Seminari di Geometria Superiore

a.a. 2012/2013 - Prof. P. Piccinni

Matteo Braghiroli, Silvia Ghinassi, Giovanni Gravina, Andrea Rinaldi

30 aprile 2013

1 Fibrati complessi e olomorfi – Andrea Rinaldi

Per gli argomenti trattati in questa sezione si vedano [Mor07], Ch.9 e [Joy], Lect.6

Definizione 1.1. Sia M una varietà differenziabile, un fibrato vettoriale complesso $E \xrightarrow{\pi} M$ di rango k è una famiglia di k-spazi vettoriali su $\mathbb{C}$ che variano in maniera liscia, o, più formalmente, date M, E varietà differenziabili diremo *fibrato vettoriale C^∞ complesso di rango k* la terna (E, π, M) dove $\pi : E \to M$ è un'applicazione liscia e suriettiva ed

1. $\forall x \in M$ la fibra $E_x \overset{def}{=} \pi^{-1}(x)$ è uno k-spazio vettoriale su $\mathbb{C}$
2. (*banalità locale*) esiste un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ su M ed esiste una famiglia di diffeomorfismi
$$\varphi_\alpha : E|_{U_\alpha} \overset{def}{=} \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}^k$$
tale che $\forall x \in U_\alpha$ la restrizione
$$\varphi\,|_{\pi^{-1}(x)} : E_x = \pi^{-1}(x) \to \mathbb{C}^k$$
sia un isomorfismo di spazi vettoriali complessi.

Per ogni coppia $\varphi_\alpha : E|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{C}^k$ e $\varphi_\beta : E|_{U_\beta} \to U_\beta \times \mathbb{C}^k$ di banalizzazioni definiamo la composizione
$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^k \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^k$$
che definisce per ogni $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ un automorfismo di $\mathbb{C}^k$, e diremo *funzioni di transizione* i diffeomorfismi $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{k^2}$ dove
$$g_{\alpha\beta}(x) \overset{def}{=} \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}|_{x \times \mathbb{C}^k}$$
e si vede facilmente soddisfano le condizioni di cociclo
$$g_{\alpha\beta} g_{\beta\alpha} = Id \qquad g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha} = Id.$$
Viceversa, assegnato un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ su M e delle applicazioni lisce $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{C})$ che soddisfano le condizioni di cociclo, si può dimostrare che esiste un unico fibrato complesso $E \xrightarrow{\pi} M$ con funzioni di transizione $\{g_{\alpha\beta}\}$.

Definizione 1.2. Sia $U \subseteq M$ aperto, una *sezione* del fibrato $E \overset{\pi}{\to} M$ su U è un'applicazione liscia $\sigma : U \to E$ tale che $\pi \circ \sigma = Id_U$ o in modo equivalente che $\sigma(x) \in E_x$ per ogni $x \in M$.

L'insieme $\Gamma(U, E)$ delle sezioni di E avrà dunque la struttura di spazio vettoriale (di dimensione infinita), però un insieme $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ di k sezioni del fibrato $E \overset{\pi}{\to} M$ di rango k si dice un *riferimento* su U se $\{\sigma_1(x), \dots, \sigma_k(x)\}$ forma una base di E_x per ogni $x \in U$.

Assegnare un riferimento per E su U è essenzialmente la stessa cosa che dare una banalizzazione di E su U, infatti, partendo dalla banalizzazione $\varphi_U : E|_U \to U \times \mathbb{C}^k$, le sezioni

$$\sigma_i(x) \overset{def}{=} \varphi_U^{-1}(x, e_i) \qquad i = 1, \dots, k$$

formano un riferimento, e viceversa assegnato $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ un riferimento, ogni $\lambda \in E_x$ si scrive come $\lambda = \sum \lambda_i \sigma_i(x)$ e possiamo dunque definire la banalizzazione φ_U come

$$\varphi_U(\lambda) = (x, (\lambda_1, \dots, \lambda_k)).$$

Notiamo inoltre che data una banalizzazione φ_U di E su U, possiamo rappresentare ogni sezione σ di E su U in modo unico come un vettore di funzioni liscie $f = (f_1, \dots, f_k)$ scrivendo

$$\sigma(x) = \sum f_i(x) \varphi_U^{-1}(x, e_i).$$

Se φ_V è una banalizzazione di E su V ed $f' = (f'_1, \dots, f'_k)$ è la corrispondente rappresentazione di $\sigma|_{U \cap V}$, allora

$$\sum f_i(x) \varphi_U^{-1}(x, e_i) = \sum f'_i(x) \varphi_V^{-1}(x, e_i)$$

quindi

$$\sum f_i(x) e_i = \sum f'_i(x) \varphi_U \varphi_V^{-1}(x, e_i)$$

e concludiamo che

$$f = g_{UV} f'.$$

Quindi, in termini delle banalizzazioni $\{\varphi_\alpha : E|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{C}^k\}$, sezioni del fibrato E su $\bigcup U_\alpha$ corrispondono esattamente alla famiglia $\{f_\alpha = (f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_k})\}$ di vettori di funzioni C^∞ tali che $f_\alpha = g_{\alpha\beta} f_\beta$, dove $g_{\alpha\beta}$ sono le funzioni di transizione di E da φ_α a φ_β.

Definizione 1.3. Siano M, E una varietà complesse ed $E \overset{\pi}{\to} M$ un fibrato vettoriale complesso, diremo che è un *fibrato olomorfo*, se esiste una banalizzazione locale $\{(U, \varphi_U)\}$ dove le $\varphi_U : E|_U \to U \times \mathbb{C}^k$ sono biolomorfe.

Se $\{\varphi_\alpha : E|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{C}^k\}$ sono banalizzazioni olomorfe, allora le funzioni di transizione associate sono applicazioni olomorfe, e viceversa assegnata una famiglia di applicazioni olomorfe $\{g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{C})\}$ che soddisfano le condizioni di cociclo, possiamo costruire univocamente un fibrato olomorfo $E \xrightarrow{\pi} M$ con funzioni di transizione $g_{\alpha\beta}$.

In linea generale, le operazioni algebriche sugli spazi vettoriali inducono operazioni sui fibrati vettoriali: se E ed F sono fibrati (complessi o olomorfi) su M di rango k ed l con funzioni di transizione rispettivamente $\{g_{\alpha\beta}\}$ e $\{h_{\alpha\beta}\}$, allora possiamo definire i fibrati (complessi o olomorfi)

- $E^* \to M$ dato dalle funzioni di transizione

$$j_{\alpha\beta}(x) = (g_{\alpha\beta}(x)^{-1})^t$$

- $E \oplus F \to M$ dato dalle funzioni di transizione

$$j_{\alpha\beta}(x) = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & h_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \in GL(k+l, \mathbb{C})$$

- $E \otimes F \to M$ dato dalle funzioni di transizione

$$j_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}(x) \otimes h_{\alpha\beta} \in GL(kl, \mathbb{C})$$

- $\Lambda^r E \to M$ dato dalle funzioni di transizione

$$j_{\alpha\beta}(x) = \Lambda^r g_{\alpha\beta}(x) \in GL(\binom{r}{k}, \mathbb{C})$$

ed in particolare il fibrato lineare $\Lambda^k E \to M$ dato dalle funzioni di transizione $j_{\alpha\beta}(x) = \det g_{\alpha\beta}(x) \in GL(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ è detto fibrato determinante.

Definizione 1.4. Dato il fibrato olomorfo E su $U \subseteq M$, $\sigma : U \to M$ si dice una *sezione olomorfa* se è olomorfa; ed un riferminento $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ è detto olomorfo se lo è ogni σ_i, in particolare assegnato un riferimento olomorfo $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ una sezione

$$\sigma(x) = \sum f_i(x)\sigma_i(x)$$

è olomorfa se e solo se le funzioni f_i lo sono.

Sia M^n una varietà complessa dove $J : TM \to TM$ è l'endomorfismo reale di struttura quasi-complessa e consideriamo il *fibrato tangente complessificato*

$$TM^{\mathbb{C}} = \bigsqcup_{x \in M} T_{\mathbb{C},x}M = \bigsqcup_{x \in M} (T_{\mathbb{R},x}M \otimes \mathbb{C}).$$

Siano $(z_1, \ldots, z_n)$ coordinate locali intorno a $x \in M$ con $z_i = x_i + iy_i$, possiamo considerare lo spazio reale tangente ad M in x

$$T_{\mathbb{R},x}M = \mathbb{R}\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_x, \frac{\partial}{\partial y_i}|_x\} \simeq \mathbb{R}^{2n}$$

e lo spazio tangente complessificato $T_{\mathbb{C},x}M$, che possiamo realizzare come lo spazio delle derivazioni $\mathbb{C}$-lineari sull'anello delle funzioni $C^\infty(M, \mathbb{C})$, che diventa quindi

$$T_{\mathbb{C},x}M = \mathbb{C}\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_x, \frac{\partial}{\partial y_i}|_x\} = \mathbb{C}\{\frac{\partial}{\partial z_i}|_x, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}|_x\} \simeq \mathbb{C}^{2n}$$

È un fibrato complesso di rango $2n$, infatti prendendo l'atlante olomorfo $\{(U, \varphi_U)\}$ considero la mappa $(d\varphi_U)_x : T_{\mathbb{C},x}U \to T_{\varphi(x)}\mathbb{C}^{2n}$ che definisce per ogni $x \in U$ la banalizzazione locale

$$\phi_U \overset{def}{=} (d\varphi_U) : TM^{\mathbb{C}}|_U = \bigsqcup_{x \in U} T_{\mathbb{C},x}U \to U \times \mathbb{C}^{2n}.$$

Abbiamo già visto che

$$TM^{\mathbb{C}} \stackrel{def}{=} TM \otimes \mathbb{C} \simeq T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$$

dove $T^{1,0}M = \mathbb{C}\{\frac{\partial}{\partial z_i}\}$ è il sottofibrato corrispondente all' i-autospazio di $TM^{\mathbb{C}}$, che verrà detto *fibrato tangente olomorfo* perchè si tratta di un fibrato olomorfo di rango n e analogamente $T^{0,1}M = \mathbb{C}\{\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\}$ è un sottofibrato di TM, detto il *fibrato tangente antiolomorfo.* Possiamo definire infatti le funzioni di transizione $g_{UV} = (d\varphi_U) \circ (d\varphi_V)^{-1}$ dove

$$g_{UV} : (U \cap V) \times \mathbb{C}^n \stackrel{(d\varphi_V)^{-1}}{\longrightarrow} TM|_{U\cap V} \stackrel{(d\varphi_U)}{\longrightarrow} (U \cap V) \times \mathbb{C}^n$$

che risultano chiaramente olomorfe.

Diremo campi vettoriali complessi le sezioni $Z \in \Gamma(M, TM^{\mathbb{C}})$ del fibrato tangente complessificato, mentre un campo vettoriale olomorfo sarà una sezione olomorfa $Z \in \Gamma(M, T^{1,0}M)$ del fibrato tangente olomorfo.

In maniera analoga definiamo anche il *fibrato cotangente complessificato*

$$(TM^{\mathbb{C}})^* = T^*M \otimes \mathbb{C} = T^*M^{1,0} \oplus T^*M^{0,1}$$

e il *fibrato cotangente olomorfo* $T^*M^{1,0} = (TM^{1,0})^*$, il *fibrato complesso potenza esterna*

$$\Lambda^k(T^*_{\mathbb{C}}M) = \Lambda^k(T^*M^{1,0} \oplus T^*M^{0,1}) = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,0}M \otimes \Lambda^{0,q}M = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q}M$$

e il *fibrato olomorfo potenza esterna*

$$\Lambda^{p,0}M \stackrel{def}{=} \Lambda^p(T^*M^{1,0}).$$

Diremo (p, q)-forme complesse le sezioni $\omega \in \Gamma(M, \Lambda^{p,q}M) \stackrel{def}{=} \Omega^{p,q}(M)$ del fibrato complesso $\Lambda^{p,q}M$, mentre una forma olomorfa sarà una sezione olomorfa $\omega \in \Gamma(M, \Lambda^{p,0}M)$ del fibrato olomorfo $\Lambda^{p,0}M$.

Notiamo inoltre che i fibrati $\Lambda^{p,q}M$ non sono olomorfi per $q \neq 0$.

Il teorema di Newlander-Nirenberg ci dice che su una varietà complessa M il differenziale esterno è un operatore $d : \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p+1,q}(M) \oplus \Omega^{p,q+1}(M)$ e risulta quindi naturale definire gli operatori

$$\partial : \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p+1,q}(M)$$
$$\overline{\partial} : \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p,q+1}(M)$$

dove per linearità avremo che $d = \partial + \overline{\partial}$.

In nostro scopo ora è estendere l'operatore $\overline{\partial}$ ad una classe assai più ampia di forme, a partire dal fibrato complesso E sulla varietà complessa M si definisce il fibrato complesso

$$\Lambda^{p,q}(E) \stackrel{def}{=} \Lambda^{p,q}(M) \otimes E$$

delle (p, q)-*forme su* M *a valori in* E, ed indichiamo con $\Omega^{p,q}(E)$ lo spazio delle sue sezioni.

Definiamo quindi l'operatore

$$\overline{\partial} : \Omega^{p,q}(E) \to \Omega^{p,q+1}(E)$$

come l'operatore che aumenta di uno il grado della parte antiolomorfa delle forme $\sigma \in \Omega^{p,q}(E)$ nel seguente modo: possiamo sempre costruire un riferimento $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ per E su $U \subseteq M$ e quindi ogni $\widetilde{\sigma} \in \Gamma(U, E)$ si scrive come $\overline{\sigma} = \sum f_i \sigma_i$ per opportune $f_i \in C^\infty(U, \mathbb{C})$, quindi $\sigma \in \Omega^{p,q}(E)$ si scrive come

$$\sigma = \sum \omega_i \otimes \sigma_i, \qquad \omega_i \in \Omega^{p,q}(U)$$

e poniamo

$$\overline{\partial}\sigma = \sum \overline{\partial}\omega_i \otimes \sigma_i.$$

Se $\{\sigma'_1, \ldots, \sigma'_k\}$ è un altro riferimento per E su U troviamo che

$$\sigma = \sum \tau_j \otimes \sigma'_j, \qquad \text{per opportune} \qquad \tau_j \in \Omega^{p,q}(U),$$

ora sappiamo che $\sigma_i = \sum g_{ij}\sigma'_j$ e quindi

$$\sigma = \sum \omega_i \otimes (\sum g_{ij}\sigma'_j) = \sum g_{ij}\omega_i \otimes \sigma'_j = \sum \tau_j \otimes \sigma'_j$$

e quindi

$$\tau_j = \sum g_{ij}\omega_i$$

Ora

$$\overline{\partial}\sigma = \sum \overline{\partial}\tau_j \otimes \sigma'_j = \sum g_{ij}\overline{\partial}\omega_i \otimes \sigma'_j = \sum \overline{\partial}\omega_i \otimes \sigma_i$$

quindi $\overline{\partial}\sigma$ non dipende dal riferimento.

Definizione 1.5. Sia E un fibrato vettoriale complesso sulla varietà complessa M, diremo che E possiede una *struttura pseudo-olomorfa* se possiede un operatore $\overline{\partial} : \Omega^{p,q}(E) \to \Omega^{p,q+1}(E)$ che soddisfa la regola di Leibniz. Se inoltre $\overline{\partial}^2 = 0$, diremo $\overline{\partial}$ una *struttura olomorfa*.

Una sezione σ del fibrato pseudo-olomorfo $(E, \overline{\partial})$ è detta *olomorfa* se $\overline{\partial}\sigma = 0$.

Lemma 1.1. *Sia $(E, \overline{\partial})$ una struttura pseudo-olomorfa, allora E è un fibrato olomorfo se e solo se per ogni $x \in M$ esiste un intorno aperto U ed un riferimento olomorfo di E su U.*

Dimostrazione. Se E è un fibrato olomorfo, ogni banalizzazione locale olomorfa (U, φ_U) definisce una base locale di sezioni olomorfe

$$\sigma_i(x) = \varphi_U^{-1}(x, e_i) \qquad \forall x \in U.$$

Viceversa, ogni riferimento olomorfo di $(E, \overline{\partial})$ definisce una banalizzazione locale, quindi a due riferimenti olomorfi $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ e $\{\sigma'_1, \ldots, \sigma'_k\}$ corrispondono due banalizzazioni locali (U, φ_U) e (V, φ_V). Inoltre possiamo scrivere $\sigma_i = \sum g_{ij}\sigma'_j$ dove g_{ij} sono funzioni lisce su $U \cap V$. Vogliamo dimostrare che le funzioni di transizione $g_{UV} = (g_{ij})$ sono olomorfe; le sezioni σ_i, σ'_j sono olomorfe quindi

$$0 = \overline{\partial}\sigma_i = \overline{\partial}(\sum g_{ij}\sigma'_j) = \sum \overline{\partial}(g_{ij}\sigma'_j) = \sum \overline{\partial}g_{ij} \otimes \sigma'_j + g_{ij}\overline{\partial}\sigma'_j = \sum \overline{\partial}g_{ij} \otimes \sigma_j$$

e concludiamo quindi che $\overline{\partial}g_{ij} = 0$. □

Teorema 1.2. *Un fibrato vettoriale complesso E sulla varietà complessa M è olomorfo se e solo se possiede una struttura olomorfa $\overline{\partial}$.*

Dimostrazione. Sia E un fibrato olomorfo e consideriamo $\overline{\partial}$ l'operatore che, presa una sezione $\tau \in \Omega^{p,q}(E)$, data da $\tau = (\omega_1, \dots, \omega_k)$ in una banalizzazione locale, dove ω_i sono (p,q)-forme locali, definisce $\overline{\partial}\tau = (\overline{\partial}\omega_1, \dots, \overline{\partial}\omega_k)$. E' una struttura olomorfa, infatti verifica la regola di Leibniz

$$\overline{\partial}(\omega \otimes \sigma) = \overline{\partial}\omega \otimes \sigma + (-1)^{p+q}\omega \wedge \overline{\partial}\sigma \qquad \forall \omega \in \Omega^{p,q}(M), \sigma \in \Gamma(E)$$

ed $\overline{\partial}^2\tau = 0$ perchè $\overline{\partial}^2\omega = 0$ per ogni $\omega \in \Omega^{p,q}(M)$.

Viceversa sia $(E, \overline{\partial})$ una struttura olomorfa, per il Lemma 1.1 è sufficiente mostrare che E si banalizza in un intorno di $x \in M$ con un riferimento olomorfo. Sia $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ un riferimento locale per E sull'intorno aperto U di x, allora definiamo le $(0,1)$-forme $\tau_{ij} \in \Omega^{0,1}(U)$ come

$$\overline{\partial}\sigma_i \overset{def}{=} \sum \tau_{ij} \otimes \sigma_j$$

Ora la condizione $\overline{\partial}^2 = 0$, insieme alla regola di Leibniz, ci dice che

$$0 = \overline{\partial}^2\sigma_i = \overline{\partial}(\sum \tau_{ij} \otimes \sigma_j) = \sum \overline{\partial}\tau_{ij} \otimes \sigma_j - \sum \tau_{il} \wedge \tau_{lj} \otimes \sigma_j$$

e quindi

$$\overline{\partial}\tau_{ij} = \sum_{l=i}^{k} \tau_{il} \wedge \tau_{lj} \qquad \forall i,j = 1, \dots, k.$$

Ora, se per ipotesi possiamo trovare una mappa $f = (f_{ij}) : U' \to GL(k, \mathbb{C})$ tale che

$$0 = \overline{\partial} f_{ij} + \sum_{l=i}^{k} f_{il}\tau_{lj} \qquad \forall i,j = 1, \dots, k$$

per un qualche aperto $U' \subseteq U$ che contiene x, allora le sezioni locali s_j di E su U' definite da

$$s_j \overset{def}{=} \sum_{l=1}^{k} f_{jl}\sigma_l$$

sono olomorfe:

$$\overline{\partial}s_j = \sum_{l=1}^{k} \overline{\partial}(f_{jl}\sigma_l) = \sum_{l=1}^{k} \overline{\partial}f_{jl} \otimes \sigma_l + f_{jl}\overline{\partial}\sigma_l =$$

$$\sum_{l=1}^{k}(\overline{\partial}f_{jl} \otimes \sigma_l + (\sum_{r=1}^{k} f_{jr}\tau_{rl}) \otimes \sigma_l) = \sum_{l=1}^{k}(\overline{\partial}f_{jl} + (\sum_{r=1}^{k} f_{jr}\tau_{rl})) \otimes \sigma_l = 0.$$

La tesi segue quindi dal lemma che segue. □

Lemma 1.3. *Sia $\tau = (\tau_{ij})$ una matrice di $(0,1)$-forme su U tali che $\overline{\partial}\tau = \tau \wedge \tau$, allora per ogni $x \in M$ esiste un aperto $U' \subseteq U$ che contiene x ed una mappa $f = (f_{ij}) : U' \to GL(k, \mathbb{C})$ tale che $\overline{\partial}f + f\tau = 0$.*

Dimostrazione. L'idea della dimostrazione è definire localmente una struttura quasi-complessa su $U \times \mathbb{C}^k$ usando τ, e verificare che la sua integrabilità sia equivalente a dire che $\overline{\partial}\tau = \tau \wedge \tau$. Otteremo poi che f è la matrice di qualche riferimento definito da τ in termini di coordinate olomorfe date dal teorema di Newlander-Nirenberg.

Per i dettagli si può consultare [Mor07]. □

Definizione 1.6. Una *connessione* sul fibrato complesso $E \xrightarrow{\pi} M$ è un operatore $\mathbb{C}$-lineare $\nabla : \Gamma(E) \to \Omega^1(E)$ che soddisfa la regola di Leibniz

$$\nabla(f\sigma) = df \otimes \sigma + f\nabla\sigma \qquad \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{C}), \quad \sigma \in \Gamma(E),$$

dove $\Gamma(E \otimes T^*_{\mathbb{C}}M) = \Gamma(E \otimes \Lambda^1_{\mathbb{C}}M) = \Omega^1(E)$ è lo spazio delle 1-forme su M a valori in E.

Vogliamo ora estendere la connessione $\nabla : \Gamma(E) \to \Omega^1(E)$ al fibrato $\Omega^p(E) = \Gamma(E \otimes \Lambda^p_{\mathbb{C}}M)$ delle p-forme su M a valori in E, definendo

$$\nabla : \Omega^p(E) \to \Omega^{p+1}(E) \qquad \text{per } p \geq 0$$

$$\nabla(\omega \otimes \sigma) = d\omega \otimes \sigma + (-1)^p \omega \wedge \nabla\sigma \qquad \forall \omega \in \Omega^p(M), \sigma \in \Gamma(E).$$

Usando questa estensione di ∇ possiamo ora definire l'operatore *curvatura* di ∇ come

$$K_\nabla \stackrel{def}{=} \nabla \circ \nabla : \Gamma(E) \to \Omega^2(E).$$

Ora K_∇ è $C^\infty(M)$-lineare, infatti $\forall \sigma \in C^\infty(M)$ abbiamo

$$\nabla^2(f\sigma) = \nabla(df \otimes \sigma + f\nabla\sigma) = d^2 f \otimes \sigma - df \wedge \nabla\sigma + df \wedge \nabla\sigma + f\nabla^2\sigma = f\nabla^2\sigma$$

Quindi K_∇ risulta essere una 2-forma su M a valori in $End(E)$.

Osserviamo ora che $T^*_{\mathbb{C}}M = (T^*M \otimes \mathbb{C}) = \Lambda^{0,1}M \oplus \Lambda^{0,1}M$ e quindi possiamo decomporre l'operatore ∇ nelle sue parti $(1,0)$ e $(0,1)$ nel modo seguente:

$$\nabla = \nabla^{1,0} \oplus \nabla^{0,1} \qquad \text{dove}$$

$$\nabla^{1,0} : \Gamma(E) \to \Omega^{1,0}(E) = \Gamma(E \otimes \Lambda^{1,0}M)$$

$$\nabla^{0,1} : \Gamma(E) \to \Omega^{0,1}(E) = \Gamma(E \otimes \Lambda^{0,1}M).$$

Poichè ∇ soddisfa la regola di Leibniz entrambe continueranno a soddisfarla, e più in generale possiamo decomporre l'operatore ∇ di connessione su E come $\nabla = \nabla^{1,0} \oplus \nabla^{0,1}$ dove

$$\nabla^{1,0} : \Omega^{p,q}(E) \to \Omega^{p+1,q}(E)$$

$$\nabla^{0,1} : \Omega^{p,q}(E) \to \Omega^{p,q+1}(E)$$

decomponendo la regola di Leibniz ed accordandola con il grado (p, q) delle forme. Troviamo dunque che

$$\nabla^{1,0}(\omega \otimes \sigma) = \partial\omega \otimes \sigma + (-1)^{p+q}\omega \wedge \nabla^{1,0}\sigma$$

$$\nabla^{0,1}(\omega \otimes \sigma) = \overline{\partial}\omega \otimes \sigma + (-1)^{p+q}\omega \wedge \nabla^{0,1}\sigma$$

per ogni $\omega \in \Omega^{p,q}(M)$, $\sigma \in \Gamma(E)$.

In generale non è detto che $\nabla^{0,1}$ sia una struttura olomorfa, affinchè lo sia si dovrà avere infatti $(\nabla^{0,1})^2 = 0$.

Sia ora $K_\nabla \in \Omega^2(End(E))$ la curvatura di ∇ allora

$$K_\nabla(\sigma) = \nabla^2\sigma = (\nabla^{1,0} + \nabla^{0,1})^2(\sigma) =$$

$$(\nabla^{1,0})^2(\sigma) + (\nabla^{0,1})^2(\sigma) + (\nabla^{1,0}\nabla^{0,1} + \nabla^{0,1}\nabla^{1,0})(\sigma).$$

dove

$$(\nabla^{1,0})^2 \in \Omega^{2,0}(End(E))$$

$$(\nabla^{1,0}\nabla^{0,1} + \nabla^{0,1}\nabla^{1,0}) \in \Omega^{1,1}(End(E))$$

$$(\nabla^{0,1})^2 \in \Omega^{0,2}(End(E))$$

Corollario 1.4. *Sia $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato complesso, se esiste una connessione ∇ su E con la parte $(0,2)$ della curvatura K_∇ nulla, allora il fibrato è olomorfo e la struttura olomorfa è data dalla parte $(0,1)$ della connessione, cioè $\overline{\partial} = \nabla^{0,1}$.*

Dimostrazione. Sappiamo che $(K_\nabla)^{0,2} = (\nabla^{0,1})^2$ e la tesi segue dal Teorema 1.2 osservando che $\nabla^{0,1}$ soddisfa l'identità di Leibniz. □

2 Fibrati hermitiani– Giovanni Gravina

Per gli argomenti trattati in questa sezione si veda [Mor07], Ch.9.

Con il termine fibrato vettoriale hermitiano si intende una coppia (E, H), dove E è un fibrato vettoriale complesso e H una struttura (o metrica) hermitiana. Dopo aver formalizzato alcuni concetti dimostremo subito che su ogni fibrato complesso è possibile costruire una tale struttura. Data una connessione ∇ introdurremo in seguito il concetto di compatibilità con la metrica H, e proveremo l'esistenza di connessioni soddisfacenti questa proprietà. Infine sposteremo la nostra attenzione al caso dei fibrati vettoriali olomorfi, per i quali mostreremo che alla struttura hermitiana resta canonicamente associata una particolare connessione sul fibrato, compatibile con la metrica e che permette di ricostruire $\overline{\partial}$. Tale connessione è spesso detta hermitiana o di Chern.

In accordo con le notazioni in [Mor07], il simbolo di sommatoria sarà sottointeso in presenza di indici ripetuti. Oltre all'opera già citata, per la stesura del seminario è stato spesso consultato [Wel73].

2.1 Strutture hermitiane: definizione e proprietà

Sia $\pi\colon E \to M$ un fibrato vettoriale complesso di rango k su una varietà differenziabile M. Al momento non è necessario supporre che M sia munita di una struttura quasi complessa. Il primo obiettivo che ci proponiamo in questo seminario è di mostrare che ogni tale fibrato ammette una struttura hermitiana, ossia un campo liscio di prodotti hermitiani su ogni fibra. Più formalmente,

Definizione 2.1. Una struttura hermitiana H su E è una famiglia liscia di applicazioni, indicizzata dai punti della varietà M,

$$H_x\colon E_x \times E_x \to \mathbb{C}$$

soddisfacenti le seguenti proprietà

(*i*) $H(u, v)$ è lineare in u per ogni $v \in E_x$.

(*ii*) $H(u, v) = \overline{H(v, u)}$ per ogni $u,\ v \in E_x$.

(iii) $H(u,u) > 0$ per ogni $0 \neq u \in E_x$.

A tale famiglia è richiesto di essere liscia nel senso che per ogni u, $v \in C^\infty(U,E)$, dove U è un intorno di x, si ha che l'applicazione

$$x \mapsto H_x(u(x), v(x))$$

è di classe C^∞.

Dalla definizione è immediato osservare che H_x è $\mathbb{C}-$antilineare nella seconda variabile e pertanto è possibile, e spesso utile, riferirsi a H come ad un isomorfismo $\mathbb{C}-$antilineare da E in E^*.

Continuiamo ad investigare le proprietà della struttura hermitiana H osservando che, se $S = (s_1, \dots, s_k)$ è un riferimento locale per E sopra un aperto U fissato ed opportunamente piccolo, allora possiamo indicare con $H(S) = (H(S)_{\alpha\beta})$ la matrice $k \times k$ che rappresenta localmente la metrica H rispetto ad S. Gli elementi di tale rappresentazione locale sono ovviamente definiti da

$$H(S)_{\alpha\beta} = H(s_\beta, s_\alpha). \tag{1}$$

Dalla (1) è immediato dedurre che $(H(S)_{\alpha\beta})$ è definita positiva e hermitiana, coincide cioè con la matrice trasposta della sua coniugata. Inoltre, se u, $v \in C^\infty(U,E)$ e $u(S) = (u_1(S), \dots, u_k(S))$, $v(S) = (v_1(S), \dots, v_k(S))$ sono i vettori delle coordinate di tali sezioni rispetto al precedentemente fissato riferimento S su U, ossia

$$u(x) = u_\alpha(S)(x)s_\alpha(x), \qquad v(x) = v_\beta(S)(x)s_\beta(x)$$

per ogni $x \in U$, allora vale la seguente scrittura:

$$H(u,v) = \overline{v(S)^t} \cdot H(S) \cdot u(S), \tag{2}$$

dove con $\cdot$ si intende l'usuale prodotto tra matrici. La verifica della (2) è un'elementare applicazione delle proprietà di linearità e antilinearità rispettivamente nella prima e nella seconda variabile.

Consideriamo l'applicazione differenziabile $g\colon U \to GL(k,\mathbb{C})$. Se definiamo $(Sg)(x) = S(x) \cdot g(x)$, ossia

$$(Sg)(x) = (g_{\gamma 1}(x)s_\gamma(x), \dots, g_{\gamma k}(x)s_\gamma(x)),$$

è facile verificare che questo è ancora un riferimento locale su U. Non solo, è valido anche il viceversa nel senso che, dati due riferimenti locali denotati con S e S', esiste una tale applicazione g per cui $S' = Sg$.

È a questo punto naturale chiedersi come cambia la matrice che rappresenta H al variare del riferimento. Sia Sg un altro riferimento locale su U, si ha allora che vale il seguente risultato.

Lemma 2.1. *In accordo con le notazioni precedentemente introdotte, è valida la formula*

$$H(Sg) = \overline{g}^t \cdot H(S) \cdot g,$$

detta legge di trasformazione per rappresentazioni locali di H su U.

Dimostrazione. Iniziamo esplicitando il membro sinistro dell'espressione che vogliamo provare:

$$H(Sg)_{\alpha\beta} = H(g_{\gamma\beta}s_p, g_{\sigma\alpha}s_\sigma) = g_{\gamma\beta}\overline{g_{\sigma\alpha}}H(S)_{\sigma\gamma}.$$

Poiché ovviamente

$$(\overline{g^t} \cdot H(S) \cdot g)_{\alpha\beta} = g_{\gamma\beta}\overline{g^t_{\alpha\sigma}}H(S)_{\sigma\gamma},$$

si ha che la tesi è subito verificata. □

Il nostro interesse per i fibrati vettoriali hermitiani è in parte giustificato dal seguente risultato.

Lemma 2.2. *Ogni fibrato vettoriale complesso E di rango k ammette una struttura hermitiana.*

Dimostrazione. Consideriamo $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$, banalizzazione locale di E. È sempre possibile supporre che il ricoprimento $\{U_\alpha\}$ sia localmente finito (si può consultare, ad esempio, [Man08] Cor. 7.22, pag. 135). Per ogni $x \in U_\alpha$, consideriamo

$$H^\alpha_x \colon E_x \times E_x \to \mathbb{C}$$

$$(u, v) \mapsto \langle \pi_2\psi_\alpha((x, u)), \pi_2\psi_\alpha((x, v))\rangle_{\mathbb{C}^k}$$

dove con $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^k}$ e π_2 si intendono rispettivamente il prodotto hermitiano standard su $\mathbb{C}^k$ e la proiezione sul secondo fattore, in questo caso $\pi_2 \colon U_\alpha \times \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^k$. Sia $\{f_\alpha\}$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{U_\alpha\}$, e definiamo

$$H_x = f_\alpha(x)H^\alpha_x.$$

H_x verifica banalmente le proprietà $(i) - (iii)$, mentre il fatto che $x \mapsto H_x$ sia C^∞ è immediata conseguenza del richiedere questa proprietà sulle funzioni della partizione. □

2.2 Strutture hermitiane e connessioni

Sia ∇ una connessione su E fibrato vettoriale complesso di rango k e sia $S = (s_1, \dots, s_k)$ un riferimento locale per E sopra un aperto U della varietà M, fissato ed opportunamente piccolo. Indicando con $\omega = \omega(S)$ la matrice di 1-forme della connessione associata al riferimento S e con $\nabla u(S) = ((\nabla u(S))_1, \dots, (\nabla u(S))_k)$ il vettore delle coordinate di ∇u, sempre rispetto al riferimento S, un'elementare applicazione della regola di Leibniz prova che

$$\begin{aligned} \nabla u(S)_\alpha \otimes s_\alpha = \nabla u = {} & \mathrm{d}\, u_\alpha(S) \otimes s_\alpha + u_\beta(S)\omega(S)_{\alpha\beta} \otimes s_\alpha = \\ = {} & [\mathrm{d}\, u_\alpha(S) + u_\beta(S)\omega(S)_{\alpha\beta}] \otimes s_\alpha. \\ \Longrightarrow {} & \nabla u(S) = [\mathrm{d} + \omega(S)]u(S). \end{aligned} \tag{3}$$

Per semplicità di notazione abbiamo introdotto l'operatore differenziale $\mathrm{d} + \omega(S)$ pensando che agisca sul vettore delle coordinate $u(S)$ in accordo con la (3).

Il resto di questo seminario è incentrato attorno al seguente concetto.

Definizione 2.2. Sia H una struttura hermitiana sul fibrato vettoriale complesso E. Sia inoltre $\nabla\colon C^\infty(\Lambda^p(E)) \to C^\infty(\Lambda^{p+1}(E))$ l'estensione alle p-forme di una data connessione. Diremo che ∇ è una H-connessione se la struttura H, vista come un campo di forme bilineare su E a valori in $\mathbb{C}$, è parallela a ∇, ossia se per ogni $u,\ v \in C^\infty(E)$ si ha

$$\mathrm{d}\, H(u,v) = H(\nabla u, v) + H(u, \nabla v). \tag{4}$$

In molti testi la nozione di parallelismo introdotta nella precedente definizione è detta compatibilità della connessione rispetto alla metrica o, più brevemente, si dice che la connessione è metrica (rispetto ad H).

Proposizione 2.3. *Con le notazioni precedentemente introdotte, ∇ è una H-connessione se e solo se*

$$\mathrm{d}\, H(S) = H(S) \cdot \omega(S) + \overline{\omega(S)^t} \cdot H(S).$$

Dimostrazione. Supponiamo che ∇ sia una H-connessione. Sopprimendo nella notazione la dipendenza da S abbiamo

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\, H_{\alpha\beta} =&\ \mathrm{d}\, H(s_\beta, s_\alpha) = H(\nabla s_\beta, s_\alpha) + H(s_\beta, \nabla s_\alpha) = \\ &= H(\omega_{\gamma\beta} s_\gamma, s_\alpha) + H(s_\beta, \omega_{\mu\alpha} s_\mu) = \\ &= \omega_{\gamma\beta} H_{\alpha\gamma} + \overline{\omega_{\mu\alpha}} H_{\mu\beta} \\ \Longrightarrow&\ \mathrm{d}\, H_{\alpha\beta} = (\omega \cdot H)_{\alpha\beta} + (\overline{\omega^t} \cdot H)_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Viceversa,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\, H(u,v) =&\ \mathrm{d}(\overline{v}^t \cdot H \cdot u) = (\mathrm{d}\, \overline{v})^t \cdot H \cdot u + \overline{v}^t \cdot \mathrm{d}\, H \cdot u + \overline{v}^t \cdot H \cdot \mathrm{d}\, u \\ &= (\mathrm{d}\, \overline{v} + \overline{\omega \cdot v})^t \cdot H \cdot u + \overline{v}^t \cdot H \cdot (\mathrm{d}\, u + \omega \cdot u) = \\ &= H(u, \nabla v) + H(\nabla u, v). \end{aligned}$$

Per ottenere la seconda uguaglianza abbiamo semplicemente sostituito la scrittura per $\mathrm{d}\, H$ e raccolto opportunamente. □

Proposizione 2.4. *Sia $(E \to M, H)$ un fibrato vettoriale hermitiano. Allora esiste almeno una H-connessione ∇ su E.*

Dimostrazione. Sia S un riferimento locale ortonormale. È sempre possibile scegliere un tale riferimento per il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt; inoltre è evidentemente sempre possibile trovare un ricoprimento aperto e localmente finito U_α tale che su ogni U_α abbiamo un riferimento ortonormale S_α. Il motivo di questa scelta è che per un tale S, $H(S) = \mathrm{Id}$. Affinché ∇ sia una H-connessione, la matrice di 1-forme associata deve soddisfare

$$0 = \omega(S_\alpha) + \overline{\omega(S_\alpha)^t},$$

ossia ω deve essere anti-hermitiana. Una scelta ammissibile è la matrice anti-hermitiana banale, $\omega(S_\alpha) = 0$. Per quanto dimostrato a lezione sappiamo che cambiando riferimento su U_α, la matrice associata a questo nuovo riferimento sarà data da

$$\omega(S_\alpha g) = g^{-1}\, \mathrm{d}\, g + 0. \tag{5}$$

Prendiamo allora questa come definizione per $\omega(S_\alpha g)$ e osservando che $H(S_\alpha g) = \overline{g}^t \cdot H(S_\alpha) \cdot g = \overline{g}^t \cdot g$, otteniamo

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\, H(S_\alpha g) = &\ \mathrm{d}(\overline{g}^t \cdot g) = \mathrm{d}\, \overline{g}^t \cdot g + \overline{g}^t \cdot \mathrm{d}\, g = \\ = &\ \mathrm{d}\, \overline{g}^t \cdot (\overline{g}^t)^{-1} \cdot \overline{g}^t \cdot g + \overline{g}^t \cdot g \cdot g^{-1} \cdot \mathrm{d}\, g = \\ = &\ \overline{\omega(S_\alpha g)}^t \cdot H(S_\alpha g) + H(S_\alpha g)\omega(S_\alpha g). \end{aligned} \tag{6}$$

Questo, per la precedente proposizione, è equivalente alla compatibilità con la struttura.

Sia ora $\{f_\alpha\}$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{U_\alpha\}$ e sia ∇_α la connessione su $E_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$ definita in coordinate rispetto a S_α come

$$\nabla_\alpha u(S_\alpha) = \mathrm{d}\, u.$$

Rispetto a cambiamenti di riferimento si comporta secondo la (5) ed è, per costruzione, una H-connessione su E_α. Allora $\nabla = f_\alpha \nabla_\alpha$ è una ben definita connessione tale che

$$\begin{aligned} H(\nabla u, v) + H(u, \nabla v) = &\ f_\alpha(H(\nabla_\alpha u, v) + H(u, \nabla_\alpha v)) = \\ = &\ \sum_\alpha f_\alpha\, \mathrm{d}\, H(u, v) = \mathrm{d}\, H(u, v). \end{aligned}$$

Abbiamo dunque costruito una H-connessione, provando così la tesi. □

Da come abbiamo costruito la connessione metrica nella dimostrazione della precedente proposizione è chiaro che questa può non essere unica (abbiamo fatto diverse scelte). Vedremo nella seguente sezione che, sotto opportune ipotesi aggiuntive, nel caso di fibrati vettoriali olomorfi (e non più solo complessi) riusciremo ad individuarne canonicamente una sola. Come la maggior parte dei lettori avrà già intuito l'oggetto a cui arriveremo rappresenta l'analogo "complesso" della connessione di Levi-Civita su varietà riemanniane.

2.3 La connessione di Chern

Supponiamo ora che il fibrato vettoriale E sia olomorfo sulla varietà complessa M.

Teorema 2.5. *Sia E un fibrato vettoriale olomorfo e sia H una struttura hermitiana su E. Allora a H è canonicamente associata una connessione ∇ tale che, se $U \subset M$ è un aperto, sono verificate*

(*i*) *∇ è una H-connessione;*

(*ii*) *se $u \in C^\infty(U, E)$ è olomorfa come sezione di E allora $\nabla^{0,1} u = 0$.*

Dimostrazione. Sia S un riferimento locale olomorfo su U. Per prima cosa osserviamo che il punto (*ii*) è equivalente a chiedere che la matrice di 1-forme associata alla connessione, $\omega(S)$, sia di tipo $(1, 0)$. Infatti

$$\nabla u(S) = [\mathrm{d} + \omega(S)]u(S) = [\partial + \omega^{1,0}(S)]u(S) + [\overline{\partial} + \omega^{1,0}(S)]u(S),$$

dove $\omega = \omega^{1,0} + \omega^{0,1}$ è la decomposizione naturale. Pertanto

$$\nabla^{1,0} u(S) = [\partial + \omega^{1,0}(S)]u(S)$$

e

$$0 = \nabla^{0,1} u(S) = [\overline{\partial} + \omega^{0,1}(S)]u(S).$$

Essendo u una sezione olomorfa ed essendo S un riferimento olomorfo si ha che $\overline{\partial} u(S) = 0$. Dunque

$$0 = \nabla^{0,1} u(S) = \omega^{0,1}(S)u(S).$$

Supponiamo ora di avere una connessione che soddisfi le richieste (i), (ii) e sia $\omega(S)$ la matrice di connessione associata al riferimento olomorfo S su U. Essendo ∇ compatibile con la struttura hermitiana si ha

$$\mathrm{d}\, H(S) = H(S) \cdot \omega(S) + \overline{\omega(S)}^t \cdot H(S).$$

Poiché ∇ soddisfa anche la seconda condizione, come abbiamo già ossevato, $\omega(S)$ è di tipo (1,0). Allora

$$\partial H(S) = H(S) \cdot \omega(S)$$

e

$$\overline{\partial} H(S) = \overline{\omega(S)}^t \cdot H(S).$$

Dalla prima relazione segue che

$$\omega(S) = H(S)^{-1} \cdot \partial H(S). \tag{7}$$

Scegliamo la (7) come definizione per $\omega(S)$. Una connessione costruita a partire dalla matrice $\omega(S)$ chiaramente soddisfa entrambe le proprietà desiderate. Inoltre, se Sg è un altro riferimento olomorfo, abbiamo

$$H(Sg) = \overline{g}^t \cdot H(S) \cdot g,$$

così che si ha

$$H(Sg)^{-1} = g^{-1} \cdot H(S)^{-1} \cdot (\overline{g}^t)^{-1}.$$

Da questa segue che

$$\begin{aligned} g \cdot \omega(Sg) = g \cdot [H(Sg)^{-1} \cdot \partial H(Sg)] = \\ &= H(S)^{-1} \cdot (\overline{g}^t)^{-1} \cdot \partial(\overline{g}^t \cdot H(S) \cdot g) = \\ &= H(S)^{-1} \cdot (\overline{g}^t)^{-1} \cdot [\overline{g}^t \cdot \partial H(S) \cdot g + \overline{g}^t \cdot H(S) \cdot \partial g + \partial \overline{g}^t \cdot H(S) \cdot g]. \end{aligned}$$

La precedente formula si semplifica notevolmente ricordando che g è un cambiamento di riferimento olomorfo e che allora vale $\partial \overline{g}^t = \overline{\overline{\partial} g^t} = 0$ e $\partial g = \mathrm{d}\, g$. Da questa osservazione si ha, infatti, che

$$g \cdot \omega(Sg) = H(S)^{-1} \partial H(S) \cdot g + \mathrm{d}\, g = \omega(S) \cdot g + \mathrm{d}\, g.$$

Questa condizione ci dice che la matrice ω definisce una connessione globale, la tesi è pertanto dimostrata. □

Ricordiamo che nel precedente seminario si è visto che se su un fibrato vettoriale complesso è assegnata una connessione tale che

$$(R^{\nabla})^{0,2} = (\nabla^{0,1})^2 = 0,$$

allora E è un fibrato olomorfo con struttura olomorfa data da

$$\overline{\partial} = \nabla^{0,1}. \tag{8}$$

Il precedente risultato si può dire che inverta questa situazione: poiché la condizione (ii) è equivalente a chiedere (8), abbiamo dimostrato che su un fibrato olomorfo con struttura hermitiana esiste un'unica connessione compatibile con H per cui valga anche (8) e quindi tale la parte $(0,2)$ della sua curvatura sia nulla, infatti

$$(R^{\nabla})^{0,2}(\sigma) = \overline{\partial}^2(\sigma) = 0.$$

Va inoltre sottolineato che la dimostrazione è costruttiva, infatti la (7) è una semplice scrittura che esprime la connessione di Chern in termini della struttura hermitiana.

3 Classe di Chern di un fibrato lineare – Silvia Ghinassi

Per gli argomenti trattati in questa sezione si veda [GH94], Ch.1, Sect.1.

Ci allontaniamo ora dagli argomenti finora trattati, più attinenti alla geometria riemanniana, per spostarci verso la geometria algebrica. In questo seminario, grazie ad alcuni strumenti di coomologia a valori in un fascio, vogliamo dare una definizione di classe di Chern nel caso di fibrati lineari alternativa rispetto a quella data a lezione, per poi mostrare che le due definizioni sono effettivamente equivalenti. Vedremo, soprattutto nel successivo seminario, come questa definizione sia un po' più "concreta" della precedente.

Prima di iniziare a parlare di fibrati lineari abbiamo bisogno di un'importantissima osservazione.

Lemma 3.1. *Data M varietà complessa, e una famiglia di applicazioni $\{g_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k,\mathbb{C})\}$ subordinate a un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ di M tali che per ogni $p \in U_\alpha \cap U_\beta$,*

$$\begin{cases} g_{\beta\alpha}(p) = g_{\alpha\beta}(p)^{-1}; \\ g_{\alpha\beta}(p)g_{\beta\gamma}(p) = g_{\alpha\gamma}(p). \end{cases} \tag{9}$$

è univocamente definito un fibrato complesso di rango k $\pi\colon E \to M$ per il quale $\mathcal{U}$ è un ricoprimento banalizzante e le cui funzioni di transizione coincidono con le $g_{\alpha\beta}$.

Dimostrazione. Definiamo $\widetilde{E} = \sqcup_{\alpha\in A} U_\alpha \times \mathbb{C}^k$. Introduciamo ora una relazione di equivalenza su tale insieme; diciamo che $(p,v) \sim (p',v')$ se e solo se $p = p'$ e $v' = g_{\alpha\beta}(p)v$. Dalle condizioni (9) (dette *condizioni di cociclo*) è ovvio che tale relazione è di equivalenza. Definiamo dunque $E = \widetilde{E}/\sim$. È naturalmente definita un'applicazione suriettiva

$$\begin{aligned} \pi\colon E &\to M \\ [(p,v)] &\mapsto p \end{aligned}$$

e inoltre possiamo definire $E_p = \pi^{-1}(p) = \{[(p,v)] \mid v \in \mathbb{C}^k\} \cong \{p\} \times \mathbb{C}^k \cong \mathbb{C}^k$ (l'isomorfismo è dato dal fatto che le $g_{\alpha\beta}(p)$ sono matrici invertibili). Infine, definiamo $\varphi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to$

$U_\alpha \times \mathbb{C}^k$ come $\varphi_\alpha([(p,v)]) = (p,v)$. Anche in questo caso è di immediata verifica la relazione $g_{\alpha\beta}(p) = (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})|_{E_p}$ cioè che la mappa $\varphi_\alpha\varphi_\beta^{-1} \colon (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^k \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^k$ è data da $(p,v) \mapsto (p, g_{\alpha\beta}(p)v)$ e il fatto che tali applicazioni siano banalizzazioni locali per il fibrato (E,π,M). L'unicità segue dal fatto che non abbiamo fatto alcuna scelta. $\square$

Osservazione 3.1. Tale risultato è ovviamente vero anche in un contesto molto più generale, per fibrati vettoriali qualsiasi.

3.1 Fibrati lineari

D'ora in poi tutti i fibrati sono assunti essere olomorfi di rango 1 (detti fibrati lineari o in rette), $\pi \colon L \to M$ su una varietà complessa M. Ricordiamo che, per definizione, abbiamo un ricoprimento aperto di M, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ banalizzante per il fibrato L, con banalizzazioni locali $\varphi_\alpha \colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}$. Le funzioni di transizione $g_{\alpha\beta} \colon U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{C}^*$ sono definite, per ogni $p \in M$, $g_{\alpha\beta}(p) = (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})|_{L_p}$. Per definizione le funzioni di transizione sono olomorfe, non nulle e soddisfano (9). Dato un tale fibrato, per ogni collezione di funzioni olomorfe mai nulle $\{f_\alpha \in \mathcal{O}^*(U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ possiamo definire banalizzazioni locali per (L,π,M), ponendo $\psi_\alpha = f_\alpha\varphi_\alpha$. Le relative funzioni di transizione $h_{\alpha\beta}$ sono legate alle precedenti dalla relazione

$$h_{\alpha\beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta} g_{\alpha\beta}. \tag{10}$$

Viceversa, se supponiamo che $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ siano altre banalizzazioni locali per (L,π,M) subordinate a $\mathcal{U}$, allora sono ottenute in questo modo; infatti, definiamo f_α dalla relazione

$$\begin{aligned} \psi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1} \colon U_\alpha \times \mathbb{C} &\to U_\alpha \times \mathbb{C} \\ (p,v) &\mapsto (p, f_\alpha(p)v). \end{aligned}$$

Allora $f_\alpha \colon U_\alpha \to \mathbb{C}^*$ olomorfe e vale

$$h_{\alpha\beta} = \psi_\alpha\psi_\beta^{-1} = \psi_\alpha\varphi_\alpha^{-1}\varphi_\alpha\varphi_\beta^{-1}\varphi_\beta\psi_\beta^{-1} = f_\alpha g_{\alpha\beta} f_\beta^{-1}$$

Abbiamo quindi dimostrato

Proposizione 3.2. *Due famiglie $\{g_{\alpha\beta}\}$ e $\{h_{\alpha\beta}\}$ definiscono lo stesso fibrato se e solo se esistono $f_\alpha \in \mathcal{O}^*(U_\alpha)$ tali che valga (10).*

Possiamo dare ai fibrati lineari una struttura di gruppo, con operazione di gruppo il prodotto tensoriale, passaggio all'inverso il duale e identità il fibrato banale, infatti $L^* \otimes L = L \otimes L^* = \mathrm{Hom}(L,L) = M \times \mathbb{C}$, il fibrato banale, perché abbiamo una sezione mai nulla del fibrato (data dall'identità).

Definizione 3.2. Il *gruppo di Picard di M* è $\mathrm{Pic}(M) = \{\pi \colon L \to M \mid \mathrm{rg}(L) = 1\}/\sim$, il gruppo dei fibrati lineari su M a meno di isomorfismo.

Grazie al Lemma 3.1 e alla Proposizione 3.2 possiamo dare un'interpretazione di teoria dei fasci ai fibrati lineari. Molto probabilmente molti di voi non conoscono la definizione di fascio, ma per quello che concerne questo seminario possiamo dare una descrizione di quello che interessa senza usare questa nozione. Limitiamoci a fornire la nozione di *germe di una funzione*. Per quello che ci interessa, consideriamo funzioni olomorfe mai nulle su un aperto di una varietà M (f è olomorfa se lo è ogni sua composizione con le carte di M). Date dunque $f\colon U \subset M \to \mathbb{C}^*$ e $g\colon V \subset M \to \mathbb{C}^*$ con U e V aperti, diciamo che $f \sim_x g$ se esiste un aperto $x \in W \subset U \cap V$ tale che $f|_W = g|_W$. Essendo ovviamente $\sim_x$ una relazione di equivalenza, definiamo la classe di equivalenza di f,

$$[f]_x = \{g\colon V \subset M \to \mathbb{C}^* | g \sim_x f\}$$

e definiamo l'insieme dei germi di funzioni nel punto x come l'insieme di tali classi di equivalenza.

Definiamo ora la coomologia di Čech a valori in un fascio, nel nostro caso il fascio delle funzioni olomorfe mai nulle. Questo fascio sulla varietà M, altro non è che l'insieme dei germi di tali funzioni, e per ogni $U \subset M$, l'insieme $\mathcal{O}^*(U)$ ha una struttura di gruppo data dalla moltiplicazione punto per punto e una restrizione naturale per ogni $V \subset U$ (data dalla restrizione di funzioni). Per definire una coomologia, abbiamo bisogno di definire un complesso. Definiamo le 0-cocatene e le 1-cocatene rispettivamente come

$$C^0(\mathcal{U}; \mathcal{O}^*) = \Pi_{\alpha \in A} \mathcal{O}^*(U_\alpha), \qquad C^1(\mathcal{U}; \mathcal{O}^*) = \Pi_{\alpha < \beta} \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$$

e allo stesso modo possiamo definire le q-cocatene. Definiamo ora un differenziale

$$\begin{aligned} \check{\delta}\colon C^0(\mathcal{U}; \mathcal{O}^*) &\to C^1(\mathcal{U}; \mathcal{O}^*) \\ \{f_\alpha\} &\mapsto \{f_\beta - f_\alpha\}, \end{aligned}$$

analogamente

$$\begin{aligned} \check{\delta}\colon C^1(\mathcal{U}; \mathcal{O}^*) &\to C^2(\mathcal{U}; \mathcal{O}^*) \\ \{g_{\alpha\beta}\} &\mapsto \{g_{\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma} + g_{\alpha\beta}\} \end{aligned}$$

e allo stesso modo le successive; gli elementi a destra delle uguaglianze sono intesi ristretti ad un'opportuna intersezione. È proprio questa necessità di usare delle restrizioni che ci porta a considerare i germi di funzioni, che sono ciò che si generalizzerà a un fascio. Si dimostra che $(C^q(\mathcal{U}; \mathcal{O}^*), \check{\delta})$ è un complesso di coomologia, infatti $\check{\delta}^2 = 0$, ad esempio

$$\check{\delta}^2(\{f_\alpha\}) = \check{\delta}(\{f_\beta - f_\alpha\}) = \{(f_\gamma - f_\beta) - (f_\gamma - f_\alpha) + (f_\beta - f_\alpha)\} = 0.$$

Definiamo quindi i cocicli (ciò che è "chiuso"), i cobordi (ciò che è "esatto") e dunque consideriamo $H^q(M; \mathcal{O}^*)$ come il quoziente cocicli su cobordi (osserviamo che a priori c'è una forte dipendenza dal ricoprimento $\mathcal{U}$; si dimostra però che sotto opportune ipotesi, tale coomologia è indipendente dal ricoprimento). Per approfondire questi argomenti (fasci e coomologia di Čech), rimandiamo a [BT82], [GH94].

Torniamo quindi al nostro fibrato lineare. Per quanto detto sopra, abbiamo quindi che le funzioni di transizione $\{g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)\}$ per un fibrato lineare rappresentano una 1-cocatena di Čech su M a coefficienti nel fascio $\mathcal{O}^*$, $C^1(M; \mathcal{O}^*)$; le relazioni di cociclo (9), se scritte in notazione additiva, cioè

$$\begin{cases} g_{\beta\alpha} = -g_{\alpha\beta} \\ g_{\alpha\beta} + g_{\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma} = 0, \end{cases}$$

dicono che $\check{\delta}(\{g_{\alpha\beta}\}) = 0$, cioè, per l'appunto, che le $\{g_{\alpha\beta}\}$ rappresentano un cociclo di Čech. Infine, per la Proposizione 3.2, due cocicli $\{g_{\alpha\beta}\}$ e $\{h_{\alpha\beta}\}$ definiscono lo stesso fibrato lineare se e solo se la loro differenza $\{g_{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}^{-1}\}$ è un cobordo di Čech; ancora, in notazione additiva

$$\{g_{\alpha\beta} - h_{\alpha\beta}\} = \{f_\beta - f_\alpha\} = \check{\delta}(\{f_\alpha\}).$$

Allora l'insieme dei fibrati lineari su una varietà M altro non è che $H^1(M; \mathcal{O}^*)$. Osserviamo che, parlando qui di gruppi abeliani, stiamo usando una terminologia additiva nonostante la notazione sia in modo naturale moltiplicativa.

Ricordando come abbiamo definito $\mathrm{Pic}(M)$ e grazie al Lemma 3.1, poiché se $\{g_{\alpha\beta}\}$ sono le funzioni di transizione di L e $\{g'_{\alpha\beta}\}$ quelle di L', abbiamo che le funzioni di transizione di $L \otimes L'$ e L^* sono, rispettivamente, $\{g_{\alpha\beta}g'_{\alpha\beta}\}$ e $\{g_{\alpha\beta}^{-1}\}$, la struttura di gruppo sui fibrati coincide con quella del gruppo di coomologia. Abbiamo dunque dimostrato

Proposizione 3.3. *Il gruppo di Picard di M coincide con il primo gruppo di coomologia di Čech di M,*

$$\mathrm{Pic}(M) = H^1(M; \mathcal{O}^*).$$

3.2 Classe di Chern di un fibrato lineare

Sia M una varietà complessa compatta di dimensione n. La successione esatta di fasci

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \to 0,$$

la prima mappa data dall'inclusione, dà una mappa di cobordo in coomologia

$$H^1(M; \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta} H^2(M; \mathbb{Z}).$$

Se $L \in \mathrm{Pic}(M) = H^1(M; \mathcal{O}^*)$, definiamo la *prima classe di Chern* $\widetilde{c}_1(L) = \delta(L) \in H^2(M; \mathbb{Z})$. Poiché abbiamo una mappa naturale $H^2(M; \mathbb{Z}) \to H^2_{\mathrm{dR}}(M)$, come vedremo meglio in seguito, con un abuso di notazione scriveremo $\widetilde{c}_1(L) \in H^2_{\mathrm{dR}}(M)$ intendendo l'immagine tramite l'isomorfismo. Ovviamente anche in questo caso potremmo definire la classe totale di Chern, come $\widetilde{c}(L) = c_0(L) + \widetilde{c}_1(L)$, ma essendo $c_0 = 1$ per ogni fibrato, nel caso di un fibrato in rette parlare di classe totale o prima classe di Chern è assolutamente identico; ci riferiamo quindi a $\widetilde{c}_1(L)$ semplicemente come *classe di Chern di L*.

Dalla definizione, seguono immediatamente le relazioni

$$\widetilde{c}_1(L \otimes L') = \widetilde{c}_1(L) + \widetilde{c}_1(L'), \qquad \widetilde{c}_1(L^*) = -\widetilde{c}_1(L).$$

Inoltre, se $f\colon M \to N$ è un'applicazione olomorfa tra varietà complesse allora il diagramma

$$\begin{tikzcd} H^1(M; \mathcal{O}^*) \arrow[r, "\delta"] & H^2(M; \mathbb{Z}) \\ H^1(N; \mathcal{O}^*) \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "f^*"] & H^2(N; \mathbb{Z}) \arrow[u, "f^*"] \end{tikzcd}$$

commuta, e quindi se $L \to N$ è un fibrato lineare,

$$\widetilde{c}_1(f^{-1}L) = f^*\widetilde{c}_1(L).$$

Esempio 3.3. Per cercare di capire di cosa stiamo parlando, facciamo un esempio di fibrato lineare. Consideriamo $M = \mathbb{P}^n\mathbb{C}$ e su di essa il fibrato tautologico, $L = \{([Z], v) \in \mathbb{P}^n\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n+1} \mid v \in \mathbb{C}Z\}$, che è un fibrato lineare (la fibra su $[Z]$ è la retta generata da Z). Qui e di seguito, per comodità di notazione scriviamo $[Z] = [Z_0, \dots, Z_n]$, coordinate omogenee e $v = (v_0, \dots, v_n)$. Consideriamo il classico ricoprimento di $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha=0}^n$, con $U_\alpha = \{[Z] \in \mathbb{P}^n\mathbb{C} \mid Z_\alpha \neq 0\}$. Le banalizzazioni del fibrato tautologico sono date da

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha \colon L|_{U_\alpha} &\to U_\alpha \times \mathbb{C} \\ ([Z], v) &\mapsto ([Z], v_\alpha) \end{aligned}$$

con inversa $\varphi_\alpha^{-1}([Z], w_\alpha) = ([Z], \frac{w_\alpha}{Z_\alpha}(Z_0, \dots, Z_n))$. Abbiamo quindi che le funzioni di transizione sono

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}([Z], v_\beta) = \varphi_\alpha([Z], \frac{v_\beta}{Z_\beta}(Z_0, \dots, Z_n)) = ([Z], \frac{v_\beta}{Z_\beta} Z_\alpha)$$

cioè

$$g_{\alpha\beta} = \frac{Z_\alpha}{Z_\beta}.$$

Se consideriamo ora la successione esatta

$$\cdots \to H^1(\mathbb{P}^n\mathbb{C}; \mathcal{O}) \to H^1(\mathbb{P}^n\mathbb{C}; \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta} H^2(\mathbb{P}^n\mathbb{C}; \mathbb{Z}) \to \cdots$$

essendo però $H^1(\mathbb{P}^n\mathbb{C}; \mathcal{O}) = 0$ e $H^2(\mathbb{P}^n\mathbb{C}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ (il primo diamolo per buono, per il secondo possiamo invece ricordare l'isomorfismo con la coomologia di de Rham e il fatto che $\mathbb{P}^n$ ha una 2-cella , che è un $\mathbb{P}^1$), otteniamo che la mappa di cobordo è $\delta \colon \mathrm{Pic}(M) \hookrightarrow H^2(\mathbb{P}^n\mathbb{C}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, cioè un fibrato lineare sul proiettivo è univocamente determinato, a meno di isomorfismo, dalla sua classe di Chern.

In letteratura, il fibrato tautologico sul proiettivo si indica con $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$, e il motivo è che la sua classe di Chern corrisponde proprio a -1. Vedremo meglio questa corrispondenza nel prossimo seminario.

Facciamo ora un'interessante osservazione. Se leviamo da quanto detto fino ad ora l'aggettivo "olomorfo" e consideriamo quindi i fasci delle funzioni $\mathcal{C}^\infty$ $\mathcal{A}$, e quelle delle funzioni lisce mai nulle $\mathcal{A}^*$ tutto continua a funzionare allo stesso modo; le funzioni di transizione rappresentano un cociclo di Čech, $\{g_{\alpha\beta}\} \in C^1(M; \mathcal{A}^*)$ e a meno di isomorfismo un fibrato è determinato in modo unico dalla classe di coomologia $[\{g_{\alpha\beta}\}] \in H^1(M; \mathcal{A}^*)$. Anche in questo caso abbiamo la successione esatta corta di fasci

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{A} \xrightarrow{\exp} \mathcal{A}^* \to 0,$$

che dà luogo a successione esatta lunga in coomologia con una mappa di cobordo δ' e possiamo dunque definire, per un fibrato lineare $\mathcal{C}^\infty$, la sua classe di Chern come $\widetilde{c}_1(L) = \delta'(L) \in H^2(M; \mathbb{Z})$. Poiché $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathcal{A}$ e $\mathcal{O}^* \hookrightarrow \mathcal{A}^*$ e le inclusioni sono "funtoriali" (cioè si comportando bene passando in coomologia), otteniamo il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} H^1(M; \mathcal{A}) \arrow[r] & H^1(M; \mathcal{A}^*) \arrow[r, "\delta'"] & H^2(M; \mathbb{Z}) \\ H^1(M; \mathcal{O}) \arrow[r] \arrow[u, hook] & H^1(M; \mathcal{O}^*) \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, hook] & H^2(M; \mathbb{Z}) \arrow[u, equal] \end{tikzcd}$$

in cui entrambe le righe sono esatte (gli oggetti che appaiono in questo diagramma sono coomologie a valori in un fascio; ora, non non abbiamo detto cosa significhino esattamente, ma per quello che ci interessa possiamo sorvolare anche su questo). Allora la definzione appena data di classe di Chern coincide con quella precedente nel caso L sia un fibrato olomorfo. Ma il fascio $\mathcal{A}$ è fine (non ci curiamo di cosa significhi in questo contesto), e quindi $H^1(M;\mathcal{A}) = 0$ e quindi δ' è una mappa iniettiva. Riassumendo quanto abbiamo detto, otteniamo

Proposizione 3.4. *Un fibrato lineare complesso è determinato, a meno di isomorfismi $\mathcal{C}^\infty$ dalla sua classe di Chern.*

3.3 Relazione tra le due definizioni di classe di Chern

Riprendiamo ora gli argomenti che abbiamo trattato a lezione. Abbiamo visto che se $\pi\colon E \to M$ è un fibrato di rango k e ∇ una connessione su E, allora abbiamo un operatore di curvatura $K = K_\nabla$ che localmente, relativamente ad una banalizzazione del fibrato φ_α si rappresenta come una matrice di 2-forme Ω_α (l'α che usiamo qui sta ad indicare che ci troviamo nell'aperto U_α, quindi il nostro Ω_α corrisponde alla matrice Ω, non alle sue componenti che abbiamo denotato in aula come Ω_α^β). Se φ_β è un'altra banalizzazione, abbiamo dunque in notazione matriciale

$$\Omega_\beta = g_{\alpha\beta}\Omega_\alpha g_{\alpha\beta}^{-1},$$

infatti, se prendiamo come riferimento $S_\alpha(p) = \varphi_\alpha^{-1}(p,1)$, il cambio di riferimento è dato proprio dalle funzioni di transizione. In particolare, nel nostro caso, $k = 1$, quindi $\mathrm{GL}(1,\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ è commutativo e quindi $\Omega = \Omega_\alpha = \Omega_\beta$ è una 2-forma ovunque definita detta *forma di curvatura di E*. Inoltre, tale forma è chiusa, perché come abbiamo visto a lezione, se ω_α è la 1-forma (ricordiamo che siamo nel caso lineare) associata a ∇ in U_α, abbiamo

$$\Omega = d\omega_\alpha - \omega_\alpha \wedge \omega_\alpha = d\omega_\alpha.$$

Infine, la definizione di classe di Chern data in classe per un fibrato lineare, in cui abbiamo osservato la forma di curvatura essere globalmente definita e chiusa, si riduce a $c_1(L) = \left[-\frac{\Omega}{2\pi i}\right] \in H^2_{\mathrm{dR}}(M)$.

Come ci si può aspettare, le due definzioni di classe di Chern per un fibrato lineare coincidono. Per dimostrarlo, abbiamo però bisogno di utilizzare l'espressione esplicita dell'isomorfismo di de Rham tra la coomologia a valori nel fascio costante $\mathbb{Z}$ e la coomologia di de Rham. L'isomorfismo richiede però ulteriori strumenti di coomologia a valori in un fascio che non è di nostro interesse sviluppare, quindi cercheremo, nella dimostrazione, di evitare alcune parti tecniche riguardandi la forma esplicita dell'isomorfismo, usando al suo posto un'idea più intuitiva.

Teorema 3.5. *Per ogni fibrato lineare $\pi\colon L \to M$ con forma di curvatura Ω,*

$$\widetilde{c}_1(L) = \left[-\frac{1}{2\pi i}\Omega\right] = c_1(L) \in H^2_{dR}(M).$$

Dimostrazione. Come al solito, abbiamo $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un ricoprimento aperto di M, banalizzante per L con banalizzazioni $\{\varphi_\alpha\}$ e funzioni di transizione associate $\{g_{\alpha\beta}\}$. Possiamo assumere che gli U_α siano semplicemente connessi e definiamo

$$h_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi i}\log g_{\alpha\beta}.$$

Per definizione di $\check{\delta}$, se poniamo

$$z_{\alpha\beta\gamma} = h_{\alpha\beta} + h_{\beta\gamma} - h_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2\pi i}(\log g_{\alpha\beta} + \log g_{\beta\gamma} - \log g_{\alpha\gamma}),$$

$\{z_{\alpha\beta\gamma}\}$ è un 2-cociclo che rappresenta $\widetilde{c}_1(L)$; i logaritmi sono complessi, quindi le relazioni di cociclo (9) non implicano che la somma faccia 0, ma che quello che otteniamo è un multiplo intero di $2\pi i$ e quindi che $[z_{\alpha\beta\gamma}] \in H^2(M;\mathbb{Z})$.

Sia ora ∇ una connessione su L e, rispetto al riferimento $S_\alpha(p) = \varphi_\alpha^{-1}(p,1)$, abbiamo visto che localmente ∇ si rappresenta con la matrice di connessione, nel nostro caso una 1-forma ω_α. In $U_\alpha \cap U_\beta$, abbiamo visto che, cambiando riferimento S_β, vale

$$\omega_\alpha = g_{\alpha\beta}\omega_\beta g_{\alpha\beta}^{-1} + dg_{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}^{-1} = \omega_\beta + dg_{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}^{-1}$$

e quindi

$$\omega_\beta - \omega_\alpha = -dg_{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}^{-1} = -d(\log g_{\alpha\beta}),$$

e ricordiamo che abbiamo visto che $\Omega = d\omega_\alpha$.

Poichè Ω è una 2-forma chiusa e $\widetilde{c}_1(L)$ è un cociclo di Čech, abbiamo bisogno dell'isomorfismo di de Rham, cioè un isomorfismo tra la coomologia a valori nel fascio costante $\mathbb{R}$ (nella quale quella a valori in $\mathbb{Z}$ si immerge) e la coomologia di de Rham (o equivalentemente tra la coomologia a valori in $\mathbb{C}$ e la coomologia di de Rham complessificata). Nella dimostrazione del Teorema di de Rham si vede che tale isomorfismo è dato in due passi da due mappe di cobordo, grazie a due successioni esatte di fasci. I fasci in questione sono i fasci di k-forme differenziali e l'osservazione fondamentale per recuperare la classica coomologia di de Rham è che la coomologia a valori nel fascio delle 2-forme chiuse, quozientata per l'immagine della coomologia a valori nel fascio delle 1-forme altro non è che $H^2_{\mathrm{dR}}(M)$, come l'intuito ci avrebbe potuto suggerire.

Alla luce di ciò, le due mappe di cobordo δ_1 e δ_2 le possiamo pensare in maniera puramente formale, come "simili" a quelle che conosciamo; devo prima prendere una controimmagine dell'oggetto chiuso e poi calcolarne il differenziale di Čech del complesso in questione, analogo a quello che abbiamo visto all'inizio (abbiamo due passi e non tre nella definizione di mappa di cobordo, perché le prime applicazioni che abbiamo nelle successione esatte corte sono inclusioni). Detto grossolanamente "tolgo il differenziale e faccio la differenza ciclando gli indici". Abbiamo dunque

$$\delta_2 \circ \delta_1 \colon H^2_{\mathrm{dR}}(M) \to H^2(M;\mathbb{Z})$$

date da

$$\begin{aligned}\delta_2(\delta_1(\Omega)) &= \delta_2(\delta_1(\{d\omega_\alpha\})) = \delta_2(\{\omega_\beta - \omega_\alpha\}) = \\ &= \delta_2(\{-d(\log g_{\alpha\beta})\}) = \{-(\log g_{\alpha\beta} + \log g_{\beta\gamma} - \log g_{\alpha\gamma})\} = \\ &= -2\pi i[z_{\alpha\beta\gamma}] = -2\pi i\widetilde{c}_1(L),\end{aligned}$$

il che conclude la dimostrazione. □

4 Divisori e fibrati lineari – Matteo Braghiroli

Per gli argomenti trattati in questa sezione si veda [GH94], Ch.1, Sect.1.

4.1 Divisori ed equivalenza lineare

Iniziamo ricordando che una sottovarietà analitica $V \subset M$ di codimensione 1 è un'ipersuperficie, ovvero è localmente esprimibile come il luogo degli zeri di una singola funzione olomorfa (non identicamente nulla) F. Più precisamente, per ogni $p \in M$ esiste un aperto U contenente p e una funzione $0 \neq F \in \mathcal{O}(U)$ tali che $U \cap V = \{F = 0\}$. Inoltre, a meno di moltiplicazione per scalari, possiamo supporre questa F unica, nel senso che un'altra funzione G definita nello stesso aperto in cui è definita F e che si annulli in V sarà per forza divisibile per F.

Ricordiamo anche che una sottovarietà analitica si scrive in maniera unica come unione di sottovarietà irriducibili

$$V = \bigcup_i V_i.$$

È proprio questo a ispirare la seguente fondamentale

Definizione. *Un* divisore *D su M è una combinazione formale localmente finita a coefficienti interi di ipersuperfici analitiche irriducibili*

$$D = \sum_i n_i \cdot V_i.$$

Denotiamo con $\mathrm{Div}(M)$ il gruppo additivo dei divisori su una varietà M, con la somma definita punto per punto.

Nel caso V sia una ipersuperficie, penseremo $V = \sum_i V_i$, dove $\{V_i\}$ è la sua decomposizione in irriducibili.

Nella sostanza, un divisore è l'oggetto più naturale per trasportare un certo tipo di informazioni su una varietà, come l'ordine di zeri e poli di una funzione meromorfa.

Cominciamo con una

Definizione 4.1. Se $0 \neq f \in \mathcal{O}(M)$ e V è un'ipersuperficie irriducibile definita in un intorno U di $p \in V$ come il luogo degli zeri di $0 \neq F \in \mathcal{O}(U)$, si definisce $\mathrm{ord}_{V,p}(f)$ l'unico intero per cui $f = F^n g$ con $g \in \mathcal{O}^*(U)$.

Si può dimostrare, tramite risultati basilari sulle funzioni olomorfe, che tale definizione non dipende da p ma solo da V, quindi d'ora in poi parleremo semplicemente di $\mathrm{ord}_V(f)$.

Possiamo ora spiegare compiutamente in che senso i divisori sono oggetti naturali per trasportare informazioni su zeri e poli di funzioni meromorfe.

Definizione 4.2. Sia $f \in \mathcal{M}^*(M)$, i.e. $f = g/h$ con $0 \neq g, h \in \mathcal{O}(M)$.

Il *divisore principale* di f è

$$(f) = \sum_V \mathrm{ord}_V(g) \cdot V - \sum_V \mathrm{ord}_V(h) \cdot V,$$

dove la sommatoria è fatta sulle ipersuperfici irriducibili (si può facilmente verificare che tali combinazioni lineari sono localmente finite).

I divisori principali hanno un'importanza particolare in quel che seguirà, importanza data dalla seguente

Definizione. *Due divisori D, E si dicono* linearmente equivalenti*, in simboli $D \sim E$, se la loro differenza è un divisore principale, i.e.*

$$D - E = (f)$$

per qualche $f \in \mathcal{M}^*(M)$.

Denotiamo con $D_\sim$ la classe di equivalenza lineare di D.

4.2 Divisori in teoria dei fasci

I divisori hanno una interessante interpretazione in teoria dei fasci, che ci tornerà utile in seguito. Prima di proseguire, vale la pena ricordare la differenza tra $\mathcal{O}^* = \{$funzioni olomorfe mai nulle$\}$ e $\{f \in \mathcal{O} \mid f \neq 0\}$, mentre si ha $\mathcal{M}^* = \{f \in \mathcal{M} \mid f \neq 0\}$.

Proposizione 4.1. *Nella terminologia introdotta in precedenza, si ha un isomorfismo di gruppi*

$$\mathrm{Div}(M) \cong H^0(M; \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*).$$

Dimostrazione. Questa dimostrazione risulta molto scorrevole utilizzando il linguaggio dei fasci. Essendone sprovvisti, ne forniremo una dimostrazione intuitiva.

Sia f un elemento di $H^0(M; \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*)$. Per come è definita, possiamo vedere f come una collezione $\{[f_\alpha]\}_{\alpha \in A}$ con $f_\alpha \in \mathcal{M}^*(U_\alpha)$. Poiché stiamo considerando il quoziente $\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$, il fatto che f sia chiusa, ovvero che $[f_\alpha - f_\beta] = 0$, si esprime moltiplicativamente come

$$\frac{f_\beta}{f_\alpha} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta).$$

Ne segue che, per ogni $V \subset M$ irriducibile tale che $V \cap U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$,

$$\mathrm{ord}_V(f_\alpha) = \mathrm{ord}_V(f_\beta).$$

Associamo dunque a f il ben definito divisore

$$(f) = \sum_V \mathrm{ord}_V(f_\alpha) \cdot V,$$

dove per ogni V scegliamo un α tale che $V \cap U_\alpha \neq \varnothing$. Osserviamo anche, contrariamente all'apparenza, che tale divisore non è principale perché f non è una ben definita funzione meromorfa.

D'altra parte, prendiamo un divisore $D = \sum_i a_i \cdot V_i$. Possiamo scegliere, per ogni α, una collezione di $g_{i\alpha} \in \mathcal{M}^*(U_\alpha)$ tali che se $V_i \cap U_\alpha$ è non vuoto, allora è il luogo degli zeri di $g_{i\alpha}$.

Se consideriamo $f_\alpha = \prod_i g_{i\alpha}^{a_i} \in \mathcal{M}^*(U_\alpha)$, otteniamo un elemento $f = \{[f_\alpha]\} \in H^0(M; \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*)$. Tale elemento è ben definito perché cambiare la scelta delle $g_{i\alpha}$ equivale a moltiplicarle per funzioni olomorfe non nulle, che ignoriamo passando al quoziente.

A questo punto è facile verificare che la corrispondenza che abbiamo costruito è biunivoca e un omomorfismo di gruppi, dunque un isomorfismo. □

4.3 Divisori e fibrati lineari

La ragione per cui abbiamo introdotto il concetto di divisore è che esiste una corrispondenza biunivoca (meglio: un isomorfismo di gruppi)

$$\mathrm{Div}(M)/\sim \longleftrightarrow \mathrm{Pic}(M)$$

Cominciamo col costruire, a partire da un divisore D un fibrato lineare.

Come abbiamo visto poc'anzi, dato un divisore D otteniamo delle funzioni $f_\alpha \in \mathcal{M}^*(U_\alpha)$ rappresentanti la $f \in H^0(M; \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*)$ corrispondente a D. Se definiamo $g_{\alpha\beta} = f_\alpha/f_\beta$, abbiamo che $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$ poiché f è chiusa (nel quoziente).

Inoltre, banalmente valgono le relazioni di cociclo:

$$g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = 1 = g_{\alpha\beta}g_{\beta\alpha}.$$

Dunque, per quanto visto nel seminario precedente, tali funzioni individuano un fibrato lineare, di cui sono le funzioni di transizione.

Se scegliamo altre funzioni f'_α rappresentanti f, abbiamo che $f'_\alpha/f_\alpha = h_\alpha \in \mathcal{O}^*(U_\alpha)$, da cui

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{f'_\beta}{f'_\alpha} = \frac{h_\beta f_\beta}{h_\alpha f_\alpha} = \frac{h_\beta}{h_\alpha} g_{\alpha\beta};$$

pertanto tale fibrato lineare, che denoteremo d'ora in poi con $[D]$, non dipende dalla scelta dei rappresentanti di f ma solo da D.

Osservazione 4.3. Segue immediatamente dalla definizione che

$$[D+E] = [D] \otimes [E];$$

$$[-D] = [D]^\vee.$$

Riassumendo quanto fatto finora, abbiamo costruito un omomorfismo di gruppi

$$\mathrm{Div}(M) \to \mathrm{Pic}(M) \tag{11}$$
$$D \mapsto [D] \tag{12}$$

Quello che rimane da fare è verificare se questa mappa passa al quoziente per $\sim$, e valutare iniettività e suriettività.

Denotiamo con $\mathrm{PDiv}(M) \subseteq \mathrm{Div}(M)$ il sottogruppo dei divisori principali di M. Si osservi che quozientare $\mathrm{Div}(M)$ per $\sim$ equivale a quozientare per $\mathrm{PDiv}(M)$.

CIrca passaggio al quoziente e iniettività, enunciamo ora la seguente

Proposizione 4.2. $D \sim E \Leftrightarrow [D] \cong [E]$

Dimostrazione. Dimostriamo, equivalentemente, che D è principale $\Leftrightarrow$ $[D]$ è isomorfo al fibrato banale.

($\Rightarrow$). $D = (f) \Rightarrow$ per ogni α, possiamo scegliere $f_\alpha = f|_{U_\alpha} \Rightarrow\ g_{\alpha\beta} \equiv 1$ per ogni $\alpha, \beta\ \Rightarrow [D]$ è il fibrato banale.

($\Leftarrow$). $[D]$ è isomorfo al fibrato banale $\Rightarrow$ per ogni α esiste $h_\alpha \in \mathcal{O}^*(U_\alpha)$ tale che

$$\frac{f_\beta}{f_\alpha} = g_{\alpha\beta} = \frac{h_\beta}{h_\alpha} \cdot 1$$

(l'1 sta ad indicare la funzione di transizione del fibrato banale)

$\Rightarrow$ se definiamo localmente $f = \frac{f_\alpha}{h_\alpha}$, essa è una ben definita funzione in $\mathcal{M}^*(M)$ tale che $D = (f)$. □

Conseguentemente, non solo l'applicazione $D \mapsto [D]$ passa al quoziente, ma quella che ne risulta è un'applicazione iniettiva.

Per quanto riguarda la suriettività, occorre parlare di sezioni meromorfe di un fibrato lineare L.

Ricordiamo preliminarmente che una sezione $s \in \mathcal{O}(L)$ è data da una collezione di funzioni $s_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$ che soddisfino

$$s_\beta = g_{\alpha\beta} s_\alpha.$$

Consideriamo ora l'insieme $\mathcal{M}(L) = \mathcal{O}(L) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{M}$ delle sezioni meromorfe di L. Similmente al caso olomorfo si ha che una sezione $s \in \mathcal{M}(L)$ è data da una collezione di funzioni $s_\alpha \in \mathcal{M}(U_\alpha)$ che soddisfino

$$s_\beta = g_{\alpha\beta} s_\alpha.$$

Da tale relazione segue che $s_\beta / s_\alpha \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$, per cui è ben definito $\mathrm{ord}_V(s)$ totalmente in analogia col caso delle funzioni meromorfe. Di conseguenza definiamo

$$(s) = \sum_V \mathrm{ord}_V(s) \cdot V.$$

Possiamo ora enunciare l'ultima

Proposizione 4.3. *Sia L fibrato lineare e $s \in \mathcal{M}(L)$. Allora*

$$L = [(s)].$$

Dimostrazione. Immediata:

$$s_\beta = g_{\alpha\beta} s_\alpha \Rightarrow \frac{s_\beta}{s_\alpha} = g_{\alpha\beta} \Rightarrow \text{per come è definito, } L = [(s)].$$

□

Osserviamo anche che si dimostra facilmente un risultato inverso, per cui se $L = [D]$ allora ogni sezione $s \in \mathcal{M}(L)$ avrà $(s) = D$

In ogni caso, per ogni fibrato lineare L abbiamo esibito un divisore, $D = (s)$, per cui $L = [D]$. Ne segue che l'applicazione oggetto del presente paragrafo è suriettiva.

In conclusione, abbiamo costruito un isomorfismo di gruppi

$$\mathrm{Div}(M)/\sim\ \to \mathrm{Pic}(M) \tag{13}$$
$$D_\sim \mapsto [D] \tag{14}$$

4.4 Interpretazione coomologica dell'isomorfismo $\mathrm{Div}(M)/\sim\ \cong \mathrm{Pic}(M)$

L'applicazione $D \mapsto [D]$ ha un'interessante interpretazione in coomologia. Consideriamo la successione esatta

$$0 \to \mathcal{O}^* \xrightarrow{i} \mathcal{M}^* \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^* \to 0.$$

Da essa discende una successione esatta lunga in coomologia, di cui consideriamo la mappa di cobordo

$$\delta\colon H^0(M;\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) \to H^1(M;\mathcal{O}^*)$$

che per quanto abbiamo mostrato finora può essere considerata come

$$\delta\colon \mathrm{Div}(M) \to \mathrm{Pic}(M).$$

Viene naturale chiedersi che rappporto ci sia tra tale mappa e quella definita nel precedente paragrafo. La seguente proposizione mostra come δ sia esattamente quello che ci aspettiamo.

Proposizione 4.4. *Sia $D \in \mathrm{Div}(M)$. Allora*

$$\delta D = [D]$$

Dimostrazione. La dimostrazione consiste semplicemente nel ripercorrerei tre passi con cui si costruisce la mappa di cobordo δ.

Consideriamo $f \in H^0(M;\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*)$ rappresentante D, ovvero una collezione di $[f_\alpha] \in \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*(U_\alpha)$ che definiscono localmente D. Per ogni α scegliamo come controimmagine di $[f_\alpha]$ tramite π^* proprio f_α.

A questo punto applichiamo il differenziale $\check{\delta}$ a $\{f_\alpha\}$ e otteniamo $\{f_\beta/f_\alpha\} \in H^1(M;\mathcal{M}^*)$.

Infine, abbiamo che $\{g_{\alpha\beta} = f_\beta/f_\alpha\} \in H^1(M;\mathcal{O}^*)$ è la controimmagine tramite i^* di $\{f_\beta/f_\alpha\}$. Per definizione di mappa di cobordo abbiamo dunque $\delta f = \{g_{\alpha\beta}\}$.

Ma tramite l'isomorfismo $H^1(M;\mathcal{O}^*) \cong \mathrm{Pic}(M)$ abbiamo che $\{g_{\alpha\beta}\}$ corrisponde proprio al fibrato $[D]$, da cui la tesi. $\square$

Vale la pena notare che l'applicazione δ si guarda bene dall'essere iniettiva. In compenso possiamo ricavare il suo nucleo espandendo la successione esatta lunga in coomologia considerata prima:

$$0 \to H^0(M;\mathcal{O}^*) \to H^0(M;\mathcal{M}^*) \to H^0(M;\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta} H^1(M;\mathcal{O}^*).$$

Otteniamo in conclusione che il nucleo di δ è esattamente $H^0(M;\mathcal{M}^*)/H^0(M;\mathcal{O}^*)$, del tutto in analogia con il fatto che due divisori individuano lo stesso fibrato se e solo se sono linearmente equivalenti, ovvero se differiscono di un divisore principale, e che due funzioni meromorfe non identicamente nulle individuano lo stesso divisore principale se e solo se il loro rapporto è una funzione olomorfa mai nulla (che non aggiunge né zeri né poli).

4.5 La dualità di Poincaré

Ci stiamo avvicinando al teorema centrale di questo seminario, quello che fornisce un'identità geometrica alla classe di Chern di un fibrato lineare. Enunciamo senza dimostrazione la seguente

Proposizione 4.5. *Sia $0 \leq k \leq n$. L'applicazione*

$$H^k_{dR}(M) \times H^{n-k}_{dR}(M) \to \mathbb{C}$$
$$(\omega, \phi) \mapsto \int_M \omega \wedge \phi.$$

è una dualità.

Corollario 4.6.

$$H^{n-k}_{dR}(M) \xrightarrow{\sim} \left(H^k_{dR}(M)\right)^\vee \tag{15}$$
$$\phi \mapsto \left(\omega \mapsto \int_M \phi \wedge \omega\right). \tag{16}$$

Ci interessa un caso particolare: per ogni ipersuperficie irriducibile $V \subset M$ consideriamo il funzionale lineare

$$H^{n-2}_{dR}(M) \to \mathbb{C}$$
$$\omega \mapsto \int_V \omega.$$

Per il corollario appena enunciato, esiste $\eta_V \in H^2_{dR}(M)$ tale che, per ogni $\omega \in H^{n-2}_{dR}(M)$,

$$\int_V \omega_{|V} = \int \eta_V \wedge \omega.$$

Tale η_V si dice *duale di Poincaré* di V.

Possiamo estendere per linearità tale concetto ai divisori: se $D = \sum_i a_i \cdot V_i$, definiamo $\eta_D = \sum_i a_i \eta_{V_i}$. In tal modo si ha

$$\int_D \omega_{|D} = \sum_i a_i \int_{V_i} \omega_{|V_i} = \sum_i a_i \int_M \eta_{V_i} \wedge \omega = \int_M \eta_D \wedge \omega.$$

In parole povere, si può immaginare il duale di Poincaré come una sorta di distribuzione di Dirac ($\mathcal{C}^\infty$!) che concentra tutta la massa su un'ipersuperficie.

4.6 Interpretazione geometrica della classe di Chern

Possiamo ora enunciare il teorema centrale di questo seminario.

Teorema 4.7. *Siano $D = \sum_i a_i \cdot V_i$ e $L = [D]$. Allora*

$$c_1(L) = \eta_D.$$

Dimostrazione. Daremo solo una traccia di dimostrazione per questo teorema, rimandando alla bibliografia per i dettagli.

Quello che dobbiamo dimostrare, usando il teorema del seminario precedente che caratterizza la classe di Chern di un fibrato lineare, è che, per ogni (n-2)-forma chiusa ω vale

$$\sum_i a_i \int_{V_i} \omega_{|V_i} = -\frac{1}{2\pi i} \int_M \Omega \wedge \omega,$$

dove Ω è la 2-forma di curvatura di L rispetto a una connessione ∇ su L.

Per linearità possiamo assumere $D = V$ ipersuperficie irriducibile. La parte lunga consiste nel districare le definizioni degli oggetti in esame. Una volta fatto, la dimostrazione è assolutamente classica: ci troviamo di fronte ad un integrale su M con singolarità lungo V. Per risolverlo occorre semplicemente usare il Teorema di Stokes su un intorno tubolare di V. $\square$

Presentiamo ora due applicazioni di questo risultato.

Esempio 4.4. Sia M una superficie di Riemann compatta connessa. In questo caso un divisore D è una somma formale finita

$$D = \sum_i n_i \cdot p_i$$

di punti di M con molteplicità. Definitamo il grado di D come $\deg(D) = \sum_i n_i$. Ricordiamo inoltre che $H^2_{dR}(M) \cong \mathbb{Z}$ tramite l'integrazione secondo la naturale orientazione di M.

Alla luce del teorema appena dimostrato, si ha che η_D corrisponde a

$$\int_M \eta_D = \int_M \eta_D \wedge 1 = \int_D 1 = \deg(D).$$

In generale, dato un fibrato lineare L possiamo definire $\deg(L)$ analogamente come $\int_M c_1(M)$.

Questa definizione torna particolarmente utile se notiamo che, nel caso delle superfici di Riemann, anche il fibrato tangente TM è un fibrato lineare. Applicando quanto visto finora a tale fibrato, e ricordando la relazione tra la curvatura di una connessione e la curvatura gaussiana, dal teorema di Gauss-Bonnet si ottiene che $\deg(TM) = \chi(M)$, la caratteristica di Eulero-Poincaré.

Esempio 4.5. Sia $M = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Come abbiamo visto nel precedente seminario, abbiamo la successione esatta lunga in coomologia

$$0 \to H^1(\mathbb{P}^n; \mathcal{O}^*) \xrightarrow{c_1} H^2(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}) \to \dots$$

da cui segue che ogni fibrato lineare su $\mathbb{P}^n$ è univocamente determinato dalla sua classe di Chern. In realtà non è difficile vedere che c_1 è suriettiva e quindi vale

$$\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n) \cong H^2(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}) \cong H^2_{\mathrm{dR}}(M) \cong \mathbb{Z},$$

con l'ultimo isomorfismo dato dall'integrazione sulla 2-cella. Ora, è facile verificare che il generatore di $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n)$ corrispondente a 1 altri non è che il fibrato $[H]$, dove H è un iperpiano di $\mathbb{P}^n$. Infatti, si ha, detto $L = [H]$, $c_1(L) = \eta_H$ e quindi

$$\int_{\mathbb{P}^1} \eta_H = \int_{\mathbb{P}^n} \eta_{\mathbb{P}^1} \wedge \eta_H = \int_{\mathbb{P}^n} \eta_{H \cap \mathbb{P}^1} = 1$$

perché possiamo scegliere l'iperpiano e la 2-cella in modo tale che la loro intersezione sia un punto con molteplicità 1 e orientazione positiva. Chiamiamo il fibrato $[H]$ $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$, per via di quanto appena visto. Si dimostra che tale fibrato ha funzioni di transizione $g_{\alpha\beta} = \frac{Z_\beta}{Z_\alpha}$ e quindi, per quanto visto nel precedente seminario, è il duale del fibrato tautologico. Questo giustifica la scrittura $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$, essendo $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)) = -c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) = -1$.

Riferimenti bibliografici

[BT82] Raoul Bott and Loring W. Tu. *Differential Forms in Algebraic Topology.* Springer, Berlin, 1982.

[GH94] Philip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of Algebraic Geometry.* Wiley, Hoboken, 1994.

[Joy] Dominic Joyce. *Complex Manifolds and Kähler Geometry, Oxford Autumn term 2012.* `http://people.maths.ox.ac.uk/joyce/KahlerGeometry2012/KahlerGeom.html`.

[Man08] Marco Manetti. *Topologia.* Springer, Milano, 2008.

[Mor07] Andrei Moroianu. *Lectures on Kähler Geometry* Volume 69 of London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[Wel73] R. O. Wells. *Differential Analysis on Complex Manifolds.* Princeton-Hall Series in Modern Analysis, Englewood Cliffs, N.J., 1973.