

Seminari di Geometria Superiore
a.a. 2012/2013 - Prof. P. Piccinni



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Teoria di Hodge e di Dolbeault

a cura di Valeria Bertini, Francesco Meazzini, Salvatore Dolce e
Giovanni Zaccanelli

Indice

1	Teoria di Hodge	1
1.1	Lo spazio delle forme armoniche	2
1.2	I teoremi di Hodge	3
1.3	Alcune conseguenze dei teoremi di Hodge	5
2	Il teorema di Hodge nella teoria di Morse	8
2.1	Appendice	17
3	Teoria di Dolbeault	18
4	Dualità e caso kähleriano	21
4.1	Il caso kähleriano	22
4.2	Un esempio	25
5	Ulteriori risultati	28
5.1	Invarianza dei numeri di Hodge	28
5.2	Decomposizione di Lefschetz	30
	Bibliografia	32

Capitolo 1

Teoria di Hodge

a cura di Valeria Bertini.

In questo primo capitolo introdurremo la teoria di Hodge, che legherà lo spazio delle k -forme armoniche rispetto al laplaciano relativo al differenziale di de Rham, introdotto nel precedente seminario, al k -esimo gruppo di coomologia di de Rham.

In tutto questo primo capitolo e nel prossimo (M, g) sarà una varietà riemanniana compatta e orientata, e dunque potremo utilizzare i risultati riportati nel precedente seminario.

Per prima cosa fissiamo le notazioni. Denoteremo con $\Omega_{\mathbb{C}}^k M$ lo spazio delle k -forme su M a valori complessi, ossia lo spazio $\Gamma(\Lambda^k M \otimes \mathbb{C})$ delle sezioni della k -esima potenza esterna del fibrato cotangente complessificato; con $\mathcal{Z}_{\mathbb{C}}^k M$ denoteremo lo spazio delle k -forme complesse chiuse rispetto al differenziale di de Rham d esteso alle forme complesse per \mathbb{C} -linearità, e con

$$H_{dR}^k(M, \mathbb{C}) := \frac{\mathcal{Z}_{\mathbb{C}}^k M}{d\Omega_{\mathbb{C}}^{k-1} M}$$

il k -esimo gruppo di coomologia di de Rham a valori complessi di M . Sia infine $b_k(M) := \dim_{\mathbb{C}} H_{dR}^k(M, \mathbb{C})$ il k -esimo numero di Betti.

Cominciamo con un'osservazione, che verrà implicitamente utilizzata nei prossimi capitoli.

Osservazione 1.1. *Risulta $b_k(M) := \dim_{\mathbb{C}} H_{dR}^k(M, \mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{R}} H_{dR}^k(M, \mathbb{R})$. Infatti per definizione*

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{\mathbb{C}}^k M &= \mathcal{Z}^k M \otimes \mathbb{C} \\ d\Omega_{\mathbb{C}}^{k-1} M &= d\Omega^{k-1} M \otimes \mathbb{C}\end{aligned}$$

dove con $\mathcal{Z}^k M$ e $\Omega^{k-1} M$ intendiamo rispettivamente lo spazio delle k -forme chiuse e delle $k-1$ -forme, in entrambi i casi a valori reali.

1.1. Lo spazio delle forme armoniche

Risulta dunque

$$H_{dR}^k(M, \mathbb{C}) := \frac{Z^k M}{d\Omega_{\mathbb{C}}^{k-1} M} = \frac{Z^k M \otimes \mathbb{C}}{d\Omega^{k-1} M \otimes \mathbb{C}} \cong \frac{Z^k M}{d\Omega^{k-1} M} \otimes \mathbb{C}$$

dove l'ultimo isomorfismo segue dal fatto più generale che, dati V e W spazi vettoriali reali,

$$\frac{V \otimes \mathbb{C}}{W \otimes \mathbb{C}} \cong \frac{V}{W} \otimes \mathbb{C}.$$

Questo si può dedurre osservando che l'omomorfismo

$$\begin{aligned} \phi : V \otimes \mathbb{C} &\rightarrow \frac{V}{W} \otimes \mathbb{C} \\ v \otimes \alpha &\mapsto [v] \otimes \alpha \end{aligned}$$

è suriettivo e ha $\ker = W \otimes \mathbb{C}$, per cui la tesi segue dal teorema di omomorfismo per spazi vettoriali.

Poiché in generale si ha che $\dim_{\mathbb{C}}(V \otimes \mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{R}} V$, risulta nel nostro caso

$$b_k(M) = \dim_{\mathbb{C}} \left(\frac{Z^k M}{d\Omega^{k-1} M} \otimes \mathbb{C} \right) = \dim_{\mathbb{R}} H_{dR}^k(M, \mathbb{R}).$$

1.1 Lo spazio delle forme armoniche

In questo paragrafo introdurremo un sottospazio di $\Omega_{\mathbb{C}}^k M$ centrale nella teoria di Hodge. Ricordiamo dunque la definizione di laplaciano rispetto al differenziale d di de Rham data nel precedente seminario:

$$\Delta := dd^* + d^*d$$

dove d^* è l'operatore aggiunto del differenziale di de Rham d rispetto al prodotto hermitiano introdotto e denotato con $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$.

Definizione 1.2.

Lo spazio

$$\mathcal{H}^k(M, \mathbb{C}) := \{\omega \in \Omega_{\mathbb{C}}^k M \mid \Delta\omega = 0\}$$

si dice *spazio delle k -forme armoniche su M* .

Vogliamo dare una caratterizzazione delle forme armoniche in termini dei differenziali d e d^* ; tale caratterizzazione verrà usata più volte in seguito.

Lemma 1.3.

Una forma $\omega \in \Omega_{\mathbb{C}}^k M$ è armonica \Leftrightarrow è chiusa e cochiusa, ossia $d\omega = d^*\omega = 0$.

Dimostrazione. \Leftarrow : è evidente dalla definizione di Δ .

\Rightarrow : sia $\omega \in \mathcal{H}^k(M, \mathbb{C})$; da $\Delta\omega = 0$ segue che

$$0 = \langle \Delta\omega, \omega \rangle = \langle dd^*\omega, \omega \rangle + \langle d^*d\omega, \omega \rangle = \|d^*\omega\|^2 + \|d\omega\|^2,$$

da cui la tesi. □

È possibile dare una diversa caratterizzazione delle forme armoniche che però vedremo solo nel terzo capitolo, ovvero quando parleremo di forme $\bar{\partial}$ -armoniche; la dimostrazione che verrà fatta si può adattare al caso che stiamo trattando, ovvero al caso di forme d -armoniche, così come il lemma appena dimostrato è adattabile al caso di forme $\bar{\partial}$ -armoniche.

1.2 I teoremi di Hodge

Siamo pronti ad enunciare i due teoremi centrali della teoria di Hodge. Cominciamo con il

Teorema 1.4. (Decomposizione di Hodge)

Sia (M, g) una varietà riemanniana compatta e orientabile. Si ha:

(i) $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}^k(M, \mathbb{C}) < \infty$;

(ii) lo spazio delle k -forme a valori complessi si decompone:

$$\Omega_{\mathbb{C}}^k M = \mathcal{H}^k(M, \mathbb{C}) \oplus d\Omega_{\mathbb{C}}^{k-1} M \oplus d^*\Omega_{\mathbb{C}}^{k+1} M.$$

La dimostrazione del Teorema di decomposizione di Hodge è piuttosto lunga e utilizza molti risultati di analisi funzionale, per cui abbiamo deciso di ometterne la gran parte; dimostreremo solo il punto (i) e che i sottospazi vettoriali che compaiono nella decomposizione in (ii) sono ortogonali rispetto al prodotto hermitiano $\langle \cdot, \cdot \rangle$, per cui come sottospazi vettoriali sono effettivamente in somma diretta.

La dimostrazione completa del teorema si può trovare in [1], mentre in [5] se ne può trovare una seconda, più breve e agevole in quanto premette all'inizio due risultati di analisi funzionale di cui non fornisce la dimostrazione.

Nello svolgimento della dimostrazione del punto (i) utilizzeremo il seguente risultato, di cui però non riporteremo la dimostrazione:

Lemma 1.5.

Una successione $\{\alpha_s\} \subseteq \Omega_{\mathbb{C}}^k M$ limitata e tale che la successione $\{\Delta\alpha_s\} \subseteq \Omega_{\mathbb{C}}^k M$ sia anch'essa limitata ammette un'estratta di Cauchy.

Dimostrazione. (parziale del Teorema di decomposizione di Hodge)

- (i) Supponiamo per assurdo che $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}^k(M, \mathbb{C}) = \infty$; ne segue che è possibile trovare una successione $\{\alpha_s\} \subseteq \mathcal{H}^k(M, \mathbb{C}) \subseteq \Omega_{\mathbb{C}}^k M$ formata da elementi ortonormali secondo il prodotto hermitiano $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$, e dunque che soddisfa le ipotesi del Lemma 1.5. È allora possibile estrarne una sottosuccessione convergente, il che è chiaramente un assurdo, in quanto $\|\alpha_s - \alpha_t\| = \sqrt{2} \forall s \neq t$ poiché la successione è formata da elementi ortonormali.
- (ii) Vogliamo mostrare solamente che i tre sottospazi in cui decomponiamo $\Omega_{\mathbb{C}}^k M$ sono ortogonali rispetto al prodotto hermitiano $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$. A tal fine, siano $\omega \in \mathcal{H}^k(M, \mathbb{C})$, $d\sigma \in d\Omega_{\mathbb{C}}^{k-1} M$ e $d^*\eta \in d^*\Omega_{\mathbb{C}}^{k+1} M$ qualunque. Risulta:

$$\langle\langle \omega, d\sigma \rangle\rangle = \langle\langle d^*\omega, \sigma \rangle\rangle = 0$$

$$\langle\langle \omega, d^*\eta \rangle\rangle = \langle\langle d\omega, \eta \rangle\rangle = 0$$

per il Lemma 1.3, e

$$\langle\langle d\sigma, d^*\eta \rangle\rangle = \langle\langle d^2\sigma, \eta \rangle\rangle = 0$$

poiché $d^2 = 0$.

□

Ciò che il Teorema di decomposizione di Hodge afferma è che ogni k -forma a valori complessi ω su M si decompone in maniera unica in una parte armonica, una esatta e una coesatta, ovvero è unica la scrittura

$$\omega = \omega^{\mathcal{H}} + d\omega' + d^*\omega'',$$

dove naturalmente $\omega^{\mathcal{H}} \in \mathcal{H}^k(M, \mathbb{C})$, $\omega' \in \Omega_{\mathbb{C}}^{k-1} M$ e $\omega'' \in \Omega_{\mathbb{C}}^{k+1} M$. Tale scrittura prende il nome di *decomposizione di Hodge* di ω .

Il passo cruciale che ci porterà al secondo teorema di questa sezione è la seguente

Osservazione 1.6.

Se $\omega \in \mathcal{Z}_{\mathbb{C}}^k M$, allora nella sua decomposizione di Hodge il termine coesatto è uguale a zero, ossia ω si decompone come

$$\omega = \omega^{\mathcal{H}} + d\omega'.$$

Infatti, da $d\omega = 0$, segue che

$$0 = \langle\langle d\omega, \omega'' \rangle\rangle = \langle\langle d(\omega^{\mathcal{H}} + d\omega' + d^*\omega''), \omega'' \rangle\rangle = \langle\langle dd^*\omega'', \omega'' \rangle\rangle = \|d^*\omega''\|^2$$

dove la terza uguaglianza è vera per il Lemma 1.3 e poiché $d^2 = 0$. Ne segue che $d^*\omega'' = 0$.

Teorema 1.7. (Isomorfismo di Hodge)

Data (M, g) varietà riemanniana compatta e orientabile, l'omomorfismo naturale

$$f : \mathcal{H}^k(M, \mathbb{C}) \rightarrow H_{dR}^k(M, \mathbb{C})$$

$$\omega \mapsto [\omega]$$

è un isomorfismo.

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che f è ben definita, in quanto $\mathcal{H}^k(M, \mathbb{C}) \subseteq \mathcal{Z}_{\mathbb{C}}^k M$ per il Lemma 1.3; inoltre è evidente che è lineare.

Inoltre:

- f è iniettiva:
mostriamo che $\ker f = \{0\}$: se $[\omega] = [0]$ si ha che $\omega = d\tau$, con $\tau \in \Omega_{\mathbb{C}}^{k-1} M$. Ma abbiamo visto nella dimostrazione del punto (ii) del Teorema di decomposizione di Hodge che i sottospazi vettoriali in cui si decompone lo spazio delle k -forme armoniche a valori complessi su M sono ortogonali rispetto al prodotto hermitiano $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$, e dunque in particolare hanno intersezione banale. Ne segue l'iniettività.
- f è suriettiva:
sia $c \in H_{dR}^k(M, \mathbb{C})$ qualsiasi, e sia $\omega \in \mathcal{Z}_{\mathbb{C}}^k M$ tale che $[\omega] = c$. Dall'osservazione 1.6 ne segue che la decomposizione di Hodge di ω è della forma $\omega = \omega^{\mathcal{H}} + d\omega'$, ossia la parte coesatta è nulla. Ma allora

$$f(\omega^{\mathcal{H}}) = [\omega^{\mathcal{H}}] = [\omega^{\mathcal{H}} + d\omega'] = [\omega] = c,$$

da cui la suriettività.

□

È evidente come il Teorema di isomorfismo di Hodge fornisca un risultato sorprendente quanto importante: è possibile individuare in ogni classe di coomologia di de Rham un unico rappresentante armonico. L'importanza di tale affermazione consiste nel fatto che l'isomorfismo fornisce un modo canonico per assegnare ad ogni classe di coomologia un ben definito rappresentante.

1.3 Alcune conseguenze dei teoremi di Hodge

Concludiamo con due risultati che seguono facilmente dai teoremi di Hodge illustrati nel precedente paragrafo.

Proposizione 1.8. (Dualità di Poincarè)

Data (M, g) varietà riemanniana compatta e orientabile di dimensione n , risulta

$$\mathcal{H}^k(M, \mathbb{C}) \cong \mathcal{H}^{n-k}(M, \mathbb{C}).$$

1.3. Alcune conseguenze dei teoremi di Hodge

Dal Teorema di isomorfismo di Hodge segue allora la ben nota versione della dualità di Poincaré riguardante i gruppi di coomologia di de Rham:

$$H_{dR}^k(M, \mathbb{C}) \cong H_{dR}^{n-k}(M, \mathbb{C}),$$

da cui in particolare $b_k(M) = b_{n-k}(M)$.

Dimostrazione. L'isomorfismo si ottiene considerando l'operatore $*$ di Hodge definito nel precedente seminario. È stato già mostrato l'isomorfismo

$$* : \Omega_{\mathbb{C}}^k M \xrightarrow{\sim} \Omega_{\mathbb{C}}^{n-k} M;$$

ciò che vogliamo dimostrare è che tale isomorfismo vale anche nel caso di forme armoniche. A tal fine ricordiamo che $*^2 = (-1)^{k(n-k)}$, e dunque $*^{-1} = (-1)^{k(n-k)}*$; ne segue che ci basta dimostrare che se ω è armonica anche $*\omega$ lo è, e di conseguenza lo stesso accadrà per $*^{-1}$, ovvero l'isomorfismo $*$ passerà alle forme armoniche.

Per dimostrare quando prefissato basta notare che $\Delta* = *\Delta$, da cui segue ovviamente la tesi; allora: $\forall \omega \in \Omega_{\mathbb{C}}^k M$ si ha, ricordando che $d^* = (-1)^{nk+1} * d*$:

$$\begin{aligned} \Delta * \omega &= (dd^* + d^*d) * \omega = (d(-1)^{nk+1} * d * + (-1)^{nk+1} * d * d) * \omega = \\ &= *((-1)^{nk+1} * d * d + d(-1)^{nk+1} * d *) \omega = *\Delta \omega. \end{aligned}$$

□

La teoria di Hodge fornisce una dimostrazione immediata di un ben noto risultato sulla coomologia di de Rham, che riportiamo qui come corollario dei teoremi di decomposizione e di isomorfismo di Hodge:

Corollario 1.9.

Data (M, g) compatta e orientabile, risulta

$$b_k(M) < \infty$$

$\forall k \in \mathbb{Z}$.

Dimostrazione. Dal punto (i) del Teorema di decomposizione di Hodge sappiamo che $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}^k(M, \mathbb{C}) < \infty, \forall k$; la traduzione di questa affermazione tramite l'isomorfismo di Hodge è la tesi. □

Osservazione 1.10.

Lo stesso risultato non vale in generale nel caso di M varietà non compatta.

Osservazione 1.11.

La scelta di parlare di forme a valori complessi sulla varietà (M, g) non è affatto obbligata; anzi tutta la teoria di Hodge si può sviluppare per forme a valori reali sulla varietà, considerando l'usuale differenziale d di de Rham

1.3. Alcune conseguenze dei teoremi di Hodge

(non complessificato) ed il suo aggiunto d^ rispetto al prodotto scalare reale introdotto nel precedente seminario, che si ottiene integrando nella forma di volume il prodotto scalare indotto da g sullo spazio delle forme differenziali; è evidente come ogni risultato riportato non subisce alcuna modifica. Abbiamo scelto di trattare il caso complesso perchè si riallaccerà alla teoria di Dolbeault, di cui si parlerà nel terzo e quarto capitolo.*

Una volta stabilito che i numeri di Betti, sotto le nostre ipotesi su (M, g) , sono finiti, ci si può chiedere se è possibile fornirne limitazioni più precise; nel prossimo capitolo, grazie ancora ai teoremi di Hodge, sarà possibile dare una risposta a questo interrogativo.

Capitolo 2

Il teorema di Hodge nella teoria di Morse

a cura di Francesco Meazzini.

In questa sezione presenteremo un risultato classico della teoria di Morse. La trattazione classica (per la quale Milnor è il miglior riferimento) presuppone delle conoscenze di complessi cellulari. Noi seguiremo invece l'approccio di un articolo, uscito solo nel 1982, i cui prerequisiti sono fondamentalmente i risultati visti nella sezione precedente.

L'idea della teoria di Morse consiste nel caratterizzare le proprietà topologiche di una varietà tramite lo studio di una determinata classe di funzioni che andiamo ad introdurre.

Definizione 2.1.

Sia M una varietà riemanniana compatta e orientabile di dimensione n .

Sia inoltre $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione $C^\infty(M)$. Diremo che f è non degenera se:

- 1) $(dh) = 0$ solo in punti isolati,
- 2) in ogni punto critico la matrice hessiana è non singolare.

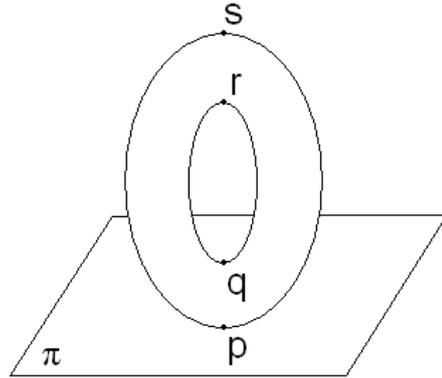
Introduciamo inoltre le due nozioni fondamentali della teoria di Morse.

Definizione 2.2.

Sia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ non degenera. Sia inoltre p un punto critico per f . Definiamo l'indice di Morse (I_p) come il numero di autovalori negativi dell'hessiano di f calcolato in p . Definiamo inoltre il k -esimo numero di Morse (m_k) come il numero di punti critici di f il cui indice di Morse sia pari a k .

Esempio 2.3.

Per rendere più chiaro quanto appena introdotto è utile tenere a mente un esempio concreto nel corso della trattazione. Sia M il toro immerso nello



spazio euclideo tridimensionale. Consideriamo inoltre il piano π tangente nel punto p ed $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definita da: $f(x) = d(x, \pi)$. Tale funzione associa ad ogni punto del toro la sua altezza rispetto al piano π .

È facile convincersi che i punti critici di f sono quelli disegnati in figura e che localmente esistono coordinate (x_1, x_2) tali che

$$f(x) = (x_1)^2 + (x_2)^2 \text{ se } x \in U(p)$$

$$f(x) = C_1 - (x_1)^2 + (x_2)^2 \text{ se } x \in U(q)$$

$$f(x) = C_2 - (x_1)^2 + (x_2)^2 \text{ se } x \in U(r)$$

$$f(x) = C_3 - (x_1)^2 - (x_2)^2 \text{ se } x \in U(s)$$

Infatti, in un intorno di p o s abbastanza piccolo, il toro è un paraboloide ellittico ed avrà pertanto la forma cercata in qualche sistema di coordinate locali. Analogamente si ottengono le espressioni di f negli intorni di q ed r osservando che, vicino a tali punti, il toro si presenta come un paraboloide iperbolico.

Tali scelte di coordinate portano alle seguenti matrici hessiane nei vari punti critici:

$$Hess(f)|_p = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Hess(f)|_q = Hess(f)|_r = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Hess(f)|_s = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Siamo ora pronti al calcolo di indici e numeri di Morse introdotti all'inizio della sezione. Si ottiene

$$I_p = 0, \quad I_q = I_r = 1, \quad I_s = 2$$

da cui segue subito il calcolo dei numeri di Morse:

$$m_0 = 1, \quad m_1 = 2, \quad m_2 = 1, \quad m_{k \geq 3} = 0$$

È opportuno osservare che i numeri appena calcolati eguagliano, grado per grado, i numeri di Betti del toro e in particolare si ha:

$$\begin{aligned} m_0 &= 1 \geq 1 = b_0 \\ m_1 &= 2 \geq 2 = b_1 \\ m_2 &= 1 \geq 1 = b_2 \\ m_{k \geq 3} &= 0 \geq 0 = b_{k \geq 3} \end{aligned}$$

Lo scopo di questa sezione è quello di mostrare la validità generale della stima appena vista nell'esempio: $m_k \geq b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$. L'idea fondamentale che sfrutteremo consisterà nel perturbare l'usuale differenziale di De Rham tramite il coniugio per un'opportuna funzione invertibile.

Definizione 2.4.

Sia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ non degenera e sia t un parametro reale. Definiamo

$$\begin{aligned} d_t &:= e^{-tf} de^{tf} \\ d_t^* &:= e^{tf} d^* e^{-tf} \end{aligned}$$

Osservazione 2.5.

L'operatore d_t^* è l'aggiunto formale del differenziale d_t , ottenuto ricordando che l'aggiunto di una composizione è la composizione degli aggiunti nell'ordine inverso. Si verifica immediatamente che $(d_t)^2 = (d_t^*)^2 = 0$.

Dall'osservazione precedente viene naturale considerare la coomologia indotta dal differenziale perturbato e confrontarla con quella di De Rham. Diamo allora un'ultima

Definizione 2.6.

Sia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ non degenera e sia t un parametro reale.

Indichiamo con $H_t^k(M)$ il k -esimo gruppo di coomologia di M rispetto al differenziale d_t . Estendiamo inoltre la nozione di Laplaciano sull'algebra esterna ad ogni valore del parametro t :

$$\Delta_t := d_t d_t^* + d_t^* d_t$$

Introduciamo infine l'analogo dei numeri di Betti:

$$b_k(t) := \dim\{H_t^k(M)\}$$

2. Il teorema di Hodge nella teoria di Morse

Nella sezione precedente avevamo mostrato che i numeri di Betti godono della non ovvia proprietà : $b_k < \infty$. La proposizione che segue mostrerà, in particolare, che anche i numeri appena introdotti saranno tali. Offrirà inoltre un primo spunto per rendersi conto di quanto sia effettivamente interessante considerare le generalizzazioni appena introdotte.

Proposizione 2.7.

Sia $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ non degenera. Allora per ogni $t \in \mathbb{R}$:

$$b_k(t) = b_k$$

In altre parole la perturbazione agisce banalmente sulla dimensione dei gruppi di coomologia di M .

Dimostrazione. Sia ω una generica k -forma su M . Definiamo le due applicazioni

$$\phi_{\pm} : \omega \rightarrow e^{\pm tf} \omega$$

Osserviamo preliminarmente che queste sono una l'inversa dell'altra. Inoltre

1) se $d\omega = 0$ allora $d_t \phi_-(\omega) = 0$. Infatti:

$$d_t(\phi_-(\omega)) = d_t(e^{-tf} \omega) = e^{-tf} d(e^{tf} e^{-tf} \omega) = e^{-tf} (d\omega) = 0$$

2) se ω è esatta allora $\phi_-(\omega)$ è d_t -esatta. Infatti:

sia η una $(k-1)$ -forma tale che $d\eta = \omega$. Allora:

$$d_t(\phi_-(\eta)) = e^{-tf} d(e^{tf} \phi_-(\eta)) = e^{-tf} d(e^{tf} e^{-tf} \eta) = e^{-tf} d\eta = e^{-tf} \omega = \phi_-(\omega)$$

Pertanto ϕ_- induce un isomorfismo in coomologia: $H_{dR}^k(M) \cong H_t^k(M)$. \square

Quanto appena dimostrato potrebbe apparire sorprendente. In realtà questa rappresenta solo la prima delle numerose analogie tra il differenziale usuale e le sue perturbazioni.

Passiamo ora ad illustrare brevemente la strategia che ci condurrà alla disuguaglianza di Morse:

1) Sfruttiamo il teorema di isomorfismo di Hodge discusso nella precedente sezione: $\mathcal{H}^k(M) \cong H_{dR}^k(M)$.

Da questo segue che $\dim\{Ker(\Delta|_{\Omega^k M})\} = b_k$.

2) Estendiamo quanto appena ricordato alla coomologia perturbata:

$$\mathcal{H}_t^k(M) \cong H_t^k(M), \text{ da cui } \dim\{Ker(\Delta_t|_{\Omega^k M})\} = b_k(t).$$

Questo risultato non deve affatto sorprendere. Infatti è possibile mostrare che ogni risultato valido per la coomologia di De Rham può essere esteso a quella secondo il differenziale d_t . Le dimostrazioni sono essenzialmente analoghe: si tratta di ripercorrerle sfruttando la mappa ϕ_- introdotta nella dimostrazione precedente.

2. Il teorema di Hodge nella teoria di Morse

- 3) Determiniamo un'espansione asintotica in potenze di $\frac{1}{t}$ per l' i -esimo autovalore di $\Delta_t|_{\Omega^k M}$:

$$\mu_k^{(i)}(t) = t \left(A_k^{(i)} + \frac{B_k^{(i)}}{t} + \frac{C_k^{(i)}}{t^2} + \dots \right)$$

- 4) Otteniamo la nostra stima mostrando che

$$m_k = |\{i \in \mathbb{N} : A_k^{(i)} = 0\}| \geq |\{i \in \mathbb{N} : \mu_k^{(i)}(t) = 0\}| = b_k(t) = b_k.$$

Osservazione 2.8.

Resta in effetti da mostrare solo la prima uguaglianza dell'ultimo punto. Infatti il primo insieme (costituito dagli indici i cui autovalori non divergono con t) contiene il secondo (formato invece dagli indici corrispondenti agli autovalori nulli) da cui la disuguaglianza. Per l'uguaglianza che segue basta invece osservare che, per quanto detto al punto 2), $b_k(t)$ è in effetti la molteplicità relativa all'autovalore nullo dell'operatore $\Delta_t|_{\Omega^k M}$, ovvero appunto la cardinalità del secondo insieme.

Proseguiamo cercando un'espressione in coordinate per l'operatore Δ_t . A tal fine esplicitiamo l'azione degli operatori d_t e d_t^* . Sia dunque $\omega \in \Omega^k M$.

$$\begin{aligned} d_t \omega &= e^{-tf} d(e^{tf} \omega) = e^{-tf} [(de^{tf}) \wedge \omega + e^{tf} d\omega] = \\ &= e^{-tf} [e^{tf} d(tf) \wedge \omega + e^{tf} d\omega] = t(df) \wedge \omega + d\omega \end{aligned}$$

Abbiamo dunque ottenuto la seguente relazione, che mette in evidenza come il contributo dovuto alla perturbazione sia legato ai punti critici di f :

$$d_t = d + t(df) \wedge = d + t \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \wedge = d + t \frac{\partial f}{\partial x^j} a^{j*}$$

Adotteremo nel seguito la notazione di Einstein omettendo le sommatorie sugli indici ripetuti.

Segue immediatamente un'espressione analoga per d_t^* , essendo questo l'operatore aggiunto di d_t :

$$d_t^* = d^* + t \frac{\partial f}{\partial x^j} a^j$$

Osservazione 2.9.

Gli operatori a^j e a^{j} appena introdotti sono uno il duale dell'altro. Il primo è la contrazione rispetto al campo vettoriale $\frac{\partial}{\partial x^j}$, mentre il secondo consiste nella moltiplicazione esterna per la 1-forma differenziale dx^j .*

La notazione introdotta è molto frequente nella letteratura fisica, dove a^j (rispettivamente a^{j}) viene detto operatore di annichilazione (rispettivamente di creazione) di fermioni.*

Sostituendo le relazioni sopra ottenute nella definizione di Δ_t si ricava:

$$\Delta_t = dd^* + d^*d + t^2(df)^2 + t \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} [a^{i^*}, a^j]$$

dove con la notazione $(df)^2$ indichiamo il quadrato della norma del gradiente.

Finalmente ci rendiamo conto del ruolo che giocheranno i punti critici della funzione non degenere f scelta. Infatti, per grandi valori di t , le eventuali autoforme di Δ_t tenderanno ad annullarsi all'infuori di intorno sempre più piccoli dei punti critici. Nel gergo fisico si usa riformulare tale osservazione come segue:

“i limiti per $t \rightarrow \infty$ delle autoforme del laplaciano sono forme differenziali generalizzate i cui coefficienti sono delta di Dirac concentrate nei punti critici di f anzichè funzioni C^∞ ”.

Data la completa libertà nella scelta del parametro, non perderemo di generalità assumendo t molto grande e sviluppando con Taylor la formula appena ottenuta per Δ_t nell'intorno di un punto critico fissato $p \in M$.

Scegliamo dunque una carta locale centrata in p con un sistema di coordinate (x^j) tali che l'hessiano in p sia diagonale, ovvero:

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} \right|_p = \delta_j^i \lambda_j$$

dove non resta sottointesa alcuna sommatoria in quanto i due indici j sono entrambi in basso. Questa scelta non è restrittiva data la simmetria dell'hessiano che, in quanto tale, risulta diagonalizzabile con autovalori reali. È opportuno osservare che l'ipotesi sull'hessiano di f , finora non utilizzata, garantisce che:

$$\lambda_j \neq 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

Con la scelta delle coordinate appena introdotte, f assume dunque la forma

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{2} \lambda_j (x^j)^2 + o(|x|^2)$$

da cui segue l'espressione per df :

$$df(x) = \lambda_j x^j dx^j + o(|x|)$$

Ne segue che, vicino a p , Δ_t può essere approssimato come segue:

$$\tilde{\Delta}_t = \sum_j \left(-\frac{\partial^2}{(\partial x^j)^2} \right) + t^2 \lambda_j^2 (x^j)^2 + t \lambda_j [a^{j^*}, a^j]$$

Osservazione 2.10.

Il termine lineare in t è stato ottenuto semplicemente sostituendo le derivate

seconde con $\delta_j^i \lambda_j$. Per quanto riguarda invece il termine quadratico il passaggio è più sottile e vale la pena soffermarsi a discuterlo. Dall'espressione ricavata per df segue che, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo, il gradiente di f avrà coordinate della forma $\lambda_j \delta^{ji} x^i$ (qui la delta di Kronecker ha l'effetto di restituire l' i -esimo termine della sommatoria $\lambda_j x^j$). Avevamo sottolineato che con la notazione $(df)^2$ si intendeva il quadrato della norma del gradiente, rispetto però alla metrica riemanniana g !

Nell'espressione di $\tilde{\Delta}_t$ il termine quadratico assume invece la forma della norma del gradiente di f rispetto alla metrica euclidea.

La soluzione di questa apparente discordanza risiede nel fatto che è sempre possibile scegliere coordinate (dette normali) che rendano una metrica riemanniana euclidea fino al secondo ordine. Ne segue che nell'espressione di $\tilde{\Delta}_t$ le due metriche risultano identiche, avendo definito $\tilde{\Delta}_t$ proprio come Δ_t a meno di ordini superiori al primo. Tali coordinate riducono inoltre l'azione di Δ_0 al coefficiente C^∞ delle forme su cui agisce, da cui la semplificazione del primo termine.

Osservazione 2.11.

Quanto appena discusso potrebbe generare un ulteriore dubbio: chi ci assicura che le coordinate normali siano proprio quelle che diagonalizzano l'hessiano? La risposta a questa domanda consiste nell'osservare che la diagonalizzabilità dell'hessiano in p è una proprietà puramente puntuale (e non locale). Ne segue evidentemente che questa ipotesi non è molto restrittiva sulla scelta delle coordinate locali. In effetti si dimostra che: data comunque una base ortonormale B dello spazio tangente in p alla varietà M , esiste un intorno abbastanza piccolo di p e un sistema di coordinate normali definite su tale intorno che coincida con B se valutato in p .

Abbiamo introdotto l'operatore $\tilde{\Delta}_t$ poichè siamo interessati non più agli autovalori $\mu_k^{(i)}(t)$, bensì ai termini $tA_k^{(i)}$. Per quanto detto questi corrisponderanno agli autovalori di $\tilde{\Delta}_t$ che riusciremo a calcolare esplicitamente. Mostrando che, al variare dell'indice i , il numero degli $A_k^{(i)}$ nulli uguaglia il k -esimo numero di Morse otterremo la tesi.

Proseguiamo ricordando che l'hamiltoniana dell'oscillatore armonico ha la forma

$$H := -\frac{\partial^2}{(\partial x)^2} + k^2 x^2 \quad x \in \mathbb{R}$$

e che i suoi autovalori sono tutti i multipli dispari di $|k|$, ognuno dei quali compare con molteplicità pari a uno (cfr. Appendice). Tale hamiltoniana viene riconosciuta, termine a termine, nelle prime due sommatorie dell'espressione di $\tilde{\Delta}_t$, ponendo $k = t\lambda_j$. Per quanto riguarda invece gli autovalori dell'ultimo termine basterà studiare la sua azione su una generica k -forma ω :

$$[a^{j*}, a^j]\omega = a^{j*} a^j \omega - a^j a^{j*} \omega = dx^j \wedge (a^j \omega) - a^j (dx^j \wedge \omega) =$$

2. Il teorema di Hodge nella teoria di Morse

$$\begin{aligned}
&= dx^j \wedge \sum_{k=1}^{deg\omega} [(-1)^{k+1} \omega(\dots, \frac{\partial}{\partial x^j}, \dots)] - \omega - dx^j \wedge \sum_{k=1}^{deg\omega} [(-1)^k \omega(\dots, \frac{\partial}{\partial x^j}, \dots)] = \\
&= -\omega + 2dx^j \wedge \sum_{k=1}^{deg\omega} [(-1)^{k+1} \omega(\dots, \frac{\partial}{\partial x^j}, \dots)] = \\
&= -\omega + 2dx^j \wedge (a^j \omega) = 2a^{j*} a^j \omega - \omega
\end{aligned}$$

dove con la notazione $\omega(\dots, \frac{\partial}{\partial x^j}, \dots)$ indichiamo la $(k-1)$ -forma ottenuta valutando in $\frac{\partial}{\partial x^j}$ la k -esima 1-forma dx^{i_k} che compare nell'espressione in coordinate di ω .

Abbiamo dunque ricavato la relazione:

$$[a^{j*}, a^j] = 2a^{j*} a^j - id$$

Esplicitando come sopra l'operatore $a^{j*} a^j$ si vede facilmente che questo agisce come l'identità se la k -forma ω contiene la 1-forma differenziale dx^j e come la moltiplicazione per 0 altrimenti. Concludiamo allora che gli autovalori di $[a^{j*}, a^j]$ sono ± 1 .

L'operatore $[a^{j*}, a^j]$ agisce dunque lasciando invariato il coefficiente C^∞ della forma ω . Viceversa, l'hamiltoniana H agisce solo su tale coefficiente. È chiaro allora che i due operatori commutano e risultano pertanto simultaneamente diagonalizzabili.

Quanto appena discusso ci permette di asserire che gli autovalori di $\tilde{\Delta}_t$, ovvero i termini $tA_k^{(i)}$, saranno tutti della forma:

$$t \sum_j (|\lambda_j|(1 + 2N_j) + \lambda_j n_j) \quad N_j \in \mathbb{N}, \quad n_j = \pm 1$$

Come accennato in precedenza, ci proponiamo ora di calcolare la cardinalità dell'insieme $\{i \in \mathbb{N} : A_k^{(i)} = 0\}$. Imporre che tale sommatoria si annulli, essendo a termini positivi, equivale a richiedere che ogni suo termine sia nullo. Imponiamo dunque: $|\lambda_j|(1 + 2N_j) + \lambda_j n_j = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$.

Si ottiene subito la prima relazione: $N_j = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$. Questo equivale a scegliere l'autovalore dell'oscillatore armonico $t|\lambda_j|$, la cui molteplicità abbiamo ricordato essere pari ad uno. Avremo pertanto al più un unico $A_k^{(i)}$ nullo.

La nostra relazione diviene dunque: $|\lambda_j| + \lambda_j n_j = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$. È chiaro allora che abbiamo anche esistenza scegliendo $n_j = 1$ se e solo se $\lambda_j < 0$.

Un'ultima osservazione. Possiamo essere più precisi riguardo il grado delle forme appartenenti all'autospazio relativo all'unico autovalore con coefficiente $A_k^{(i)}$ nullo. Infatti, durante la discussione dell'operatore $[a^{j*}, a^j]$ abbiamo osservato che questo agisce come l'identità (ovvero $n_j = 1$) se e solo se l'espressione in coordinate locali della k -forma ω contiene la 1-forma dx^j . In altre parole il grado di ω eguaglia il numero di n_j positivi, che a sua volta

abbiamo visto essere pari al numero di λ_j negativi, ovvero l'indice di Morse del punto critico p attorno al quale stiamo sviluppando: $\deg \omega = I_p$.

Tutti i risultati appena ottenuti possono essere riassunti come segue:

Proposizione 2.12.

Per ogni punto critico $p \in M$ esiste un unico autospazio il cui autovalore corrispondente non diverge con t .

Inoltre tale autospazio è costituito da k -forme, con $k = I_p$.

In effetti, non siamo stati in grado di determinare quanti siano gli autovalori nulli di Δ_t . La proposizione afferma però che ne esiste esattamente uno che non sia proporzionale a t per grandi valori del parametro, ovvero che ogni punto critico di f contribuisce con uno e un solo indice all'insieme $\{i \in \mathbb{N} : A_k^{(i)} = 0\}$ se e solo se $k = I_p$. Pertanto:

$$|\{i \in \mathbb{N} : A_k^{(i)} = 0\}| = |\{p \in M \text{ critici} : I_p = k\}| = m_k$$

da cui finalmente

Teorema 2.13.

Sia (M, g) una varietà riemanniana compatta e orientabile.

Sia inoltre $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ non degenera. Allora:

$$m_k \geq b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Prima di concludere questa sezione riprendiamo brevemente l'esempio discusso in precedenza.

Nel caso in esame è bene mettere in evidenza i due aspetti fondamentali che rendono la nostra stima un'uguaglianza. Infatti la disuguaglianza nasce quando tronchiamo gli sviluppi di df e della metrica riemanniana g al primo ordine, introducendo l'operatore $\tilde{\Delta}_t$. Lo sviluppo della funzione scelta nell'esempio è banale, in quanto la forma che assume f nell'intorno di ciascun punto critico è un polinomio di secondo grado. Inoltre, avendo immerso il toro in \mathbb{R}^3 , abbiamo scelto come metrica riemanniana proprio quella euclidea. Ne segue che $\tilde{\Delta}_t = \Delta_t$. Pertanto $\mu_k^{(i)}(t) = tA_k^{(i)}$, da cui

$$m_k = |\{i \in \mathbb{N} : A_k^{(i)} = 0\}| = |\{i \in \mathbb{N} : \mu_k^{(i)}(t) = 0\}| = b_k(t) = b_k$$

In effetti, la scelta dell'esempio riportato non è casuale. Si può infatti definire la stessa funzione non degenera, sul toro con G buchi immerso nello spazio euclideo tridimensionale. Non è difficile convincersi che l'uguaglianza fra numeri di Morse e numeri di Betti appena stabilita resta valida, riducendo così il problema del calcolo della coomologia del toro con G buchi allo studio dei punti critici della funzione f . Si osservi che ogni buco genera due punti di sella, mentre avremo ancora un solo massimo ed un solo minimo. Possiamo dunque generalizzare l'esempio del toro come segue:

$$I_{\text{minimo}} = 0, \quad I_{\text{massimo}} = 2, \quad I_{q_i} = 1 \quad i \in \{1, \dots, 2G\}$$

2.1. Appendice

dove i q_i sono i punti di sella critici per f . Concludiamo dunque che

$$b_0 = m_0 = 1, \quad b_1 = m_1 = 2G, \quad b_2 = m_2 = 1$$

ritrovando esattamente la coomologia del toro di genere G .

2.1 Appendice

Per completezza mostriamo brevemente come risolvere il problema agli autovalori per l'hamiltoniana dell'oscillatore armonico.

Introduciamo i polinomi di Hermite:

$$h_n(x) = (-1)^n e^{|k|x^2} \frac{d^n}{(dx)^n} e^{-|k|x^2} \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Si verifica facilmente che questi soddisfano l'equazione differenziale:

$$-h_n''(x) + 2|k|xh_n'(x) + |k|h_n(x) = |k|(2n+1)h_n(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Consideriamo la seguente base per lo spazio di funzioni H_0^1 :

$$f_n(x) = h_n(x)e^{-\frac{1}{2}|k|x^2} \quad n \in \mathbb{N}$$

Verifichiamo ora che tale base sia costituita da autofunzioni per l'operatore hamiltoniano H definito in precedenza.

Per ogni valore di $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$f_n'(x) = h_n'(x)e^{-\frac{1}{2}|k|x^2} - |k|xh_n(x)e^{-\frac{1}{2}|k|x^2}$$

da cui si ottiene inoltre

$$f_n''(x) = \left[h_n''(x) - 2|k|xh_n'(x) - |k|h_n(x) \right] e^{-\frac{1}{2}|k|x^2} + k^2 x^2 f_n(x)$$

Pertanto, sfruttando l'equazione differenziale soddisfatta dai polinomi di Hermite si calcola immediatamente l'azione dell'hamiltoniana H sulle f_n :

$$\begin{aligned} Hf_n(x) &= -f_n''(x) + k^2 x^2 f_n(x) = - \left[h_n''(x) - 2|k|xh_n'(x) - |k|h_n(x) \right] e^{-\frac{1}{2}|k|x^2} = \\ &= |k|(2n+1)f_n(x) \end{aligned}$$

Abbiamo dunque dimostrato che la base $\{f_n\}$ diagonalizza l'hamiltoniana dell'oscillatore armonico H . Inoltre gli autovalori sono tutti e soli i multipli dispari del parametro $|k|$ e ognuno di essi compare con molteplicità pari ad uno.

Capitolo 3

Teoria di Dolbeault

a cura di Salvatore Dolce.

Sia (M^{2m}, h, J) una varietà Hermitiana compatta. Consideriamo l'operatore di Dolbeault $\bar{\partial}$ agente sullo spazio delle (p, q) -forme $\Omega^{p,q}M$. Denotiamo con $\mathcal{Z}^{p,q}M$ lo spazio delle (p, q) -forme chiuse. Definiamo allora i gruppi di coomologia di Dolbeault

$$H^{p,q}M = \frac{\mathcal{Z}^{p,q}M}{\bar{\partial}\Omega^{p,q-1}M}.$$

Osservazione 3.1.

A differenza della coomologia di de Rham, la coomologia di Dolbeault non è un invariante topologico in quanto dipende fortemente dalla struttura complessa J (per un esempio si veda []).

Definizione 3.2.

Definiamo lo spazio $\mathcal{H}^{p,q}M$ delle (p, q) -forme $\bar{\partial}$ -armoniche su M

$$\mathcal{H}^{p,q}M := \{\omega \in \Omega^{p,q}M \mid \Delta^{\bar{\partial}}\omega = 0\}.$$

Abbiamo mostrato nei precedenti seminari che lo spazio $\Omega^{p,q}M$ può essere dotato di una struttura di spazio pre-Hilbertiano. Ci poniamo allora la seguente domanda:

Data una forma $\psi \in \mathcal{Z}^{p,q}M$, tra tutte le forme $\{\psi + \bar{\partial}\eta\}$ rappresentanti la classe $[\psi]$, ne esiste una di norma minima?

La risposta a questa domanda è fornita proprio dal teorema di Hodge, mostriamo però dapprima un lemma preliminare:

Lemma 3.3.

Una forma $\psi \in \mathcal{Z}^{p,q}M$ è di norma minima nello spazio $\psi + \bar{\partial}\Omega^{p,q-1}M$ se e soltanto se $\bar{\partial}^\psi = 0$.*

3. Teoria di Dolbeault

Dimostrazione. Innanzitutto se $\bar{\partial}^*\psi = 0$ allora per ogni $\eta \in \Omega^{p,q-1}M$ con $\bar{\partial}\eta = 0$ si ha

$$\begin{aligned} \|\psi + \bar{\partial}\eta\|^2 &= \|\psi\|^2 + \|\bar{\partial}\eta\|^2 + 2\operatorname{Re}(\psi, \bar{\partial}\eta) \\ &= \|\psi\|^2 + \|\bar{\partial}\eta\|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{\partial}^*\psi, \eta) \\ &> \|\psi\|^2. \end{aligned}$$

Viceversa, se ψ ha norma minima, allora per ogni $\eta \in \Omega^{p,q-1}M$ si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} \|\psi + t\bar{\partial}\eta\|^2(0) = 0$$

d'altra parte per $t = 0$ si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} (\psi + t\bar{\partial}\eta, \psi + t\bar{\partial}\eta) = 2\operatorname{Re}(\psi, \bar{\partial}\eta)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} (\psi + t\bar{\partial}i\eta, \psi + t\bar{\partial}i\eta) = 2\operatorname{Im}(\psi, \bar{\partial}\eta)$$

così si ha

$$(\bar{\partial}^*\psi, \eta) = (\psi, \bar{\partial}\eta) = 0,$$

per ogni $\eta \in \Omega^{p,q-1}M$, da cui la tesi. \square

Così almeno formalmente, il gruppo di coomologia di Dolbeault $H^{p,q}M$ è rappresentato dalle soluzioni di due equazioni del primo ordine

$$\bar{\partial}\psi = 0, \quad \bar{\partial}^*\psi = 0.$$

Si vede facilmente (in analogia al caso del differenziale di de Rham) che queste due equazioni possono essere rimpiazzate da un'unica equazione del secondo ordine

$$\Delta^{\bar{\partial}}\psi = 0.$$

Quello che allora intuivamo è che ogni classe in coomologia potrebbe essere rappresentata in modo naturale da una forma armonica, cioè che potrebbe esistere un'isomorfismo

$$\mathcal{H}^{p,q}M \simeq H^{p,q}M,$$

questo isomorfismo è conseguenza diretta della decomposizione di Dolbeault dello spazio $\Omega^{p,q}M$.

Analogamente al caso de Rham vale:

Teorema 3.4. (Decomposizione di Dolbeault)

Lo spazio delle k -forme si decompone in somma diretta come

$$\Omega^{p,q}M = \mathcal{H}^{p,q}M \oplus \bar{\partial}^*\Omega^{p,q+1}M \oplus \bar{\partial}\Omega^{p,q-1}M.$$

Osservazione 3.5.

Osserviamo come dai risultati precedenti e da quest'ultima decomposizione segue immediatamente il fatto che su una varietà hermitiana complessa compatta una $(p, 0)$ -forma è olomorfa se e soltanto se è $\bar{\partial}$ -armonica.

Teorema 3.6. (Isomorfismo di Dolbeault)

La mappa

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{p,q}M &\rightarrow H^{p,q}M \\ \omega &\mapsto [\omega]\end{aligned}$$

è un isomorfismo.

Capitolo 4

Dualità e caso kähleriano

a cura di Giovanni Zaccanelli.

In questo capitolo dimostreremo un importante risultato di dualità per la coomologia di Dolbeault (analogo alla dualità di Poincaré vista nel primo capitolo), valido per varietà non necessariamente kähleriane; in seguito ci sposteremo in ambito kähleriano, concentrandoci su alcune proprietà degli spazi delle (p, q) -forme armoniche rispetto al differenziale $\bar{\partial}$, proprietà che si tradurranno, grazie all'isomorfismo di Dolbeault, sui gruppi di coomologia di Dolbeault di (p, q) -forme differenziali.

Cominciamo con un'osservazione, che nel seguito ci sarà utile più volte:

Osservazione 4.1.

Data $\omega \in \Omega^{p,q}M$, si ha

$$\overline{\Delta^{\bar{\partial}}(\omega)} = \Delta^{\partial}(\bar{\omega}).$$

Infatti abbiamo visto in un precedente seminario che $\overline{\bar{\partial}\omega} = \partial\bar{\omega}$, e analogamente:

$$\overline{\partial^*\omega} = \overline{-*\bar{\partial}*\omega} = -*\overline{\bar{\partial}*\omega} = -*\bar{\partial}*\bar{\omega} = -*\bar{\partial}*\bar{\omega} = \partial^*\bar{\omega},$$

dove la seconda e la quarta uguaglianza seguono dal fatto che lo $*$ di Hodge è un operatore reale, ovvero $*\bar{\omega} = \overline{*\omega}$, $\forall \omega \in \Omega_{\mathbb{C}}^*M$; questo è vero per la definizione che è stata data dello $*$ di Hodge su $\Omega_{\mathbb{C}}^*M$: è stato prima definito sulle forme a valori reali, e poi esteso per \mathbb{C} -linearità; dunque, se $\omega = \sigma + i\tau$, con σ e τ forme reali, si ha:

$$*\bar{\omega} = *(\sigma - i\tau) = *\sigma - i*\tau = \overline{*\omega}.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \overline{\Delta^{\bar{\partial}}(\omega)} &:= \overline{(\bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial})\omega} = \overline{\bar{\partial}\bar{\partial}^*\omega} + \overline{\bar{\partial}^*\bar{\partial}\omega} = \partial\bar{\partial}^*\bar{\omega} + \partial^*\bar{\partial}\bar{\omega} = \\ &= \partial\bar{\partial}^*\bar{\omega} + \partial^*\bar{\partial}\bar{\omega} = \Delta^{\partial}(\bar{\omega}). \end{aligned}$$

4.1. Il caso kähleriano

Il primo teorema che andiamo a dimostrare è un risultato valido sotto le ipotesi del precedente capitolo, più generali rispetto a quelle necessarie per i risultati che presenteremo nel prossimo paragrafo.

Teorema 4.2. (Dualità di Serre)

Sia (M, J, h) una varietà complessa hermitiana compatta di dimensione reale $2n$. Si ha, $\forall p, q = 1, \dots, n$:

$$\mathcal{H}^{p,q}M \cong \overline{\mathcal{H}^{n-p,n-q}M}.$$

Ne segue, grazie all'isomorfismo di Dolbeault, che

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q}M \cong \overline{H_{\bar{\partial}}^{n-p,n-q}M}.$$

Dimostrazione. La dimostrazione è simile a quella del teorema di dualità di Poincaré vista nel primo capitolo. Si consideri l'omomorfismo

$$\begin{aligned} \bar{*} : \Omega^{p,q}M &\rightarrow \Omega^{n-p,n-q}M \\ \omega &\mapsto \bar{*}\omega = *\bar{\omega} \end{aligned}$$

che è chiaramente un isomorfismo antilineare per le proprietà di $*$ viste nel precedente seminario. Poiché, come ricordato del primo capitolo, l'inverso dello $*$ di Hodge è un multiplo dello $*$ stesso, si vede facilmente che lo stesso accade anche per l'operatore $\bar{*}$ appena definito, poiché $*$ è un operatore reale; basta dunque anche in questo caso verificare che $\bar{*}$ preserva l'armonicità delle forme per dimostrare che l'isomorfismo $\bar{*}$ si restringe agli spazi delle forme armoniche.

A tale fine basta dimostrare la relazione $\Delta^{\bar{\partial}}\bar{*} = \bar{*}\Delta^{\bar{\partial}}$. Risulta:

$$\begin{aligned} \bar{*}\Delta^{\bar{\partial}}(\omega) &= *(\overline{\bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}})\omega = *(\partial\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\partial)\bar{\omega} = \\ &= - *(\partial*\bar{\partial}^* + *\bar{\partial}^*\partial)\bar{\omega} = \bar{\partial}^*\bar{\partial}^*\bar{\omega} + *^2\bar{\partial}^*\partial\bar{\omega} = \\ &= \bar{\partial}^*\bar{\partial}^*\bar{\omega} - \bar{\partial}^*\partial*\bar{\omega} = \bar{\partial}^*\bar{\partial}^*\bar{\omega} + \bar{\partial}\bar{\partial}^*\bar{\omega} = \\ &= \Delta^{\bar{\partial}}(\bar{*}\omega), \end{aligned}$$

dove la seconda uguaglianza segue dall'Osservazione 4.1. □

4.1 Il caso kähleriano

Supponiamo ora che M sia anche una varietà di Kähler. Quest'ipotesi aggiuntiva risulta particolarmente vantaggiosa, poiché in tal caso vale la seguente fondamentale relazione, dimostrata nel precedente seminario:

$$\Delta^{\bar{\partial}} = \Delta^{\partial} = \frac{1}{2}\Delta \tag{4.1}$$

dove l'ultimo laplaciano è quello rispetto al differenziale d di de Rham considerato nei primi due capitoli.

Proposizione 4.3.

Sia M una varietà di Kähler compatta. Allora

$$\mathcal{H}^k(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q}M.$$

Dimostrazione. Procediamo per doppia inclusione:

- $\mathcal{H}^k(M, \mathbb{C}) \supseteq \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q}M$:
data $\omega \in \mathcal{H}^{p,q}M$ con $p+q = k$, è chiaro che $\omega \in \mathcal{H}^k(M, \mathbb{C})$ per la (4.1);
ne segue la tesi.
- $\mathcal{H}^k(M, \mathbb{C}) \subseteq \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q}M$:
sappiamo che

$$\mathcal{H}^k(M, \mathbb{C}) \subseteq \Omega_{\mathbb{C}}^k M = \bigoplus_{p+q=k} \Omega^{p,q}M;$$

dunque data $\omega \in \mathcal{H}^k(M, \mathbb{C})$, è unica la scrittura

$$\omega = \sum_{p+q=k} \omega^{p,q}, \quad \text{dove } \omega^{p,q} \in \Omega^{p,q}M.$$

Si ha, sempre grazie alla (4.1):

$$0 = \Delta^{\bar{\partial}}\omega = \sum_{p+q=k} \Delta^{\bar{\partial}}\omega^{p,q} \Leftrightarrow \Delta^{\bar{\partial}}\omega^{p,q} = 0$$

per unicità della decomposizione. Ne segue che ogni $\omega^{p,q}$ è in realtà $\bar{\partial}$ -armonica, ovvero la tesi. □

Proposizione 4.4.

Sia M una varietà di Kähler compatta. Allora

$$\mathcal{H}^{p,q}M \cong \overline{\mathcal{H}^{q,p}M}.$$

Dimostrazione. Osserviamo che nel caso in cui M sia di Kähler l'Osservazione 4.1 diventa, grazie alla (4.1):

$$\overline{\Delta^{\bar{\partial}}(\omega)} = \Delta^{\bar{\partial}}(\bar{\omega}),$$

ovvero $\Delta^{\bar{\partial}}$ è un operatore reale; ne segue che l'isomorfismo antilineare dato dal coniugio

$$- : \Omega^{p,q}M \rightarrow \Omega^{q,p}M$$

passa alle forme armoniche. □

Proposizione 4.5.

Sia M una varietà di Kähler compatta. Allora

$$\mathcal{H}^{p,p}M \neq \{0\}, \quad \forall p = 0, \dots, n.$$

Dimostrazione. Sia $\omega \in \Omega^{1,1}M$ la forma di Kähler di M , e consideriamo $\omega^p \in \Omega^{p,p}M$, $p \in \mathbb{N}$; mostriamo che tali ω^p sono armoniche $\forall p$.

Procediamo per induzione su p :

$p = 0$: ω^0 è la funzione che vale costantemente 1, banalmente armonica grazie al Lemma 1.3 e alla (4.1) in quanto banalmente chiusa e cochiusa rispetto a d .

$p \Rightarrow p + 1$: consideriamo l'operatore di Lefschetz L introdotto nel precedente seminario; è stato dimostrato che su una varietà di Kähler $[L, \Delta] = 0$, ovvero L commuta con il laplaciano. Si ha allora

$$\Delta\omega^{p+1} = \Delta(\omega \wedge \omega^p) = \Delta L\omega^p = L\Delta\omega^p = 0$$

per ipotesi induttiva.

Abbiamo inoltre visto in un precedente seminario che ω^n è un multiplo non nullo della forma di volume di M , e dunque $\omega^p \neq 0 \forall p = 0, \dots, n$; ne segue la tesi. \square

Gli isomorfismi di Hodge e di Dolbeault visti nel primo e nel terzo capitolo traducono le tre proposizioni appena dimostrate nel seguente

Corollario 4.6.

Sia M una varietà di Kähler compatta. Allora:

- (i) $H_{dR}^k(M, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{p+q=k} H_{\bar{\partial}}^{p,q}M$
- (ii) $H_{\bar{\partial}}^{p,q}M \cong \overline{H_{\bar{\partial}}^{q,p}M}$
- (iii) $H_{\bar{\partial}}^{p,p}M \neq \{0\}, \quad \forall p = 0, \dots, n.$

Definizione 4.7.

Data (M, J, h) varietà hermitiana complessa si dicono *numeri di Hodge* gli

$$h^{p,q} := \dim_{\mathbb{C}}(H_{\bar{\partial}}^{p,q}M).$$

La definizione appena data ci permette di riassumere il Corollario 4.6 nel seguente

Corollario 4.8.

Sia M una varietà di Kähler compatta. Allora

- (i) $b_k = \sum_{p+q=k} h^{p,q}$

4.2. Un esempio

Per $n > 1$ definiamo $M := S^1 \times S^{2n-1}$; M prende il nome di *varietà di Hopf*. Vogliamo mostrare che M è un esempio di varietà complessa non kähleriana utilizzando i risultati riassunti nel Corollario 4.8.

Per prima cosa mostriamo dunque che M è una varietà complessa. Notiamo che le sfere S^1 e S^{2n-1} hanno entrambe dimensione dispari, e dunque di certo non sono varietà complesse (non sono neanche varietà quasi complesse); non possiamo dunque affermare che M è complessa in quanto prodotto di due varietà complesse, ma dobbiamo procedere diversamente.

Consideriamo $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, varietà complessa. Si hanno i diffeomorfismi:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \times S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{R} \times S^{2n-1} \\ z &\mapsto \left(|z|, \frac{z}{|z|} \right) \\ (x, s) &\mapsto (\log(x), s) \end{aligned}$$

da cui il diffeomorfismo

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \times S^{2n-1} \\ z &\mapsto \left(\log(|z|), \frac{z}{|z|} \right). \end{aligned}$$

Introduciamo su $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ la seguente azione di \mathbb{Z} : dato $d \in \mathbb{Z}$, definiamo

$$\begin{aligned} d : \mathbb{C}^n \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \\ (z_1, \dots, z_n) &\mapsto (e^d z_1, \dots, e^d z_n) \end{aligned}$$

È semplice verificare che l'associazione appena definita è effettivamente un'azione di gruppo, e definisce dunque una relazione di equivalenza su $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Vogliamo adesso leggere tale azione su $\mathbb{R} \times S^{2n-1}$ tramite il diffeomorfismo definito:

$$d(z) \mapsto \left(\log(|e^d z|), \frac{e^d z}{|e^d z|} \right) = \left(d + \log(|z|), \frac{z}{|z|} \right)$$

ossia l'azione si traduce in una traslazione sulla prima componente, mentre è banale sulla seconda.

Ne segue che l'azione definita è propriamente discontinua, e quindi

$$X := \frac{\mathbb{C}^n \setminus \{0\}}{\mathbb{Z}}$$

eredita la struttura complessa di $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Inoltre, denotata con \sim la relazione di equivalenza indotta su $\mathbb{R} \times S^{2n-1}$, si ha che

$$X \cong \frac{\mathbb{R} \times S^{2n-1}}{\sim} \cong S^1 \times S^{2n-1} = M$$

4.2. Un esempio

e dunque M eredita da tale diffeomorfismo una struttura complessa, compatibile con la sua struttura differenziale.

Mostriamo a questo punto che M non è una varietà kähleriana. Ricordiamo a tal fine la formula di Künneth per il calcolo della coomologia di una varietà prodotto $M_1 \times M_2$:

$$b_k(M_1 \times M_2) = \sum_{p+q=k} b_p(M_1)b_q(M_2).$$

Nel nostro caso, poiché

$$b_k(S^m) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0, m \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ha che

$$b_1(M) = 1, \quad b_2(M) = 0$$

entrambi in contraddizione con il Corollario 4.8. Ne segue che M non è una varietà kähleriana, per ogni $n > 1$.

Nota : abbiamo usato l'ipotesi $n > 1$ solo alla fine; in effetti, per $n = 1$ la varietà M è un toro, che è una varietà di Kähler.

Più precisamente il fatto che $b_1(M)$ sia dispari vuol dire che nel Corollario 4.6 almeno una tra la (i) e la (ii) viene meno, mentre il fatto che $b_2(M)$ sia nullo garantisce che non valga almeno una tra la (i) e la (iii).

Effettivamente si può vedere che in questo caso la relazione $b_1 = h^{0,1} + h^{1,0}$ continua a valere, e si ha dunque

$$H_{\bar{\partial}}^{0,1} M \not\cong \overline{H_{\bar{\partial}}^{1,0} M}$$

in quanto $H_{\bar{\partial}}^{1,0} M \cong \{0\}$ e $H_{\bar{\partial}}^{0,1} M \cong \mathbb{C}$, dove un generatore di $H_{\bar{\partial}}^{0,1} M$ è ad esempio $[\bar{\partial} \log(|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)]$, con $\log(|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)$ funzione multivoca definita su X .

Capitolo 5

Ulteriori risultati

a cura di Salvatore Dolce.

5.1 Invarianza dei numeri di Hodge

Abbiamo già accennato al fatto che in generale la coomologia di Dolbeault non è un invariante topologico, cioè possono esistere due varietà complesse X ed Y omeomorfe tali che

$$H^{p,q}(X) \not\cong H^{p,q}(Y).$$

Questa è un vecchia questione posta da Hirzebruch nel 1954:

"Are the $h^{p,q}$ and the Chern characteristic numbers of an algebraic variety V_n topological invariants of V_n ? If not, determine all those linear combinations of the $h^{p,q}$ and the Chern characteristic numbers which are topological invariants."

In particolare alcuni specifici controesempi sono stati costruiti come segue. Nel 1986, Gang Xiao ha costruito due superfici complesse S ed S' omeomorfe, ma non diffeomorfe, aventi numeri di Hodge differenti. Di più, si possono trovare varietà M ed M' tali che $M \times M$ sia diffeomorfo ad $M' \times M'$ tramite un diffeomorfismo che preserva l'orientazione, ma aventi numeri di Hodge differenti. (Per maggiori dettagli si vedano [9],[10])

Tuttavia possiamo sempre chiederci se sotto opportune ipotesi i numeri di Hodge siano invarianti, alcuni dei risultati più importanti sono:

- I numeri di Hodge sono invarianti topologici per curve e superfici complesse;
- I numeri di Hodge $h^{p,0}$ sono invarianti birazionali di varietà proiettive lisce;

- I numeri di Hodge sono invarianti per cambiamento di metrica kähleriana.

Ci occuperemo in dettaglio soltanto del terzo punto.

Abbiamo mostrato che nel caso Kähler vale la decomposizione:

$$H^m M = \bigoplus_{p+q=m} H^{p,q},$$

quello che allora ci chiediamo è se, almeno in questo caso, quest'ultima proprietà (e di conseguenza tutta la struttura del diamante di Hodge) venga preservata. Osserviamo che:

Proposizione 5.1.

La decomposizione di Dolbeault precedente non dipende dalla metrica.

Dimostrazione. Sia

$$K^{p,q} = \{\omega \in Z_{DR}^{p+q} M \mid [\omega] = [\eta] \text{ con } \eta \in \Omega^{p,q}\}$$

Osservazione 5.2. *Tale spazio non dipende dalla particolare metrica Kähler scelta.*

Il nostro obiettivo sarà mostrare che $H^{p,q} = K^{p,q}$. Infatti banalmente si ha $H^{p,q} \subset K^{p,q}$, mostriamo il viceversa.

Sia $\omega \in K^{p,q}$ ed η un suo rappresentante come nella definizione. Per il teorema di Hodge si ha

$$\eta = \alpha + \Delta\beta,$$

con $\alpha \in \mathcal{H}^{p,q}$, $\beta \in \Omega^{p,q}$. Passando alla componente (p, q) -esima si ha

$$\eta = \alpha^{p,q} + \Delta\beta^{p,q},$$

con $\alpha^{p,q} \in \mathcal{H}^{p,q}$.

Osservazione 5.3. *Notiamo che in questa passaggio è essenziale che la varietà sia Kähler.*

Riscrivendo l'ultimo passaggio si ha

$$\eta = \alpha^{p,q} + dd^* \beta^{p,q} + d^* d\beta^{p,q},$$

ma per il teorema di decomposizione di Hodge, essendo η chiusa, $d^* d\beta^{p,q}$ deve essere nullo (in quanto abbiamo già mostrato che una forma chiusa ha d^* -componente nulla). Perciò

$$\eta = \alpha^{p,q} + dd^* \beta^{p,q},$$

cioè stiamo dicendo che η (e quindi ω) e $\alpha^{p,q}$ stanno nella stessa classe di coomologia. Da cui la tesi. \square

5.2 Decomposizione di Lefschetz

L'ultimo risultato sulle varietà Kähler che analizziamo, in continuità con il lavoro svolto nei seminari precedente, è l'estensione della decomposizione di Lefschetz allo spazio $H^m M$. Infatti vale il seguente:

Teorema 5.4. (Hard Lefschetz Theorem)

Se M è una varietà di Kähler compatta di dimensione reale $2n$ allora per ogni $k \leq n$ si ha che

$$L^k : H^{n-k} M \rightarrow H^{n+k} M$$

è un isomorfismo.

Dimostrazione. Questo noto teorema segue facilmente, dati i risultati del seminario precedente, dal teorema d'isomorfismo di Hodge e dalla commutatività del laplaciano con l'operatore L . \square

Corollario 5.5. (Decomposizione di Lefschetz)

Posto

$$\begin{aligned} P^{n-k}(M) &= \text{Ker} L^{k+1} : H^{n-k} \rightarrow H^{n-k+2} \\ &= \text{Ker} \Lambda \cap H^{n-k}(M), \end{aligned}$$

si ha

$$H^m(M) = \bigoplus_k L^k P^{m-2k}(M).$$

Osservazione 5.6.

La decomposizione di Lefschetz è compatibile con la decomposizione di Hodge delle coomologie. Infatti l'operatore L ha bigrado $(1,1)$ così una classe è primitiva se e soltanto se ogni sua componente di tipo (p,q) è primitiva.

Per concludere questa sessione diamo una interpretazione geometrica della decomposizione di Lefschetz nel caso di una varietà M embedded nello spazio proiettivo \mathbb{P}^N con la metrica indotta.

Abbiamo visto che la forma

$$\omega = \frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} \log \|Z\|^2$$

è chiusa ma non esatta in \mathbb{P}^N . Dato che $\dim(H^2(\mathbb{P}^N)) = 1$ segue che $[\omega]$ è Poincaré-duale a un qualche multiplo non nullo di una classe di omologia di un iperpiano $H \in \mathbb{P}^N$. Infatti diciamo che $[\omega]$ è duale ad (H) , abbiamo già mostrato che

$$\int_l \omega = 1$$

dove $l \simeq \mathbb{P}^1$. Allora si ha

$$\#(H \cdot l) = 1$$

e quindi H è un iperpiano.

Evinciamo quindi che se $M \subset \mathbb{P}^N$ è una sottovarietà, la $(1, 1)$ -forma associata $\omega|_M$ è duale alla classe di omologia (V) della sottovarietà $V = M \cap H$. La versione Poincarè-dualizzata del teorema di Lefschetz ci dice allora che l'operazione d'intersezione con un $(N - k)$ -piano $\mathbb{P}^{N-k} \subset \mathbb{P}^N$ dà un isomorfismo

$$H_{n+k}M \longrightarrow H_{n-k}M.$$

Osservazione 5.7.

Infatti (dalla definizione di L) l'operatore L^k non è altro che la moltiplicazione per ω^k che nella sua versione duale è l'intersezione con l' $(n - k)$ -sottovarietà associata. Ora dato che abbiamo mostrato che il duale di ω è un iperpiano si ha che il duale di ω^k è un $(n - k)$ -piano.

Notiamo infine che in questa interpretazione, la coomologia primitiva $P^{n-k}M$ di M corrisponde via gli isomorfismi:

$$\begin{array}{ccc}
 & H^{n+k}(M) & \\
 L^k \nearrow & & \nwarrow \text{P.D.} \\
 H^{n-k}(M) & & H_{n-k}(M) \\
 & & \swarrow \cap \mathbb{P}^{N-k} \\
 \text{P.D.} \searrow & H_{n+k}(M) &
 \end{array}$$

al sottogruppo degli $(n - k)$ -cicli che non intersecano un iperpiano, i.e., l'immagine della mappa

$$H_{n-k}(M - V) \longrightarrow H_{n-k}(M).$$

Tali cicli sono chiamati cicli finiti.

Bibliografia

- [1] Phillip Griffiths, Joe Harris *Principles of algebraic geometry*, Wiley Classics Library
- [2] Claire Voisin *Hodge theory and complex algebraic geometry I*, Cambridge studies in advanced mathematics
- [3] Daniel Huybrechts *Complex geometry : an introduction*, Springer-Verlag
- [4] Andrei Moroianu *Lectures on Kähler Geometry*, London Mathematical Society
- [5] Marco Radeschi, "Il Teorema di Hodge, e varietà Kähleriane", <http://http://www.dm.unito.it/personalpages/fino/Hodge.pdf>
- [6] Edward Witten, "Supersymmetry and Morse theory", *Journal of Differential Geometry* 17 (1982) 661-692.
- [7] John Milnor *Morse Theory*, Princeton University Press, 1965.
- [8] Takuya Kitagawa, "The idea of Morse theory".
- [9] Gang Xiao, "An example of hyperelliptic surfaces with positive index". *Northeast. Math. J.* 2 (1986). No. 3, 255 – 257.
- [10] Frederic Campana, "Une remarque sur les nombres de Hodge des variétés projectives complexes" (Unpublished).