\nabla_{JZ}J)X,Y)\\
&= h((\nabla_X J)Y,JZ) + h((\nabla_Y J)JZ,X) + h((\nabla_{JZ}J)X,Y)\\
&= B(X,Y,JZ) + B(Y,JZ,X) + B(JZ,X,Y).
\end{aligned}$$

Calcolando $d\Omega$ in X, JY, Z anzichè in X, Y, JZ si ottiene la (2.4). □

Osservazione 2.1. *Il precedente teorema si può quindi enunciare dicendo che se h è una metrica hermitiana su una varietà quasi complessa (M, J) con ∇ connessione di Levi-Civita della metrica allora h è kähleriana se e solo se J è parallelo rispetto a tale connessione.*

In conclusione, l'ultima caratterizzazione delle metriche kähleriane è data dal seguente

Teorema 2.2. *Sia h una metrica hermitiana su una varietà complessa (M, J), h è kähleriana $\Leftrightarrow$ $\forall x \in M$ esiste in intorno in cui si possono trovare coordinate olomorfe per le quali h approssima la metrica standard al secondo ordine.*

Dimostrazione.

$\Leftarrow)$: $\forall x \in M$ siano $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$ le coordinate olomorfe intorno ad x tali che

$$h_{\alpha\bar{\beta}} = \delta_{\alpha\beta} + r_{\alpha\beta}$$

con i coefficienti $r_{\alpha\beta}$ scelti in maniera che siano nulli in x insieme alle loro derivate prime, ovvero

$$r_{\alpha\beta}(x) = \frac{\partial r_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}(x) = \frac{\partial r_{\alpha\beta}}{\partial y_\gamma}(x) = 0.$$

Sfruttando la formula in coordinate della forma fondamentale Ω e calcolandone il differenziale si ha

$$\begin{aligned} d\Omega &= i \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{m} \left(\frac{\partial h_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial x_\gamma} dx_\gamma + \frac{\partial h_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial y_\gamma} dy_\gamma \right) \wedge dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta \\ &= i \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{m} \left(\frac{\partial(\delta_{\alpha\beta} + r_{\alpha\beta})}{\partial x_\gamma} dx_\gamma + \frac{\partial(\delta_{\alpha\beta} + r_{\alpha\beta})}{\partial y_\gamma} dy_\gamma \right) \wedge dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta \\ &= i \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{m} \left(\frac{\partial r_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} dx_\gamma + \frac{\partial r_{\alpha\beta}}{\partial y_\gamma} dy_\gamma \right) \wedge dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta. \end{aligned}$$

Calcolando $d\Omega$ in x questo è zero in quanto lo sono i coefficienti dentro la parentesi grazie alla scelta fatta, per cui, data l'arbitrarietà del punto x, si ha che $d\Omega = 0$ ovvero che h è kähleriana.

$\Rightarrow)$: Viceversa $\forall x \in M$ sia $\{e_1, \dots, e_m, Je_1, \dots, Je_m\}$ una base ortonormale di T_xM, si scelgono delle coordinate olomorfe locali $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$ intorno ad x tali che

$$e_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \qquad \text{e} \qquad Je_\alpha = \frac{\partial}{\partial y_\alpha}.$$

Potendo scegliere $h_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}$ la forma fondamentale Ω può quindi essere scritta in coordinate come

$$\Omega = i \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{m} \left(\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta\gamma} z_\gamma + a_{\alpha\beta\bar{\gamma}} \bar{z}_\gamma + [2] \right) dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta; \tag{2.5}$$

inoltre si può notare che:

- essendo h una metrica kähleriana, questa in particolare è hermitiana, per cui la relazione $h_{\alpha\bar{\beta}} = \overline{h_{\beta\bar{\alpha}}} \Rightarrow a_{\alpha\beta\bar{\gamma}} = \overline{a_{\beta\alpha\gamma}}$

- dal fatto che h è kähleriana si ha che $d\Omega = 0$ da cui si ricava che $a_{\alpha\beta\gamma} = a_{\gamma\beta\alpha}$, ovvero a è simmetrico in α e γ.

Si cerca ora un cambio di coordinate del tipo

$$z_\alpha = w_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\beta,\gamma=1}^{m} b_{\alpha\beta\gamma} w_\beta w_\gamma$$

in cui i coefficienti complessi $b_{\alpha\beta\gamma}$ soddisfano la relazione $b_{\alpha\beta\gamma} = b_{\alpha\gamma\beta}$; tale cambio di coordinate risulta localmente ben definito grazie alla versione olomorfa del teorema di inversione locale. Calcolando il differenziale di z_α si ottiene

$$dz_\alpha = dw_\alpha + \sum_{\beta,\gamma=1}^{m} b_{\alpha\beta\gamma} w_\beta dw_\gamma$$

che sostituito nella (2.5) fornisce

$$\begin{aligned}\Omega = \frac{i}{2} &\left[\sum_{\alpha,\epsilon,\tau} (dw_\alpha + b_{\alpha\epsilon\tau} w_\epsilon dw_\tau) \wedge \sum_{\beta,\epsilon,\tau} (d\bar{w}_\beta + \overline{b_{\beta\epsilon\tau}} \bar{w}_\epsilon d\bar{w}_\tau) \right] dw_\alpha \wedge d\bar{w}_\beta + \\ &+ i \left[\sum_{\alpha,\beta,\gamma} (\delta_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta\gamma} w_\gamma + a_{\alpha\beta\bar{\gamma}} \bar{w}_\gamma + b_{\beta\gamma\alpha} w_\gamma + \overline{b_{\alpha\gamma\beta}} \bar{w}_\gamma + [2] \right] dw_\alpha \wedge d\bar{w}_\beta \qquad (2.6) \\ = i &\left[\sum_{\alpha,\beta,\gamma} (\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta\gamma} w_\gamma + a_{\alpha\beta\bar{\gamma}} \bar{w}_\gamma + b_{\beta\gamma\alpha} w_\gamma + \overline{b_{\alpha\gamma\beta}} \bar{w}_\gamma + [2]) \right] dw_\alpha \wedge d\bar{w}_\beta.\end{aligned}$$

Scegliendo ora

$$b_{\beta\gamma\alpha} = -a_{\alpha\beta\gamma},$$

sfuttando le relazioni trovate sui coefficienti si ottiene

$$b_{\beta\gamma\alpha} = -a_{\alpha\beta\gamma} = -a_{\gamma\beta\alpha} = b_{\beta\alpha\gamma} \quad \text{e} \quad \overline{b_{\alpha\gamma\beta}} = -\overline{a_{\beta\alpha\gamma}} = -a_{\alpha\beta\bar{\gamma}}$$

che sostituite nella (2.6) danno

$$\Omega = i \sum_{\alpha,\beta} (\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta} + [2]) dw_\alpha \wedge d\bar{w}_\beta.$$

□

Osservazione 2.2. *Dal teorema precedente segue che ogni proprietà intrinseca che riguarda esclusivamente la metrica di una varietà kähleriana e le sue derivate prime valida per $\mathbb{C}^n$ è valida per ogni varietà kähhleriana.*

Capitolo 3

Ulteriori Caratterizzazioni

di Bruno Federici.

Questo seminario è la diretta prosecuzione del precedente, tenuto da Alessio Cipriani, il quale descriva e dava caratterizzazioni di varietà complesse dotate di una metrica kähleriana. In particolare mi riferirò ai due teoremi principali che ha dimostrato lui:

1) La metrica di una varietà kähleriana oscula al secondo ordine la varietà;

2) Se (M, h) è una varietà hermitiana, allora è anche di Kähler se e solo se $\nabla J = 0$, dove ∇ è il tensore di Levi-Civita relativo alla metrica h.

Iniziamo con una conseguenza fortemente topologica del primo dei due enunciati:

Teorema 3.1. *Sia (M, h) una varietà di Kähler compatta di dimensione $\dim_{\mathbb{C}} M = n$. Allora*

$$b_{2i} \neq 0,\ i = 1, \ldots, n,$$

dove $b_k = \dim_{\mathbb{R}} H^k_{dR}(M)$ sono i numeri di Betti della varietà M.

Dimostrazione. Un corollario immediato del primo Teorema già ricordato è che esiste un riferimento ortonormale $(z_1, \ldots, z_n)$, rispetto al quale h è la matrice identica. Rispetto ad esso dunque la forma fondamentale Ω si scrive come

$$\Omega = i \sum_{\alpha,\beta} h_{\alpha\bar{\beta}} dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta = i \sum_{\alpha} dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\alpha = 2 \sum_{\alpha} dx_\alpha \wedge dy_\alpha,$$

dove ho posto $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$. Facendo quindi n volte il prodotto wedge si ottiene

$$\Omega^n = 2^n n!\, dx_1 \wedge dy_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge dy_n;$$

ma allora $\frac{\Omega}{2^n n!}$ è la forma di volume di M e quindi in particolare

$$\int_M \Omega^n > 0.$$

Ω è una forma chiusa per ipotesi e dunque lo sono anche tutte le sue potenze Ω^i, $i = 1, \ldots, n$, che dunque inducono una classe $\left[\Omega^i\right]$ in coomologia di De Rham. D'altra parte esse sono anche non esatte, in quanto se per assurdo Ω^i fosse esatta, sarebbe $\left[\Omega^i\right] = [0]$ in coomologia, e per la dualità di Poincarè otterremmo

$$([\Omega^i], [\Omega^{n-i}]) \longmapsto \int_M \Omega^i \wedge \Omega^{n-i} = \int_M \Omega^n \neq 0,$$

mentre ovviamente

$$([0], [\Omega^{n-i}]) \longmapsto \int_M 0 \wedge \Omega^{n-i} = 0,$$

assurdo.

Quindi $[\Omega^i]$ è una forma chiusa non esatta; poichè $[\Omega] \in H^2_{dR}(M)$, dev'essere $[\Omega^i] \in H^{2i}_{dR}(M)$ e dunque $\dim_{\mathbb{R}} H^{2i}_{dR}(M) \neq 0$. □

Corollario 1. *La sfera S^n è una varietà di Kähler se e solo se $n = 0, 2$.*

Dimostrazione. Che S^0 ed S^2 ammettano una struttura di varietà di Kähler è (quasi) ovvio: per S^0 non c'è nulla da controllare, mentre S^2 è omeomorfa a $\mathbb{CP}^1$ che ammette una metrica kähleriana come ogni spazio proiettivo complesso. Per quanto riguarda l'altro verso: n dev'essere pari, altrimenti la varietà non ammette neanche una struttura quasi complessa, e vale anche $n \leq 2$, perchè $H^2_{dR}(S^n) = \{0\}$ se $n > 2$. □

Questo Corollario può sembrare un risultato interessante, ma in realtà viene minimizzato da un altro fatto: la sfera S^n ammette una struttura quasi complessa se e solo se $n = 0, 2, 6$. Questo è dovuto al fatto che

$$S^0 \subset \mathbb{R} \cong \mathbb{C}/\mathbb{R}\text{: i complessi immaginari puri,}$$
$$S^2 \subset \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{H}/\mathbb{R}\text{: i quaternioni immaginari puri,}$$
$$S^6 \subset \mathbb{R}^7 \cong \mathbb{O}/\mathbb{R}\text{: gli ottonioni immaginari puri,}$$

e che la moltiplicazione in $\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ induce il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^7$.

Dunque gli unici numeri naturali n per cui S^n ha speranza di essere di Kähler sono appunto $0, 2, 6$. Di più: è attualmente ignoto se S^6 ammetta una struttura complessa (mentre S^0 ed S^2 ovviamente ce l'hanno).

A questo proposito, è interessante osservare che esistono varietà complesse non di Kähler: ad esempio $S^1 \times S^{2m-1}$ è una varietà di dimensione pari che ammette una struttura complessa ma il cui $H^2_d R$ è nullo e dunque non è di Kähler. Cercando casi più raffinati, si ha che un esempio di varietà di Calabi-Yau che non sia di Kähler è una varietà omeomorfa alla somma connessa di almeno due copie $S^3 \times S^3$.

Ora cambiamo argomento, tornando a parlare di metriche kähleriane. Il prossimo Teorema ci fornirà un'altra caratterizzazione di queste metriche. Cominciamo dando un Lemma su come si 'legge' l'operatore $\bar{\partial}$ su varietà Hermitiane.

Lemma 1. *Sia (M, h) una varietà Hermitiana e ∇ la sua connessione di Levi-Civita. Definiamo l'operatore su $TM^{\mathbb{C}}$*

$$\bar{\partial}^{\nabla} Y(X) := \frac{1}{2}(\nabla_X Y + J\nabla_{JX} Y - J(\nabla_Y J)X). \tag{3.1}$$

Allora questo operatore è uguale a $\bar{\partial}$.

Dimostrazione. La linearità è ovvia. Verifichiamo che $\bar{\partial}^{\nabla}$ soddisfi la regola di Leibniz; a tal proposito ricordo che

$$\bar{\partial} f(X) = \frac{1}{2}(X + iJX)(f),$$

per ogni f funzione C^{∞}. Allora:

$$\begin{aligned} \bar{\partial}^{\nabla}(fY)(X) &= f\frac{1}{2}(\nabla_X Y + J\nabla_{JX} Y - J(\nabla_Y J)X) + \frac{1}{2}(X(f)Y + iJX(f)Y) = \\ &= f\bar{\partial} Y(X) + \bar{\partial} f(X) Y. \end{aligned}$$

L'unica cosa che resta da verificare è che $\bar{\partial}^{\nabla}$ si annulli su campi olomorfi. Sia dunque Y una sezione olomorfa di TM. Questo è equivalente a dire che Y è una sezione di TM reale analitica, che a sua volta è equivalente a dire che $\mathcal{L}_Y J = 0$, dove $\mathcal{L}$ è la derivata di

Lie. Dunque per ogni X sezione C^∞ di TM vale

$$\begin{aligned}
0 = (\mathcal{L}_Y J)X = & \qquad \text{(proprietà di } \mathcal{L}_Y J)\\
= \mathcal{L}_Y(JX) - J\mathcal{L}_Y X = & \qquad \text{(per i campi vettoriali, la derivata di Lie è il bracket)}\\
= [Y, JX] - J[Y, X] = & \qquad (\nabla \text{ è privo di torsione})\\
= (\nabla_Y(JX) - \nabla_{JX}Y) - J(\nabla_Y X - \nabla_X Y) = & \qquad \text{(proprietà di } \nabla_Y J)\\
= (\nabla_Y J)X - \nabla_{JX}Y + J\nabla_X Y = & \qquad (J^2 = -\operatorname{Id})\\
= J(-J(\nabla_Y J)X + J\nabla_{JX}Y + \nabla_X Y) = & \qquad \text{(definizione (3.1))}\\
= 2J\bar{\partial}^\nabla Y(X). &
\end{aligned}$$

Dunque, ignorando gli invertibili 2 e J, risulta che

$$\bar{\partial}^\nabla Y = 0$$

per ogni Y sezione olomorfa di TM. Ma questo è esattamente come dire che

$$\bar{\partial}^\nabla = \bar{\partial}. \qquad \square$$

Prima di enunciare il prossimo Teorema, ricordiamo due fatti: il primo è il già citato

$$h \text{ di Kähler} \Longleftrightarrow \nabla J = 0, \tag{3.2}$$

il secondo ci dice che

$$h \text{ di Kähler} \Longrightarrow \nabla h = \nabla \Omega = 0. \tag{3.3}$$

Quest'ultimo si spiega così: $\nabla h = 0$ semplicemente perchè ∇ è la connessione di Levi-Civita, per la quale la metrica è parallela; per l'altra basta applicare ∇ alla definizione $\Omega(X, Y) := h(JX, Y)$, usando (3.2) e $\nabla h = 0$.
Possiamo quindi dare la caratterizzazione seguente:

Teorema 3.2. *Sia (M, h) una varietà Hermitiana. Allora:*

$$h \text{ è di Kähler} \Longleftrightarrow \nabla = \nabla_c\,,$$

dove ∇_c è la connessione di Chern.

Dimostrazione. La struttura Hermitiana è data da $H = h - i\Omega$.

($\Leftarrow$) Per definizione J è parallelo a ∇_c ma $\nabla_c = \nabla$ quindi J è parallelo a ∇ che per (3.2) implica h di Kähler.

($\Rightarrow$) Visto che la connessione di Chern esiste ed è unica, basta verificare che ∇ soddisfi la definizione di connessione di Chern.

- Sempre per (3.2), $\nabla J = 0$: questo vuol dire che ∇ può essere esteso per $\mathbb{C}$-linearità a $TM^{\mathbb{C}}$ (imponendo la moltiplicazione per $a + ib$ come $a + bJ$), dunque ∇ è una connessione complessa;
- Data (3.3), abbiamo che vale anche $\nabla H = 0$ e dunque ∇ è una H-connessione;
- Se X, Y sono due sezioni di $TM^{\mathbb{C}}$, allora

$$\begin{aligned}
\nabla^{0,1}_X Y &= \frac{1}{2}(\nabla_X + i\nabla_{JX})Y = && (J \text{ dà la moltiplicazione per } i)\\
&= \frac{1}{2}(\nabla_X + J\nabla_{JX})Y = && (\text{sempre per (3.2) aggiungo una quantità nulla})\\
&= \frac{1}{2}(\nabla_X + J\nabla_{JX})Y - \frac{1}{2}J(\nabla_Y J)X = && (\text{raccolgo e uso la definizione (3.1)})\\
&= \bar{\partial}^{\nabla} Y(X)
\end{aligned}$$

  quindi, per il Lemma,

$$\nabla^{0,1} = \bar{\partial}^{\nabla} = \bar{\partial},$$

  cioè ∇ è una (la) connessione di Chern. $\square$

Capitolo 4

Tensore di Ricci e forma di Ricci per una varietá di Kähler

di Claudio Onorati.

In questa sezione ci occupiamo di studiare delle prime proprietá metriche associate a una varietá di Kähler M, giungendo infine alla definizione della forma di Ricci, oggetto molto importante in quanto ci consente di dare una descrizione esplicita della classe di Chern di M associata al fibrato canonico K_M. Come suggerisce il nome la forma di Ricci é strettamente collegata al tensore di Ricci, quindi dedicheremo tutta la prima parte a richiamare nozioni di geometria riemanniana che ci saranno utili in seguito.

Richiami di Geometria Riemanniana

Sia (M, g) una varietá riemanniana (ovvero una varietá C^∞ munita di una metrica non degenere definita positiva) e indichiamo con $\nabla = \nabla^g$ la connessione di Levi-Civita associata alla metrica g.

Definizione. *Il* tensore di curvatura *di M é l'$(1,3)$-tensore definito come difetto di commutazione delle derivate seconde, i.e.*

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \quad \forall X, Y, Z \in \Gamma(TM).$$

Osservazione 4.1. *Siccome g é non degenere rimane definito un nuovo tensore, attraverso il tensore di curvatura, che indichiamo ancora con R*

$$R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W).$$

Questo é naturalmente uno $(0,4)$-tensore e si vede subito che conoscere il tensore di curvatura é equivalente a conoscere quest'ultimo e viceversa. Difatti viene detto tensore di curvatura anch'esso e noi useremo indistintamente una o l'altra scrittura per indicarlo.

Dalla definizione seguono subito delle prime proprietá di R che non dimostriamo ma che seguono abbastanza velocemente verificandole in coordinate locali:

1. $-R(Y,X,Z,W) = R(X,Y,Z,W) = -R(X,Y,W,Z)$;
2. $R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y)$;
3. $R(X,Y,Z,W) + R(Y,Z,X,W) + R(Z,X,Y,W) = 0$ (I identitá di Bianchi);
4. $(\nabla_X R)(Y,Z)W + (\nabla_Y R)(Z,X)W + (\nabla_Z R)(X,Y)W = 0$ (II identitá di Bianchi).

Le ultime due proprietá possono naturalmente essere espresse come $(1,3)$ o $(0,4)$-tensore allo stesso modo. Abbiamo scelto questa scrittura perché sará la forma in cui le dovremmo usare.

Definizione. *Il* tensore di Ricci *é lo $(0,2)$-tensore definito come traccia dell'endomorfismo $V \longmapsto R(V,X)Y$, i.e.*

$$Ric(X,Y) := Tr(R(\cdot,X)Y) \qquad \forall X,Y \in \Gamma(TM).$$

Sia dunque (e_i) una base ortonormale di $\Gamma(TM)$, il tensore di Ricci si esprime su questa base come

$$Ric(X,Y) = \sum_i R(e_i,X,Y,e_i).$$

Dalle proprietá ricordate precedentemente non é difficile convincersi che Ric é un tensore simmetrico. Infatti

$$Ric(X,Y) = \sum_i R(e_i,X,Y,e_i) = \sum_i R(Y,e_i,e_i,X) =$$

$$= \sum_i R(e_i,Y,X,e_i) = Ric(Y,X).$$

Osservazione 4.2. *Il tensore di Ricci é uno* $(0,2)$*-tensore simmetrico proprio come la metrica* g*, ha dunque senso chiedersi se e quando esiste una qualche relazione tra di loro. In particolare si definiscono* varietá di Einstein *quelle varietá per cui vale*

$$Ric = \lambda g.$$

In generale λ *dipenderá dal punto* $p \in M$ *su cui viene calcolata, tuttavia si osserva che non appena* $\dim M \geq 3$*,* λ *é invece costante.*

Caso Kähleriano

Sia ora invece (M, J, h) una varietá di Kähler. In particolare la metrica h é una metrica riemanniana (a cui si richiede l'ulteriore proprietá di essere invariante per J) da cui (M, h) é una varietá riemanniana e tutto ció detto nel paragrafo precedente si applica senza problemi. Tuttavia é naturale aspettarsi che le ulteriori proprietá date dall'essere Kähler si manifestino in nuove simmetrie per il tensore di curvatura (che continuiamo a chiamare R). Cominciamo con il ricordare che una delle prime caratterizzazioni di metrica Kähleriana data nella seconda sezione ci dice che J é ∇-parallelo, ossia sviluppando la definizione

$$\nabla_X JY = J\nabla_X Y \qquad \forall X, Y \in \Gamma(TM).$$

Usando quest'informazione due volte nella definizione di R otteniamo

$$R(X,Y)JZ = JR(X,Y)Z$$

da cui, sfruttando l'invarianza di h rispetto a J,

$$R(X, Y, JZ, JW) = R(X, Y, Z, W). \tag{4.1}$$

Allo stesso modo sfruttando il fatto che $N^J \equiv 0$, ossia $[JX, JY] = [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY]$, e giocando un pó con la definizione, si ha anche

$$R(JX, JY, Z, W) = R(X, Y, Z, W). \tag{4.2}$$

Infine un'ultima importante proprietá per il tensore di Ricci segue applicando 4.1 e 4.2

$$Ric(JX, JY) = \sum_i R(e_i, JX, JY, e_i) = \sum_i R(Je_i, X, Y, Je_i) = Ric(X, Y), \tag{4.3}$$

dove nell'ultimo passaggio é fondamentale l'osservazione che J é un'isometria per h e quindi (Je_i) é ancora una base ortonormale. In virtú di ció e della simmetria di Ric abbiamo che

$$Ric(JX, Y) = -Ric(Y, JX),$$

per cui risulta ben posta la seguente

Definizione. *Si dice* forma di Ricci *la 2-forma*

$$\rho(X, Y) = Ric(JX, Y) \qquad \forall X, Y \in \Gamma(TM).$$

A questo punto é fondamentale notare che la ρ é una forma chiusa, ma per verificare ció abbiamo prima bisogno di un risultato preliminare che ci fornisce un altro modo per vedere il tensore di Ricci.

Lemma 4.1. *Per ogni X e Y campi vettoriali si ha*

$$2Ric(X, Y) = Tr(R(X, JY) \circ J).$$

Dimostrazione. Si tratta solo di partire dalla definizione e di applicare le proprietá viste finora

$$Ric(X, Y) = \sum_i R(e_i, X, Y, e_i) = \sum_i R(e_i, X, JY, Je_i) =$$

(I identitá di Bianchi)

$$= \sum_i [-R(X, JY, e_i, Je_i) - R(JY, e_i, X, Je_i)] =$$

$$\sum_i R(X, JY, Je_i, e_i) - \sum_i R(Je_i, Y, X, Je_i) =$$

$$= Tr(R(X, JY) \circ J) - Ric(Y, X)$$

e la tesi segue utilizzando la simmetria del tensore di Ricci. □

Proposizione 4.1. *ρ é chiusa.*

Dimostrazione. Per il lemma precedente

$$2\rho(X, Y) = 2Ric(JX, Y) = Tr(R(JX, JY) \circ J) = Tr(R(X, Y) \circ J)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la 4.2. A questo punto

$$2d\rho(X,Y,Z) = 2[(\nabla_X\rho)(Y,Z) + (\nabla_Y\rho)(Z,X) + (\nabla_Z\rho)(X,Y)] =$$

(lemma+linearitá di ∇ e J)

$$= Tr([(\nabla_X R)(Y,Z) + (\nabla_Y R)(Z,X) + (\nabla_Z R)(X,Y)] \circ J).$$

La tesi segue allora dalla II identitá di Bianchi. $\square$

In particolare, come accennato nell'introduzione, questo ci dice che ρ ben definisce una classe in coomologia.

Osservazione 4.3. *Per la Kähler rivestono un ruolo importante le varietá Ricci-piatte, ovvero quelle per cui vale $Ric \equiv 0$. Tali varietá di Einstein sono dette* varietá di Calabi-Yau *e sono molto usate per esempio in fisica nella teoria delle superstringhe.*

Per finire vogliamo dare una descrizione della forma di Ricci in coordinate locali. Siano dunque (z_α) coordinate olomorfe locali su (M,J,h) di Kähler e $\{\partial/\partial z_\alpha, \partial/\partial\overline{z_\alpha}\}$ le rispettive coordinate sul tangente complessificato. Fissiamo anche $dim_{\mathbb{C}}M = n$. Per il seguito useremo la seguente notazione: le lettere maiuscole, A B C etc.., per gli indici nell'insieme $\{1,2,\cdots,n,\bar{1},\bar{2},\cdots,\bar{n}\}$; mentre lettere greche, α β γ etc.., per gli indici nell'insieme $\{1,2,\cdots,n\}$. Quindi per esempio scriveremo i coefficienti della metrica h come

$$h_{AB} = h\left(\frac{\partial}{\partial z_A}, \frac{\partial}{\partial z_B}\right),$$

con le simmetrie

$$h_{\alpha\beta} = h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0 \qquad \text{e} \qquad h_{\alpha\bar{\beta}} = h_{\bar{\beta}\alpha} = \overline{h_{\beta\bar{\alpha}}}.$$

Il risultato a cui vorremmo giungere é

$$\rho = -i\partial\bar{\partial}\log d$$

dove $d = \det(h_{\alpha\bar{\beta}})$ é il determinente della matrice che rappresenta la metrica hermitiana h. Introduciamo da ultimo i coefficienti di Christoffel come (usiamo la notazione di Einstein con i simboli ripetuti per indicare una sommatoria)

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial z_A}} \frac{\partial}{\partial z_B} = \Gamma^C_{AB}\frac{\partial}{\partial z_C},$$

i coefficienti del tensore di curvatura

$$R(\frac{\partial}{\partial z_A}, \frac{\partial}{\partial z_B})\frac{\partial}{\partial z_C} = R^D_{ABC}\frac{\partial}{\partial z_D}$$

e i coefficienti del tensore di Ricci

$$Ric(\frac{\partial}{\partial z_A}, \frac{\partial}{\partial z_B}) = Ric_{AB}.$$

É evidente che la conoscenza di tali coefficienti equivale alla conoscenza del rispettivo tensore. Cerchiamo allora di capire quali di essi siano non nulli, da cui ricavare delle formule chiuse.

Innanzitutto segue dalla definizione che

$$\overline{\Gamma^C_{AB}} = \Gamma^{\bar{C}}_{\bar{A}\bar{B}},$$

inoltre ∇ é priva di torsione per cui

$$\Gamma^C_{AB} = \Gamma^C_{BA}.$$

Infine abbiamo visto che per una varietá di Kähler la connessione di Levi-Civita e quella di Chern coincidono, quindi in particolare $\nabla^{0,1} = \bar{\partial}$. Da ció segue che

$$\nabla\frac{\partial}{\partial z_\beta} = \nabla^{1,0}\frac{\partial}{\partial z_\beta} + \nabla^{0,1}\frac{\partial}{\partial z_\beta} = \nabla^{1,0}\frac{\partial}{\partial z_\beta} + \bar{\partial}\frac{\partial}{\partial z_\beta} = \nabla^{1,0}\frac{\partial}{\partial z_\beta}$$

e quindi

$$\Gamma^{\bar{\gamma}}_{A\beta} = 0$$

(per brevitá si dice che $T^{1,0}$ é ∇-parallelo per indicare che, con abuso di notazione, $\nabla T^{1,0} \subseteq T^{1,0}$). I coefficienti di Christoffel non nulli sono allora solo quelli del tipo

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \qquad \text{e} \qquad \Gamma^{\bar{\gamma}}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}.$$

La prima ooservazione é che

$$\frac{\partial h_{\beta\bar{\delta}}}{\partial z_\alpha} = \frac{\partial}{\partial z_\alpha}h\left(\frac{\partial}{\partial z_\beta}, \frac{\partial}{\partial \overline{z_\delta}}\right) = h\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial z_\alpha}}\frac{\partial}{\partial z_\beta}, \frac{\partial}{\partial \overline{z_\delta}}\right) = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}h_{\gamma\bar{\delta}},$$

per cui se con $(h^{\alpha\bar{\beta}})$ indichiamo la matrice inversa di $(h_{\alpha\bar{\beta}})$

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = h^{\gamma\bar{\delta}}\frac{\partial h_{\beta\bar{\delta}}}{\partial z_\alpha}. \tag{4.4}$$

Passiamo ora al tensore di curvatura, per definizione le restrizioni viste sui simboli di Christoffel ci restringono anche il campo per i suoi coefficienti; in particolare varrá ancora che

$$\overline{R^D_{ABC}} = R^{\bar{D}}_{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}.$$

Inoltre ancora dal fatto che $T^{1,0}$ é parallelo

$$R^{\bar{\delta}}_{AB\gamma} = R^{\delta}_{AB\bar{\gamma}} = 0.$$

Scrivendo

$$R_{ABCD} = h_{DE} R^E_{ABC}$$

si ha

$$R_{AB\gamma\delta} = h_{\delta\epsilon} R^{\epsilon}_{AB\gamma} + h_{\delta\bar{\epsilon}} R^{\bar{\epsilon}}_{AB\gamma} = 0$$

e dalle proprietá viste per il tensore di curvatura gli unici coefficienti non nulli sono

$$R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} \quad R_{\alpha\bar{\beta}\bar{\gamma}\delta} \quad R_{\bar{\alpha}\beta\gamma\bar{\delta}} \quad R_{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}\delta}$$

ovvero

$$R^{\delta}_{\alpha\bar{\beta}\gamma} \quad R^{\bar{\delta}}_{\alpha\beta\bar{\gamma}} \quad R^{\delta}_{\bar{\alpha}\beta\gamma} \quad R^{\bar{\delta}}_{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}}.$$

Quindi, usando la definizione e ricordando che il bracket tra due campi coordinati é nullo,

$$R^{\delta}_{\alpha\bar{\beta}\gamma} \frac{\partial}{\partial z_\delta} = R\left(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \overline{z_\beta}}\right) \frac{\partial}{\partial z_\gamma} = -\nabla_{\frac{\partial}{\partial \overline{z_\beta}}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial z_\alpha}} \frac{\partial}{\partial z_\gamma} =$$

$$= -\nabla_{\frac{\partial}{\partial \overline{z_\beta}}} \left(\Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma} \frac{\partial}{\partial z_\delta}\right) = -\frac{\partial \Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma}}{\partial \overline{z_\beta}} \frac{\partial}{\partial z_\delta}$$

da cui ricaviamo

$$R^{\delta}_{\alpha\bar{\beta}\gamma} = -\frac{\partial \Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma}}{\partial \overline{z_\beta}}. \tag{4.5}$$

É facile allora descrivere il tensore di Ricci a partire da queste formule

$$Ric_{\gamma\bar{\beta}} = Ric_{\bar{\beta}\alpha} = R^{A}_{A\bar{\beta}\gamma} = R^{\alpha}_{\alpha\bar{\beta}\gamma} = -\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\alpha\gamma}}{\partial \overline{z_\beta}} \tag{4.6}$$

Non ci resta che stimare, attraverso la 4.4, la quantitá

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\gamma\alpha} = h^{\alpha\bar{\delta}} \frac{\partial h_{\alpha\bar{\delta}}}{\partial z_\gamma}$$

per il prossimo passaggio é necessario ricorrere al seguente risultato che peró non dimostreremo

Lemma 4.2. *Sia* $h : \mathbb{R} \longrightarrow Gl_n(\mathbb{C})$ *una mappa, indichiamo con* $(h_{ij}) = (h_{ij}(t))$ *e* $(h^{ij}) = (h_{ij})^{-1}$*. Sia inoltre* $d = d(t)$ *il determinante di* (h_{ij})*. Allora*

$$d'(t) = d \sum_{i,j=i}^{n} h'_{ij}(t) h^{ji}(t).$$

Segue allora che

$$h^{\alpha\bar{\delta}} \frac{\partial h_{\alpha\bar{\delta}}}{\partial z_\gamma} = \frac{1}{d} \frac{\partial d}{\partial z_\gamma} = \frac{\partial \log d}{\partial z_\gamma}$$

dove d come al solito é il determinante della metrica h. Sostituendo questo risultato nella 4.6

$$Ric_{\alpha\bar{\beta}} = -\frac{\partial^2 \log d}{\partial z_\alpha \partial \overline{z_\beta}} \tag{4.7}$$

ottenendo cosí infine il risultato cercato (dove teniamo conto che nella definizione di forma di Ricci compare l'endomorfismo J)

$$\rho = -i\partial\bar{\partial} \log d. \tag{4.8}$$

Bibliografia

[1] D. Joyce, *Complex Manifolds and Kaehler Geometry*, Oxford Autumn term (2012).

[2] A. Moroianu, *Lectures on Kähler Geometry*, London Math. Soc. (2007).

[3] P. Griffith J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry* Wiley (1994).