Seminario di Geometria superiore

Anno Accademico 2012-2013

Connessioni su fibrati principali, trasporto parallelo e gruppi di olonomia

a cura di:

Veronica Vignoli
Marco D'Ambra

Francesca Tucci
Paolo Magagnoli

Indice

Capitolo 1

Connessioni su fibrati principali

Seminario di Veronica Vignoli

1.1 Introduzione

In questo primo capitolo introduciamo il concetto di connessione per un fibrato principale. Viene richiamata la definizione di connessione su un fibrato vettoriale e se ne mostrano alcune proprietà, quando pensata come derivata covariante. Infine si arriva a mostrare come una connessione su un fibrato vettoriale ne induca una sul fibrato principale dei riferimenti (*frame bundle*) associato e viceversa.

1.2 Derivata covariante

Lavoriamo in questa prima sezione ancora su fibrati vettoriali riprendendo alcune nozioni che già conosciamo e leggendole in altri termini. Sia dunque $\pi : E \to M$ un fibrato vettoriale.

Durante il corso abbiamo definito la connessione ∇ come un'applicazione lineare

$$\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E) \simeq \Gamma(Hom(TM, E))$$

che soddifa la regola di Leibniz. Associamo quindi ad una sezione σ una sezione $\nabla\sigma$: $\sigma \mapsto (\nabla\sigma : X \mapsto \nabla_X\sigma)$.
In questo contesto risulta utile guardarla come operazione di derivazione. Definiamo *derivata covariante* l'operatore

$$\nabla : \Gamma(E) \times C^\infty(M) \to \Gamma(E)$$

che associa ad una sezione σ e al campo X la sezione $\nabla_X\sigma$ e che è $C^\infty(M)$-lineare rispetto ad X, $\mathbb{R}$-lineare rispetto a σ e soddisfa la solita regola di Leibniz.
Dalla definizione risulta essere puntuale nella seconda variabile (cioè in X) e locale nella prima (in σ).

Definizione 1.1. Dato $p \in M$ e $X \in T_p(M)$, una sezione locale $\sigma \in \Gamma(E)$ si dice *parallela nella direzione di* X *in* p se $\nabla_X\sigma(p) = \nabla_{X_p}\sigma = 0$.
Analogamente σ si dice *parallela lungo una curva* $\gamma_t \in M$ se $\nabla_{\dot\gamma_t}\sigma = 0\ \forall t$.

Valgono i seguenti due lemmi:

Lemma 1.2.1. *Sia* $p \in M$, $X \in T_p(M)$ *e* E *fibrato vettoriale su* M *con derivata covariante* ∇. *Se due sezioni* σ *e* σ' *di* E *sono tali che* $\sigma(p) = \sigma'(p)$, *allora* $d\sigma_p(X) = d\sigma'_p(X) \iff \nabla_X(\sigma)(p) = \nabla_X(\sigma')(p)$.

Dimostrazione. Per la linearità basterà mostrare che se una sezione σ soddisfa $\sigma(p) = 0$ allora $d\sigma_p(X) = 0 \iff (\nabla_X\sigma)(p) = 0$. Abbiamo visto che ∇ è un operatore locale quindi possiamo ridurci a lavorare in una locale banalizzazione di E per un intorno U del punto p in M. Sia dunque $\psi : \pi^{-1}U \to M \times \mathbb{R}^k$ diffeomorfismo e poniamo $\psi \circ \sigma = (f_1, \dots, f_k)$ con f_i funzioni reali su U. L'ipotesi $\sigma(p) = 0$ si riscrive allora in questi termini come $f_i(p) = 0$. Se indichiamo con σ_i la base locale di E su U, immagine tramite ψ della base canonica di $\mathbb{R}^k$, si ha $\sigma = \sum f_i\sigma_i$ e per Leibniz

$$\nabla_{X_p}\sigma = \sum f_i(p)d\sigma_i(p) + \sum(\partial_{X_p}f_i)\sigma_i(p) = \sum(\partial_{X_p}f_i)\sigma_i(p).$$

Dunque

$$\nabla_{X_p}\sigma = 0 \iff \partial_{X_p}f_i = 0\forall i \iff (\psi \circ \sigma)_*(X_p) = 0 \iff \sigma_*(X_p) = 0$$

ovvero la tesi. □

Lemma 1.2.2. *Sia* $p \in M$. *Per ogni* $X \in T_p(M)$ *ed* $e \in E_p$ *esiste* σ *sezione locale di* E *che è parallela nella direzione di* X *in* p *e tale che* $\sigma(p) = e$.

Dimostrazione. Poiché se X è nullo ogni sezione locale risulta essere parallela ad X basta mostrare il lemma per $X \neq 0$. Quindi sia (x_i) un sistema di coordinate locali in un intorno U di p e come per la dimostrazione precedente costruiamo σ_j una base locale di E attorno a p attraverso la banalizzazione locale di E. Infine sia τ una sezione locale di E (qualsiasi) tale che $\tau(p) = e$. Allora possiamo scrivere $X = \sum a_i\frac{\partial}{\partial x_i}(p)$ e $\nabla_X\tau = \sum b_j\sigma_j(p)$, dove gli a_i e i b_j sono numeri reali per ogni $i = 1, \dots, n$ e $j = 1\dots, k$. X non nullo implica che almeno uno degli $a_i \neq 0$: sia per esempio $a_1 \neq 0$. Allora definiamo $\sigma \doteq \tau - \frac{x_1}{a_1} \sum b_j \sigma_j$. Risulta infatti:

$$\sigma(p) = \tau(p) - \frac{x_1(p)}{a_1} \sum b_j \sigma_j(p) = e$$

perché $x_1(p) = 0$[1], e

$$\nabla_X \sigma = \nabla_X \tau - \frac{\partial_X x_1}{a_1} \nabla_X \tau - \frac{x_1(p)}{a_1} \sum b_j \nabla_X \sigma_j = \nabla_X \tau - \frac{a_1}{a_1} \nabla_X \tau = 0.$$

$\square$

A questo punto grazie al lemma 1.2.1 otteniamo per ogni $e \in E$ un'applicazione lineare

$$h : T_{\pi(e)} M \to T_e E$$

che manda ogni $X \in T_{\pi(e)} M$ nel suo *sollevamento orizzontale* $\tilde{X} \doteq \sigma_*(X)$ dove σ è una sezione locale di E parallela nella direzione di X in p e tale che $\sigma(p) = e$ [2].
Chiaramente, poiché σ è una sezione locale, vale $\pi_* \circ h = Id$ e questo garantisce che la mappa h ristretta all'immagine è un isomorfismo. Indichiamo con $T_e^h E$ l'immagine di h. Inoltre, chiamando $T_e^v E$ lo spazio tangente alla fibra di E in e (cioè $T_e^v E = T_e(E_{\pi(e)})$), si ha la decomposizione in somma diretta

$$T_e E = T_e^h E \oplus T_e^v E$$

e dunque

$$TE = T^h E \oplus T^v E = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}.$$

$\mathcal{H}$ è detta *distribuzione orizzontale* e $\mathcal{V}$ *distribuzione verticale.*
Dato che $\mathcal{V}$ è definita indipendentemente dalla derivata covariante considerata su E, in realtà dare una connessione su E equivale a dare una distribuzione $\mathcal{H}$ che in somma diretta con $\mathcal{V}$ dia il tangente di E e viceversa. Non rientra nello scopo di questo seminario vederne l'equivalenza, ma sarà questa la definizione che prenderemo per le connessioni su fibrati principali.

1.3 Connessioni su fibrati principali

In questa sezione introduciamo il concetto di connessione per un fibrato principale. Ricordiamo: sia M una varietà liscia, G un gruppo di Lie e $\forall g \in G$

[1] p è il centro dell'intorno U dove abbiamo le coordinate $x_1, \ldots, x_n$, dunque p ha coordinate $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

[2] L'esistenza di σ è garantita dal lemma 1.2.2.

indichiamo con $L_g : G \to G$ e $R_g : G \to G$ la moltiplicazione rispettivamente a sinistra e a destra per g. Un *fibrato principale* (o *G-struttura*) su M è una varietà differenziabile con una summersione $C^\infty \quad \pi : P \to M$ e un'azione destra del gruppo G che si restringe a un'azione libera e transitiva su ogni fibra.
Ricordando quanto detto per i fibrati vettoriali, dato $u \in P$, indichiamo con $\mathcal{V}_u$ lo spazio tangente alla fibra di P in u, cioè $\mathcal{V}_u = T_u(P_{\pi(u)}) \subseteq T_uP$ e dunque con $\mathcal{V}$ la distribuzione verticale: $\mathcal{V} = \bigcup_{u \in P} \mathcal{V}_u$.

Osservazione 1.1. $\mathcal{V}$ é un sottofibrato di TP ed è indipendente dalla connessione che si definisce su P.

A questo punto siamo pronti per la seguente

Definizione 1.2. Una connessione su P è una distribuzione liscia $\mathcal{H}$ tale che:

1. $TP = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$
2. $(R_g)_*(\mathcal{H}_u) = \mathcal{H}_{ug} \;\; \forall u \in P, \, \forall g \in G$

Osservazione 1.2. La condizione 1. equivale a richiedere che π_* mappi isomorficamente $\mathcal{H}$ in $T_{\pi(u)}M$ per ogni $u \in P$. Ugualmente a quanto fatto per i fibrati vettoriale nella precedente sezione, chiamiamo sollevamento orizzontale di X in u l'immagine del campo $X \in T_{\pi(u)}M$ attraverso l'inversa di questa mappa.

Definizione 1.3. Sia $x \in M$ e σ una sezione locale di P definita un intorno di x. σ si dice *orizzontale* in x se il suo differenziale $d\sigma_x$ in x mappa T_xM in $\mathcal{H}_{\sigma(x)}$.

1.4 Parallelo tra connessioni su fibrati principali e su fibrati vettoriali

Abbiamo visto nei precedenti seminari che ad ogni fibrato vettoriale E su M si può associare il suo fibrato dei riferimenti $Gl(E)$, che risulta essere un fibrato principale, e viceversa per ogni G -fibrato principale P su M, tramite una rappresentazione di G, $\rho : G \to Gl_k(\mathbb{R})$, si costruisce un fibrato vettoriale $E \doteq P \times_\rho \mathbb{R}^k \doteq P \times \mathbb{R}^k/_\sim$ dove $\sim$ è la relazione d'equivalenza per cui

$$(u, \xi) \sim (v, \eta) \iff \exists g \in G : v = ug, \eta = \rho(g^{-1})\xi.$$

Inoltre abbiamo visto che se nella costruzione appena ricordata $G = Gl_k(\mathbb{R})$ e $\rho = Id$, le due operazioni $E \to P \doteq Gl(E)$ e $P \to E \doteq P \times_{Id} \mathbb{R}^k$ sono una l'inversa dell'altra.

Allora è lecito chiedersi a questo punto se anche le connessioni dei fibrati vettoriali e principali associati l'un l'altro siano correlate in qualche modo, ed effettivamente vale il seguente

Teorema 1.4.1. *i. Una derivata covariante su un fibrato vettoriale E su M induce una connessione sul fibrato dei riferimenti $Gl(E)$.*

ii. Viceversa, una connessione su un G-fibrato principale P su M induce in maniera canonica una derivata covariante su tutti i fibrati vettoriali associati a P da una rappresentazione ρ di G.

Inoltre se $G = Gl_k(\mathbb{R})$ e $\rho = Id$ queste due costruzioni sono una l'inversa dell'altra.

Dimostrazione. i. Sia $E \to M$ fibrato vettoriale con derivata covariante ∇. Dimostrare questa prima parte vuol dire interpretare ∇ in termini del fibrato dei riferimenti associato a E. Ricordiamo che, data $x \in M$, un elemento $u \in Gl_x(E)$ è un isomorfismo $u : \mathbb{R}^k \to E_x$ che può essere visto come una base $(v_1, \dots, v_k)$ di E_x dove $(v_1, \dots, v_k)$ è l'immagine attraverso u della base canonica di $\mathbb{R}^k$.
A questo punto, dato $X \in T_xM$ vogliamo definire il suo sollevamento orizzontale per ogni $u = (v_1, \dots, v_k) \in Gl_xE$. Consideriamo σ_i sezioni locali su E intorno a x e tali che $\sigma_i(x) = v_i$, $(\nabla_X\sigma_i)_x = 0$. Avremo allora $\sigma \doteq (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ una sezione locale di $Gl(E)$ tale che $\sigma(x) = (\sigma_1(x), \dots, \sigma_k(x)) = (v_1(x), \dots, v_k(x)) = u$.
Definiamo dunque $(\tilde{X})_u \doteq \sigma_*(X) \in T_u(Gl(E))$. Passando attraverso banalizzazioni locali (come fatto per il lemma 1.2.1) si dimostra che $\tilde{X}$ non dipende dalle σ_i. Indichiamo con $\mathcal{H}_u$ l'insieme dei sollevamenti $\tilde{X}_u$ ($\mathcal{H}_u \subseteq T_u(Gl(E))$) [3] e con $\mathcal{H} = \bigcup \mathcal{H}_u$. $\mathcal{H}$ è la nostra distribuzione orizzontale. Bisogna verificare che soddisfa gli assiomi della definizione. Il primo punto segue naturalmente nel momento in cui si definisce $\mathcal{V}_u \doteq T_u(Gl_{\pi(u)}(E))$. Rimane da mostrare che $\mathcal{H}$ è $Gl_k(\mathbb{R})$ invariante. Sia $g = (g_{ij}) \in Gl_k(\mathbb{R})$, $X \in T_xM$, $u = (v_1, \dots, v_k) \in Gl_xE$, σ definita come prima; allora σg è ancora una sezione di $Gl(E)$ ed è tale che $\sigma g(x) = ug$ e le coordinate $(\sigma g)_i = \sum_j g_{ij}\sigma_j$ soddisfano $(\nabla_X(\sigma g)_i)_x = 0$. Dunque

$$(R_g)_*(\tilde{X}_u) = (R_g)_*(\sigma_*(X)) = (R_g \circ \sigma)_*(X) = (\sigma g)_*(X) = \tilde{X}_{ug}.$$

ii. Vediamo ora il viceversa. Fissato $x \in M$, ricordiamo che ogni sezione ψ su E si scrive come $\psi = [\sigma, \xi]$ dove σ è una sezione locale di P

[3] Con le notazioni usate per i fibrati vettoriali $\mathcal{H}_u$ sarebbe $T_u^h(Gl(E))$.

orizzontale in x e ξ una funzione C^∞ a valori in $\mathbb{R}^k$. Allora $\forall X \in T_xM$ definiamo

$$(\nabla_X \psi)_x \doteq [\sigma(x), \partial_X \xi].$$

Per prima cosa bisogna controllare che questa derivata sia ben definita, poi che effettivamente sia una derivata covariante per come l'abbiamo definita nella sezione precedente.
Mostriamo che ∇ non dipende dalla scelta di σ: sia σ' un'altra sezione locale di P orizzontale in x; quindi $\sigma' = \sigma f$ dove f è una mappa locale intorno a x a valori in G. Chiamiamo $a = f(x)$ e $A = (f_*)(X) \in T_aG$, ovvero:

$$\begin{aligned} f_* : T_xM &\to T_aG \\ X &\mapsto A \end{aligned}$$

Allora usando la regola di Leibniz:

$$\begin{aligned} \sigma'_*(X) &= (\sigma f)_*(X) = \sigma(x) f_*(X) + \sigma_*(X) f(x) = \sigma(x)A + \sigma_*(X)a = \\ &= (L_u)_*(A) + (R_a)_*(\sigma_*(X)) \end{aligned}$$

dove $u = \sigma(x)$. Poiché $\sigma'_*(X)$ e $\sigma_*(X)$ stanno in $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}$ è G-invariante, allora $(L_u)_*(A) \in \mathcal{H}$. D'altra parte $(L_u)_*(A) \in \mathcal{V}$ per definizione, dunque $(L_u)_*(A) = 0$ e cioè $A = 0$ perché L_u è un diffeomorfismo.
A questo punto, la scrittura di ψ rispetto a σ' è $\psi = [\sigma', \rho(f^{-1})\xi]$ e si ha:

$$\begin{aligned} (\nabla_X \psi)_x &= [\sigma'(x), \partial_X(\rho(f^{-1})\xi)] = \\ &= [\sigma'(x), \rho(f^{-1}\partial_X \xi)] + [\sigma'(x), \rho_*(A)\xi)] = \\ &= [\sigma'(x), \rho(f^{-1}\partial_X \xi)] = \\ &= [\sigma(x), \partial_X \xi)]. \end{aligned}$$

Quindi ∇ è ben definita. Inoltre ∇ soddisfa gli assiomi di definizione di derivata covariante.

Infine nel caso particolare per $G = Gl_k(\mathbb{R})$ e $\rho = Id$ abbiamo visto che le costruzioni del fibrato vettoriale dal principale e viceversa sono una l'opposta dell'altra; ma allora segue direttamente che anche le costruzioni delle connessioni lo sono. $\square$

Capitolo 2

Trasporto parallelo

Seminario di Marco D'Ambra

2.1 Introduzione

In questo capitolo parleremo di parallelismo su fibrati.
Cominceremo inizialmente a lavorare con fibrati vettoriali $E \to M$, introducendo su di essi la nozione di trasporto parallelo lungo curve.
Mostreremo poi un risultato di fondamentale importanza, ossia che dare un trasporto parallelo su di un fibrato vettoriale è equivalente a dare una connessione ∇.
Successivamente definiremo il gruppo di olonomia $Hol(\nabla)$ di un fibrato vettoriale dotato di connessione, che verrà poi studiato più a fondo nei prossimi due capitoli.
Infine daremo un accenno a come tutti i risultati ottenuti si adattano al caso per noi più importante, ossia quello dei G-fibrati principali $P \to M$, introducendo il concetto di sollevamento orizzontale di cammini.

2.2 Parallelismo su fibrati vettoriali

Per cominciare a parlare di parallelismo, consideriamo una varietà differenziabile M ed il suo fibrato tangente $TM \to M$. Siano $p, q \in M$ e siano $v_p \in T_pM$, $v_q \in T_qM$ due vettori tangenti. Quello che faremo è cercare nuove strutture in grado di stabilire come ed in che senso v_p e v_q possano essere considerati paralleli.

2.2.1 Caso fortunato

Se tutti gli spazi tangenti alla varietà sono canonicamente isomorfi tra loro parlare di parallelismo è facile. Consideriamo ad esempio T_pM, T_qM e l'isomorfismo canonico che li connette $\tau_p^q : T_pM \to T_qM$. È intuitivo dare la seguente definizione:

Definizione 2.1. v_p parallelo a v_q se $\tau_p^q(v_p)$ e v_q sono paralleli in T_qM.

Isomorfismi di questo tipo esistono nel caso di varietà parallelizzabili.

Definizione 2.2. La varietà M si dice parallelizzabile se $TM \to M$ è isomorfo al fibrato banale $M \times \mathbb{R}^n \to M$.

Nel precedente gruppo di seminari si è parlato dei gruppi di Lie che sono un esempio di varietà parallelizzabili. Consideriamo un gruppo di Lie G e la sua moltiplicazione sinistra $L_g : G \to G$, $a \mapsto ga$, con mappe tangenti $(dL_g)_a : T_aG \to T_{ga}G$. È stata introdotta anche la nozione di campo vettoriale $X \in \chi(G)$ invariante a sinistra, i.e. $(dL_g)_a(X_a) = X_{ga}$ ed è stato spiegato come un campo vettoriale invariante a sinistra possa essere ricostruito da un suo qualsiasi valore $X_p \in T_pG$.
Prendiamo ora due punti $p, q \in G$. Sappiamo che $\exists!\ g \in G$ tale che $q = L_g(p) = gp$. Gli isomorfismi $\tau_p^q : T_pM \to T_qM$ sono le mappe $(dL_g)_p : T_pM \to T_qM$, che associano ad X_p il valore in q dell'unico campo vettoriale X invariante a sinistra che valutato in p da X_p.

Ovviamente considerazioni analoghe valgono per fibrati vettoriali generici $E \to M$ isomorfi a fibrati banali.

2.2.2 Caso generale

In assenza di isomorfismi canonici, occorre trovare modi per connettere gli spazi tangenti T_pM, T_qM. Come vedremo tra poco costruiremo degli isomorfismi che connetteranno questi spazi mediante curve γ congiungenti p e q. Si perderà quindi l'unicità, poichè in generale curve diverse daranno luogo ad isomorfismi diversi. Parleremo quindi di vettori v_p e v_q paralleli non in senso assoluto, ma lungo una curva.
Cominciamo ora a formalizzare il tutto.
Lavoriamo con un fibrato vettoriale generico $E \to M$, dotato di una connessione ∇.
Sia $\gamma = \gamma(t)$ una curva su M, $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$. Sia σ una sezione di E parametrizzata lungo la curva $\sigma(t) \in E_{\gamma(t)}$.
Diamo la seguente definizione:

Definizione 2.3. La sezione σ si dice parallela lungo γ se $\nabla_{\gamma'(t)}\sigma(t) = 0 \ \forall \ t$.

Introduciamo ora la famiglia di trasporti paralleli $\mathcal{T}$, ossia gli isomorfismi di cui parlavamo prima.

Definizione 2.4. Una famiglia di trasporti paralleli sul fibrato vettoriale $E \to M$ è una collezione $\mathcal{T} = \{\tau_\gamma\}$, dove per ogni $\gamma = \gamma(t)$ curva su M ho applicazioni $(\tau_\gamma)_s^t : E_{\gamma(s)} \to E_{\gamma(t)}$ tali che:

i) $(\tau_\gamma)_s^t$ isomorfismi tra le fibre,

ii) $(\tau_\gamma)_s^s = id$,

iii) $(\tau_\gamma)_u^t \circ (\tau_\gamma)_s^u = (\tau_\gamma)_s^t$,

iv) le dipendenze da s, t, γ sono tutte lisce.

Sia $\sigma_s \in E_{\gamma(s)}$. L'elemento $\sigma_t = (\tau_\gamma)_s^t(\sigma_s)$ si dice risultato dell'operazione di trasporto parallelo da $E_{\gamma(s)}$ a $E_{\gamma(t)}$ lungo la curva γ.

Abbiamo così connesso le varie fibre E_p del fibrato vettoriale generico $E \to M$ e possiamo finalmente parlare di parallelismo.
Ora dobbiamo convincerci che la costruzione geometrica appena fatta non aggiunge strutture a noi sconosciute al fibrato. Infatti, come illustra il seguente teorema, la teoria dei trasporti paralleli fornisce solo un altro modo di interpretare la teoria delle connessioni.

Teorema 2.2.1. *Sia $E \to M$ un fibrato vettoriale su una varietà differenziabile. La nozione di connessione ∇ e quella di trasporto parallelo $\mathcal{T}$ sono equivalenti.*
Ad ogni famiglia di trasporti paralleli $\mathcal{T}$ è associata una connessione $\nabla_{\mathcal{T}}$, ad ogni connessione ∇ è associata una famiglia di trasporti paralleli $\mathcal{T}_\nabla$.

Per la dimostrazione del teorema è comodo guardare ad una connessione ∇ sul fibrato come ha fatto precedentemente Veronica, ossia come ad un'operazione di derivazione $\nabla : \Gamma(E) \times \chi(M) \to \Gamma(E)$, che associa alla sezione σ e al vettore X la sezione $\nabla_X \sigma$, detta derivata covariante di σ rispetto ad X. Quest'operazione risulta essere $C^\infty(M)$-lineare rispetto ad X, $\mathbb{R}$-lineare rispetto a σ e soddisfa la solita regola di Leibniz. Inoltre risulta dipendere puntualmente da X e localmente da σ.

Dimostrazione. Costruiamo $\nabla_{\mathcal{T}}$ a partire da $\mathcal{T}$.
Consideriamo una sezione $\sigma \in \Gamma(E)$, un campo vettoriale $X \in \chi(M)$ e definiamo $\nabla_X \sigma \in \Gamma(E)$.

Sia $p \in M$ e sia $\gamma = \gamma(t)$ una qualsasi curva tale che $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = X_p$. Considero $(\tau_\gamma)_0^t : E_p \to E_{\gamma(t)}$ e la sua inversa $((\tau_\gamma)_0^t)^{-1} = (\tau_\gamma)_t^0$. Definiamo

$$(\nabla_X \sigma)_p = \frac{d}{dt}[(\tau_\gamma)_t^0 \circ \sigma(t)]\Big|_{t=0} = lim_{t\to 0}\frac{(\tau_\gamma)_t^0(\sigma(t)) - \sigma_0}{t}.$$

A rigore andrebbe verificato che la definizione appena data è ben posta e che l'applicazione definita è una connessione.
Bisognerebbe quindi mostrare che $(\nabla_X\sigma)_p$ non dipende nè dalla scelta della curva γ nè dalla sua parametrizzazione ma solo da X_p e da $\sigma(t)$. Inoltre bisognerebbe verificare che la dipendenza da p è liscia, ossia che le $(\nabla_X\sigma)_p \in E_p$ si incollano ad una sezione $\nabla_X\sigma$ e che sono verificate tutte le proprietà di una connessione.
Costruiamo $\mathcal{T}_\nabla$ a partire da ∇.
Sia $\gamma = \gamma(t)$ una curva su M, $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q \in M$. Vogliamo costruire $(\tau_\gamma)_0^1 : E_p \to E_q$. Consideriamo quindi $\sigma_0 \in E_p$ e costruiamo $\sigma_1 = (\tau_\gamma)_0^1(\sigma_0)$.
L'idea è di costruire una sezione $\sigma = \sigma(t)$ parallela lungo la curva e tale che $\sigma(0) = \sigma_0$, ossia tale che soddisfa il sistema

$$\begin{cases} \{\nabla_{\gamma'(t)}\sigma(t) = 0 \\ \sigma(0) = \sigma_0 \end{cases}.$$

Localmente, con riferimento $S = \{s_1, ..., s_k\}^t$, si ha $\sigma(t) = \sum_\alpha \sigma^\alpha(t)s_\alpha(t)$.
Svolgendo i calcoli, fatti più volte in classe, si arriva a

$$\begin{cases} \{\frac{d^2\sigma^\alpha}{dt^2} + \sum_\beta \omega_\beta^\alpha(\gamma'(t))\sigma^\beta(t) = 0 \\ \sigma(0) = \sigma_0 \end{cases}.$$

A questo sistema esiste un'unica soluzione $\sigma(t)$ (almeno localmente) e possiamo quindi definire $(\tau_\gamma)_0^1(\sigma_0) = \sigma(1)$.
Si può verificare che le applicazioni appena costruite costituiscono una famiglia di trasporti paralleli. □

2.3 Cenni di olonomia su fibrati vettoriali

Una volta definito il trasporto parallelo è naturale introdurre il concetto d'olonomia di un fibrato vettoriale.
Torniamo per un momento al caso del fibrato tangente $TM \to M$ con connessione ∇ e consideriamo una generica curva chiusa $\gamma = \gamma(t)$ con $\gamma(0) = \gamma(1) = p \in M$.
Siamo ormai convinti che l'automorfismo di trasporto parallelo $\tau_\gamma = (\tau_\gamma)_0^1$:

$T_pM \to T_pM$ è in generale diverso dall'identità.
Tutti i possibili automorfismi formano il gruppo $Hol_p(\nabla)$, detto gruppo di olonomia di ∇ in p. Studiare le proprietà algebriche di questo gruppo è di fondamentale importanza in geometria, poichè forniscono informazioni importanti su corrispondenti proprietà geometriche della varietà.
In un certo senso l'idea è di misurare quanto il fibrato tangente sia non banale, ossia quanto differisca dai casi fortunati citati sopra.
Lavoriamo più in generale e formalizziamo.
Sia $E \to M$ un fibrato vettoriale con connessione ∇ e sia $p \in M$.

Definizione 2.5. Si definisce gruppo di olonomia di ∇ in p l'insieme

$$Hol_p(\nabla) = \{\tau_\gamma \mid \gamma : [0,1] \to M \text{ cappio in } p\}$$

Definizione 2.6. Si definisce gruppo di olonomia ristretto di ∇ in p l'insieme

$$Hol_p^0(\nabla) = \{\tau_\gamma \mid \gamma : [0,1] \to M \text{ cappio contraibile in } p\}$$

Per i gruppi di olonomia valgono le seguenti proprietà:

i) $Hol_p(\nabla)$ è un sottogruppo di Lie di $GL(E_p)$. Il fatto che sia contenuto in $GL(E_p)$ segue dal fatto che $\tau_\gamma : E_p \to E_p$ è un isomorfismo di spazi vettoriali. Per mostrare che $Hol_p(\nabla)$ è un sottogruppo basta definire:

$$\gamma_1\gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_2(2t) & \text{se } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma_1(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t) \quad 0 \le t \le 1.$$

Risulta quindi $\tau_{\gamma_1} \circ \tau_{\gamma_2} = \tau_{\gamma_1\gamma_2} \in Hol_p(\nabla)$, $(\tau_\gamma)^{-1} = \tau_{\gamma^{-1}} \in Hol_p(\nabla)$.

ii) $Hol_p^0(\nabla)$ è un sottogruppo connesso di $Hol_p(\nabla)$, ossia la componente connessa dell'identità.
Se M è semplicemente connessa tutti i cappi in p sono omotopi e $Hol_p(\nabla) = Hol_p^0(\nabla)$.

iii) $Hol_p(\nabla)$ è indipendente da p tramite coniugio in $GL(E_p)$. Siano p e q in M, allora consideriamo la curva $\gamma : [0,1] \to M$ con $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$ e avremo $\tau_\gamma : E_p \to E_q$ da cui segue che $Hol_q(\nabla) = \tau_\gamma Hol_p(\nabla) {\tau_\gamma}^{-1}$.
In merito a queste considerazioni, spesso si parla di gruppo di olonomia $Hol(\nabla)$, dimenticandosi la dipendeza dal punto p.
Le stesse identiche considerazioni valgono per l'olonomia ristretta e si parla quindi di $Hol^0(\nabla)$.

2.4 Parallelismo su fibrati principali

Lavoriamo ora con G strutture e vediamo cosa riusciamo a dire.
Sia $P \to M$ un G-fibrato principale dotato di connessione, o distribuzione orizzontale, $\mathcal{H}$.
Si ha la decomposizione $TP = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$, dove $\mathcal{V}$ è la distribuzione vetricale.
Fibra per fibra risulta $T_uP = \mathcal{H}_u \oplus \mathcal{V}_u$ e vale la regola $(R_g)_*(\mathcal{H}_u) = \mathcal{H}_{ug}$ $\forall u \in P, \forall g \in G$.
L'idea alla base è sempre la stessa: consideriamo $p, q \in M$ e ci chiediamo in che senso due elementi $u_p \in \pi^{-1}(p)$, $u_q \in \pi^{-1}(q)$ possano essere considerati paralleli.
Come annunciato, per parlare di parallelismo, introdurremo la nozione di sollevamento orizzontale di cammini.
Diamo quindi le due seguenti definizioni:

Definizione 2.7. Sia $\psi = \psi(t)$ una curva su P. ψ si dice orizzontale (rispetto alla connessione $\mathcal{H}$) se $\psi'(t) \in \mathcal{H}_{\psi(t)}$ $\forall t$.

Definizione 2.8. Sia $\gamma = \gamma(t)$ una curva su M, $\gamma(0) = p$ e sia $u \in \pi^{-1}(p)$.
Una curva $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(t)$ su P è detta sollevamento di γ da p in u se $\gamma(t) = \pi(\tilde{\gamma}(t))$ $\forall t$, $\tilde{\gamma}(0) = u$.

Si ha il seguente fondamentale risultato:

Teorema 2.4.1. *Sia $\gamma : [0,1] \to M$ una curva su M, $\gamma(0) = p$ e sia $u \in \pi^{-1}(p)$.*
Esiste un unico sollevamento $\tilde{\gamma} : [0,1] \to P$ da p in u tale che $\tilde{\gamma}$ sia orizzontale.

Per fare questa dimostrazione abbiamo bisogno di parlare di pullback di un fibrato principale tramite una mappa e di connessioni pullback.
Siano M ed N due varietà, sia $P \to N$ un G-fibrato principale e sia $f : M \to N$ una mappa liscia.
Consideriamo l'insieme $f^*P = \{(u,p) \in P \times M \mid \pi(u) = f(p)\}$.
Grazie alla banalità locale di P è immediato verificare che la mappa $f^*P \to M$ definisce una struttura di G-fibrato principale, detto fibrato pullback.
La fibra di f^*P in p risulta isomorfa alla fibra di P in $f(p)$ tramite la mappa $(u,p) \mapsto u$.
Inoltre risulta $T_{(u,p)}f^*P = \{(V,X) \in T_uP \times T_pM \mid \pi_*(V) = f_*(X)\}$.
Se $\mathcal{H}$ è una connessione sul fibrato di partenza P si puo costruire la connessione $f^*\mathcal{H}$ sul fibrato pullback f^*P.
Fibra per fibra si definisce $(f^*\mathcal{H})_{(u,p)} = \{(V,X) \in \mathcal{H}_u \times T_pM \mid \pi_*(V) = f_*(X)\}$. Indicando con $f^*\mathcal{H}$ la collezione dei $(f^*\mathcal{H})_{(u,p)}$ e con $f^*\mathcal{V}$ la distribuzione verticale del fibrato si ha la decomposizione $Tf^*P = f^*\mathcal{H} \oplus f^*\mathcal{V}$.

Inoltre vale la regola $(R_g)_*((f^*\mathcal{H})_{(u,p)}) = (f^*\mathcal{H})_{(u,p)g}\ \forall\ g \in G$ e $f^*\mathcal{H}$ risulta essere una connessione.

Dimostrazione. Proviamo inizialmente una versione locale della tesi.
Osserviamo che, poichè γ è liscia ne possiamo considerare una sua estensione ad un aperto I contenente l'intervallo $[0, 1]$.
Consideriamo quindi le varietà I ed M, la mappa $\gamma : I \to M$ ed il fibrato principale $P \to M$ con connessione $\mathcal{H}$.
Costruiamo il fibrato pullback $\gamma^* P \to M$ con connessione $\gamma^*\mathcal{H}$.
Consideriamo il vettore $\frac{\partial}{\partial t} \in \chi(I)$ ed il suo sollevamento orizzontale $X = \frac{\tilde{\partial}}{\partial t}$ rispetto alla connessione $\gamma^*\mathcal{H}$.
Sappiamo che $\forall t_0 \in I,\ u_o \in \pi^{-1}(\gamma(t_0))$ esiste un'unica curva integrale $(t, \tilde{\gamma}(t))$ di X in $\gamma^* P$ definita su un intorno U_{t_0} di t_0.
Si ha che $\pi(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$ in U_{t_0} quindi $\tilde{\gamma}$ è un sollevamento di γ. Tale sollevamento risulta orizzontale per un lemma provato precedentemente da Veronica.
Dimostriamo ora l'esistenza globale del sollevamento orizzontale.
Grazie alla proprietà di invarianza a destra della connessione sappiamo che, se $\tilde{\gamma}$ è un cammino orizzontale, lo sono anche i cammini $\tilde{\gamma}g\ \forall\ g \in G$. Si ha quindi che l'aperto U_{t_0} non dipende dalla scelta dell'elemento $u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(t_0))$.
Usando un argomento di compattezza scegliamo un numero finito di questi intorni, ricoprente l'intervallo $[0, 1]$ e costruiamo un sollevamento orizzontale usando nuovamente l'invarianza a destra. L'unicità è evidente. □

Grazie a quest'ultimo risultato siamo in grado di accennare alla nozione di trasporto parallelo per fibrati principali.

Definizione 2.9. Una famiglia di trasporti paralleli sul G-fibrato principale $P \to M$ è una collezione $\mathcal{T} = \{\tau_\gamma\}$, dove per ogni $\gamma = \gamma(t)$ curva su M ho applicazioni $(\tau_\gamma)_s^t : \pi^{-1}(\gamma(s)) \to \pi^{-1}(\gamma(t))$ tali che:

i) $(\tau_\gamma)_s^t$ isomorfismi tra le fibre,

ii) $(\tau_\gamma)_s^s = id$,

iii) $(\tau_\gamma)_u^t \circ (\tau_\gamma)_s^u = (\tau_\gamma)_s^t$,

iv) le dipendenze da s, t, γ sono tutte lisce.

Sia $u_s \in \pi^{-1}(\gamma(s))$. $u_t = (\tau_\gamma)_s^t(u_s)$ si dice risultato dell'operazione di trasporto parallelo da $\pi^{-1}(\gamma(s))$ a $\pi^{-1}(\gamma(t))$ lungo la curva γ.

Anche in questo caso abbiamo connesso le varie fibre mediante appositi isomorfismi dipendenti da curve.
L'unica sostanziale differenza da tenere presente è la diversa struttura delle fibre, su cui ora agisce il gruppo G. Si avrà quindi la proprietà $(\tau_\gamma)_s^t(gu) = g(\tau_\gamma)_s^t(u)\ \forall\ g \in G$.
Come nel caso di fibrati vettoriali vi è un'analogia tra i concetti di connessione e di trasporto parallelo. Alla base di questa corrispondenza c'è la possibilità di sollevare orizzontalmente cammini in maniera unica.
Senza entrare nei dettagli, limitiamoci a capire come si costruisce geometricamente la famiglia $\mathcal{T}_\mathcal{H} = \{\tau_\gamma\}$ associata ad una data connessione $\mathcal{H}$.
Per ogni curva $\gamma = \gamma(t)$ su M vogliamo definire i trasporti paralleli $(\tau_\gamma)_s^t : \pi^{-1}(\gamma(s)) \to \pi^{-1}(\gamma(t))$ della famiglia $\mathcal{T}_\mathcal{H}$.
A questo punto abbiamo tutti gli strumenti che ci occorrono. Consideriamo $u_s \in \pi^{-1}(\gamma(s))$ e definiamo $u_t = (\tau_\gamma)_s^t(u_s)$.
Consideriamo $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(t)$, l'unico sollevamento orizzontale (rispetto a $\mathcal{H}$) di γ da $\gamma(s)$ ad u_s e definiamo $(\tau_\gamma)_s^t(u_s) = \tilde{\gamma}(t)$.
La verifica delle proprietà della famiglia $\mathcal{T}_\mathcal{H}$ è lunga ma non è difficile.

Capitolo 3

Gruppo di olonomia

Seminario di Francesca Tucci

Vogliamo studiare il gruppo di olonomia dal punto di vista dei fibrati principali. Diamo quindi una definizione coerente con l'azione del gruppo di struttura G.

Definizione 3.1. Preso $\pi : P \to M$ un G-fibrato principale ed $u \in P$, definiamo il gruppo di olonomia in u come:

$$Hol(u) = \{a \in G \mid \exists\ \gamma \text{ cammino orizzontale che collega } u \text{ ed } ua\}$$

dove $\gamma(t) \subset P$ si dice cammino orizzontale se $\dot{\gamma}(t) \in \mathcal{H}_{\gamma(t)}\ \forall t$.
Definiamo il gruppo di olonomia ristretto in u come:

$$Hol_0(u) = \left\{ \begin{array}{ll} a \in G \mid & \exists\ \gamma \text{ cammino orizzontale che collega } u \text{ ed } ua \\ & \text{con } \pi(\gamma) \subset M \text{ contraibile} \end{array} \right\}$$

Osservazione 3.1. Segue dalle definizioni che se M è semplicemente connesso allora $Hol_0(u) = Hol(u)$.

Lemma 3.0.2. *Valgono le seguenti proprietà:*

i) $Hol(u)$ *è un sottogruppo di* G.

ii) $Hol(ua) = a^{-1}Hol(u)a \quad \forall u \in P, \forall a \in G$.

iii) Presi u *e* $v \in P$, *se possono essere collegati da un cammino orizzontale allora* $Hol(u) = Hol(v)$.

Dimostrazione. i) Segue dalla definizione che l'elemento neutro di G appartiene ad $Hol(u)$.
Vediamo che se $a, b \in Hol(u)$ allora anche $ab \in Hol(u)$.

Sia γ il cammino orizzontale fra u ed ua e γ' il cammino orizzontale fra u ed ub. Consideriamo il cammino $\gamma' \cdot (\gamma b)$ definito come:

$$(\gamma' \cdot (\gamma b))(t) = \begin{cases} \gamma'(t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma(2t-1)b & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Questo cammino è orizzontale perché composizione di cammini orizzontali ed inoltre collega u con uab, infatti:

$$\begin{aligned} (\gamma' \cdot (\gamma b))(0) &= \gamma'(0) = u \\ (\gamma' \cdot (\gamma b))(1) &= \gamma(1)b = uab. \end{aligned}$$

Per far vedere che $a^{-1} \in Hol(u)$ consideriamo la curva γ^{-1}, definita come $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)\ \forall t$.
Allora basta prendere il cammino orizzontale $\gamma^{-1}a^{-1}$, dato che:

$$\begin{aligned} (\gamma^{-1}a^{-1})(0) &= \gamma(1)a^{-1} = u \\ (\gamma^{-1}a^{-1})(1) &= \gamma(0)a^{-1} = ua^{-1} \end{aligned}$$

ii) Vediamo $a^{-1}Hol(u)a \subset Hol(ua)$.
Per $b \in Hol(u)$ consideriamo γ il cammino orizzontale fra u ed ub e quindi γa sarà la curva orizzontale fra ua e uba.
Ma $uba = ua(a^{-1}ba)$ e quindi γa collega ua con $ua(a^{-1}ba)$ e questo implica che $a^{-1}ba \in Hol(ua)$.
Per cui al variare di $b \in Hol(u)$ vale $a^{-1}Hol(u)a \subset Hol(ua)$.

Vediamo $Hol(ua) \subset a^{-1}Hol(u)a$.
Prendiamo $c \in Hol(ua)$ allora esiste un cammino orizzontale γ che collega ua con uac.
Ma allora il cammino orizzontale γa^{-1} collega u con $uaca^{-1}$, perciò $aca^{-1} = b \in Hol(u)$.
Quindi c sarà della forma $c = a^{-1}ba$ e quindi $c \in a^{-1}Hol(u)a$.
Abbiamo dimostrato la seconda inclusione al variare di $c \in Hol(ua)$.

iii) Prendiamo β cammino orizzontale fra u e v e γ cammino orizzontale fra u ed ua per $a \in Hol(u)$. Scegliamo il cammino $\beta^{-1} \cdot \gamma \cdot \beta a$, definito come:

$$(\beta^{-1} \cdot \gamma \cdot \beta a)(t) = \begin{cases} \beta(1-4t) & t \in [0, \frac{1}{4}] \\ \gamma(4t-1) & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t-1)a & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Quindi:

$$(\beta^{-1} \cdot \gamma \cdot \beta a)(0) = \beta(1) = v$$
$$(\beta^{-1} \cdot \gamma \cdot \beta a)(1) = \beta(1)a = va$$

per cui questo è il cammino orizzontale che collega v con va. Questo mostra che $Hol(u) \subset Hol(v)$.
Ma per simmetria vale anche l'inclusione inversa e quindi:
$Hol(u) = Hol(v)$.

□

Osservazione 3.2. In particolare il gruppo $Hol(u)$ è un sottogruppo di Lie di G e $Hol_0(u)$ è la componente connessa dell'identità in $Hol(u)$.

Osservazione 3.3. Mettiamoci nel caso di cui abbiamo $\pi : P \to M$ con M connessa.
Allora per ogni $u, v \in P$ possiamo considerare un cammino $c \in M$ che collega $\pi(u)$ con $\pi(v)$. Preso $\tilde{c}$ il sollevamento orizzontale di c, $\tilde{c}$ collega u con un certo w nella fibra di v. Vediamo cosa succede ad i gruppi di olonomia.
Per definizione di fibrato principale sappiamo che il gruppo G agisce transitivamente su ogni fibra, quindi in particolare per $v, w \in \pi^{-1}(v)$ $\exists g \in G$ tale che $w = vg$.
Quindi per la seconda proprietà del lemma 3.0.2 abbiamo che

$$Hol(w) = Hol(vg) = g^{-1}Hol(v)g.$$

Ma $\tilde{c}$ è un cammino orizzontale fra u e w quindi per la terza proprietà in 3.0.2:

$$Hol(u) = Hol(w) = g^{-1}Hol(v)g.$$

Quindi, su M varietà connessa, i gruppi di olonomia sono lo stesso a meno di coniugio per elementi di G, quindi ha senso dare la seguente definizione.

Definizione 3.2. Preso $\pi : P \to M$ fibrato principale con M varietà connessa, $u \in P$, il suo gruppo di olonomia è:

$$Hol(M) = \text{classe di coniugio in } G \text{ dei sottogruppi di olonomia } Hol(u)$$

Vogliamo definire un nuovo fibrato principale usando il gruppo di olonomia. Per farlo abbiamo bisogno del seguente teorema.

Teorema 3.0.3. *Sia $\pi : P \to M$ un G-fibrato principale. Sia H un sottogruppo di Lie di G e Q un sottoinsieme di P che soddisfa le seguenti proprietà:*

i) La restizione $\pi : Q \to M$ è suriettiva.

ii) Q è invariante per l'azione destra di H.

iii) $\forall x \in M$, H agisce transitivamente sulle fibre $\pi^{-1}(x) \cap Q$.

iv) $\forall x \in M$,esiste un intorno U ed esiste una sezione locale $\sigma : U \to P$ tale che $\sigma(U) \subset Q$.

Allora $Q \to M$ è un H-fibrato principale.

Dimostrazione. Sia $\sigma : U \to P$ la sezione locale in P a valori in Q, con U intorno di $x \in M$.
Allora $\sigma(x) \in \pi^{-1}(U) \cap Q$ e quindi $\forall u \in \pi^{-1}(U) \cap Q$ esiste un elemento $h \in H$ tale che $u = \sigma(x)h$.
Possiamo perciò costruire la mappa:

$$\begin{aligned} \psi : \pi^{-1}(U) \cap Q &\to U \times H \\ u &\longmapsto (x, h) \end{aligned}$$

In particolare questa mappa è biettiva.
Possiamo definire una struttura differenziabile su $\pi^{-1}(U) \cap Q$ in modo che questa mappa sia un diffeomorfismo, si può vedere che questo è indipendente dalla scelta della sezione locale a valori in Q.
Questa costruzione insieme alle prime tre ipotesi su Q ci assicura che $Q \to M$ ha una struttura di H-fibrato principale.

□

Osservazione 3.4. $\forall u \in P$ definiamo $P(u) \subset P$ come il sottoinsieme:

$$P(u) = \{v \in P \text{ — } \exists \text{ un cammino orizzontale fra } u \text{ e } v\}$$

Vogliamo vedere che $P(u)$ soddisfa tutte le proprietà del teorema 3.0.3 con $H = Hol(u)$ in modo che $P(u) \to M$ sia un $Hol(u)$-fibrato principale, che chiameremo fibrato di olonomia.

i) Vogliamo verificare che $\pi : P(u) \to M$ è un'applicazione suriettiva.
Per vederlo ci basta dimostrare che $\forall x \in M$ esiste almeno un elemento di $P(u)$ nella fibra di x.
Ma presa γ una curva in M che collega $\pi(u)$ con x sappiamo che esiste ed è unico il sollevamento orizzontale fra u ed un elemento nella fibra di x e questo dimostra la suriettività.

ii) Vediamo che $P(u)$ è invariante per l'azione destra di $Hol(u)$:

$$P(u) \times Hol(u) \to P$$
$$(v, a) \longmapsto va$$

Dato che $a \in Hol(u)$ esiste un cammino orizzontale β fra u ed ua. Preso γ cammino orizzontale fra u e v allora γa è un cammino orizzontale fra ua e va.
La composizione $\beta \cdot \gamma a$ sarà un cammino orizzontale fra u e va e quindi $va \in P(u)$.

iii) Vogliamo mostrare che $\forall x \in M$, $Hol(u)$ agisce transitivamente sulle fibre.
Già sappiamo che il gruppo G agisce transitivamente sulle fibre, quindi vale:

$$\forall v, z \in \pi^{-1}(x) \quad \exists g \in G \text{ tale che } z = vg$$

Vogliamo mostrare che presi $v, z \in \pi^{-1}(x) \cap P(u)$ allora $g \in Hol(u)$.
Poiché v e $z \in P(u)$ sappiamo che esiste una curva orizzontale γ fra u e v ed una curva orizzontale β fra u e z.
Quindi $\gamma^{-1} \cdot \beta$ è una curva orizzontale fra v e z, ma per l'azione transitiva esiste un $g \in G$ tale che $z = vg$, per cui $g \in Hol(v)$.
Ma esiste una curva orizzontale fra u e v quindi per la terza proprietà del lemma 3.0.2 vale che $Hol(v) = Hol(u)$ e troviamo quindi che g è un elemento del sottogruppo $Hol(u)$.

iv) Costruiamo una sezione locale di P a valori in $P(u)$.
Prendiamo $x \in M$ ed U un suo intorno, scegliamo quindi un sistema di coordinate che identifica la palla $B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^n$ con U ed x con l'origine in $\mathbb{R}^n$.
Per ogni $y \in U$ chiamiamo γ_y il segmento fra x ed y, nel sistema di coordinate scelte.
Fissando $v \in \pi^{-1}(x) \cap P(u)$, definiamo una sezione locale $\sigma : U \to P$ dove $\sigma(y)$ è il trasporto parallelo di v lungo γ_y per ogni $y \in U$.
Questa sezione è proprio a valori in $P(u)$, per definizione di $P(u)$.

Per cui possiamo applicare il teorema e troviamo che effettivamente
$P(u) \to M$ è un fibrato principale con $Hol(u)$ come gruppo di struttura.

Vediamo il legame fra il fibrato di olonomia e le riduzioni di fibrati principali. Ricordiamo la definizione di riduzione nel caso di sottogruppi.

Definizione 3.3. Sia $\pi : P \to M$ un G-fibrato principale ed $H < G$ è un sottogruppo di G.

Una riduzione del gruppo di struttura di P ad H relativa all'inclusione di H in G è un sottoinsieme Q di P tale che $\pi : Q \to M$ sia un H-fibrato principale su M.

Definizione 3.4. Sia $Q \subset P$ una riduzione della G-struttura P ad un sottogruppo $H < G$.
Una connessione $\mathcal{H}$ si dice riducibile a Q se:

$$\mathcal{H}_u \subset T_u Q \qquad \forall u \in Q$$

Osservazione 3.5. Se $\mathcal{H}$ è riducibile a Q allora definisce una connessione $\mathcal{H}'$ su Q tale che:

$$\mathcal{H}'_u := \mathcal{H}_u \qquad \forall u \in Q.$$

Questa definizione è ben posta.

Lemma 3.0.4. *Sono equivalenti:*

i) Una connessione $\mathcal{H}$ sul fibrato principale P si riduce a Q.

ii) $\forall u_0 \in Q$ e $\forall \gamma(t)$ curva in M con $\gamma(0) = \pi(u_0)$, il trasporto parallelo di u_0 lungo $\gamma(t)$ appartiene a Q.

Dimostrazione. 1. $\Rightarrow$ 2.
Supponiamo $\mathcal{H}$ riducibile ad $\mathcal{H}'$ su Q.
Sia $u(t)$ il sollevamento orizzontale di $\gamma(t)$ da u_0 rispetto alla connessione $\mathcal{H}$ ed $v(t)$ il sollevamento orizzontale di $\gamma(t)$ da u_0 rispetto alla connessione $\mathcal{H}'$.
Per definizione di sollevamento orizzontale $\dot{v}(t) \in \mathcal{H}'_{v(t)}$, ma essendo $\mathcal{H}$ riducibile ad $\mathcal{H}'$ vale $\mathcal{H}'_{v(t)} = \mathcal{H}_{v(t)}$.
Quindi $v(t)$ è il sollevamento orizzontale di $\gamma(t)$ da u_0 anche rispetto alla connessione $\mathcal{H}$, per unicità del sollevamento vale che $v(t) = u(t)$ e quindi $u(t) \in Q$.

2. $\Rightarrow$ 1.
Prendiamo $Y_{u_0} \in \mathcal{H}_{u_0}$ un vettore tangente ed orizzontale.
Scegliamo in M una curva $\gamma(t)$ tale che:

$$\begin{cases} \gamma(0) = \pi(u_0) \\ \dot{\gamma}(0) = \pi_*(Y_{u_0}) \end{cases}$$

dove $\pi_* : \mathcal{H}_{u_0} \to T_{\pi(u_0)} M$ è un isomorfismo.
Dato che il sollevamento orizzontale $u(t)$ di $\gamma(t)$ da u_0 appartiene a Q abbiamo che $Y_{u_0} = \dot{u}_0$ e quindi $\mathcal{H}_{u_0} \subset T_{u_0} Q$. $\square$

Corollario 3.0.5. *Una connessione $\mathcal{H}$ su un fibrato principale P si riduce a tutti i suoi fibrati di olonomia $P(u)$.*

Dimostrazione. Vediamo che $P(u) \to M$ soddisfa la seconda condizione del lemma 3.0.4 e che quindi $\mathcal{H}$ su P si riduce sempre ad una $\mathcal{H}'$ su $P(u)$.
Ma questo è ovvio per la definizione di $P(u)$, perché i $v \in P(u)$ sono proprio tutti i trasporti paralleli da u al variare di γ cammino orizzontale.

□

Capitolo 4

Olonomia riemanniana e kähleriana

Seminario di Paolo Magagnoli

4.1 Olonomia riemanniana

È possibile fornire una caratterizzazione del gruppo di olonomia $Hol_m(\nabla)$ di una connessione ∇ associata al fibrato tangente $TM \to M$.

Definizione 4.1. Una sezione σ di $\bigotimes^p TM \otimes \bigotimes^q T^*M$, cioè un tensore di tipo (p, q), parallelo nella direzione di ogni $X \in \Gamma(TM)$, cioè tale che $\nabla\sigma = 0$, si dice *costante*.

Si noti che la definizione è ben posta perché se ∇ è connessione su TM lo è anche su $\bigotimes^p TM \otimes \bigotimes^q T^*M$ per le proprietà di funtorialità di duale e prodotto tensoriale.

Lemma 4.1.1. *Sia M varietà differenziabile connessa, allora un (p, q)-tensore è costante su M se e solo se è invariante per l'azione di $Hol(\nabla)$ su ogni fibra di $\bigotimes^p TM \otimes \bigotimes^q T^*M$.*

Dimostrazione. Supponiamo che σ sia un (p, q)-tensore costante, $m \in M$ e $\gamma : [0, 1] \to M$ una curva tale che $\gamma(0) = \gamma(1) = m$. Il trasporto parallelo di σ_m lungo γ sarà $\widetilde{\sigma}(1)$ dove $\widetilde{\sigma}$ è l'unica sezione di $\bigotimes^p TM \otimes \bigotimes^q T^*M$ lungo γ tale che $\widetilde{\sigma}(0) = \sigma_m$ e $\nabla_{\dot\gamma(t)}\widetilde{\sigma}(t) = 0$. Ma, dato che σ è costante e che $\widetilde{\sigma}$ esiste ed è unico, si deve avere $\widetilde{\sigma}(t) = \sigma_{\gamma(t)}$. Ne segue, quindi, che il trasporto parallelo di σ_m lungo γ è $\sigma_{\gamma(1)} = \sigma_m$ stesso. Abbiamo così mostrato che σ_m è invariante sotto l'azione di $Hol_m(\nabla)$ sulla fibra $\bigotimes^p T_mM \otimes \bigotimes^q T_m^*M$.

Viceversa se $\sigma_m \in \bigotimes_m^p M \otimes \bigotimes^q T_m^* M$ è invariante sotto l'azione di $Hol_m(\nabla)$ allora esso è costante in un intorno sufficientemente piccolo di m. Si consideri, ora, un ricoprimento di M di aperti sui quali σ è costante e una curva che collega m ad un generico m' contenuto in un aperto del ricoprimento. Tramite il trasporto parallelo lungo tale curva, σ risulterà essere costante sull'unione dei due aperti centrati in m e m'. Sfruttando la connessione di M si può ripetere il ragionamento su tutti gli aperti del ricoprimento il che mostra che σ è un (p,q)-tensore costante su tutta M. □

Poniamoci, ora, nel contesto delle varietà riemanniane.

Definizione 4.2. Sia (M, g) una varietà riemanniana, $m \in M$ e ∇ la connessione di Levi Civita su TM, definiamo il *gruppo di olonomia riemanniana* di g come $Hol_m(g) = Hol_m(\nabla)$.

Proposizione 4.1.2. *Sia (M, g) una varietà riemanniana, allora $Hol_m(g) \subseteq O(n)$.*

Dimostrazione. Dato che ∇ è la connessione di Levi Civita, essa è compatibile con la metrica, perciò $\nabla g = 0$, cioè g è un tensore costante. Allora, in virtù del lemma 4.1.1, $Hol_m(g)$ è contenuto nel sottogruppo di $Gl(T_m M)$ che preserva g_m. Ma identificando $T_m M \cong \mathbb{R}^n$ abbiamo $Gl(T_m M) \cong GL(n, \mathbb{R})$ e il sottogruppo di $GL(n, \mathbb{R})$ che preserva g_m è quello delle isometrie, cioè $O(n)$. □

Dal momento che $Hol_m(g)$ può essere visto come sottogruppo di $O(n)$, tramite coniugio esso è indipendente dal punto base m. Pertanto d'ora in avanti siamo autorizzati a parlare di $Hol(g)$ omettendo l'indice.

4.2 Teorema di Berger

La domanda naturale che viene da porsi a questo punto è se si è in grado di classificare le varietà riemanniane a partire dai loro gruppi di olonomia riemanniana, ovvero classificarle tramite i sottogruppi di $O(n)$. Senza dare ulteriori ipotesi sulla varietà la lista risulta essere molto lunga. Per sfoltirla dobbiamo introdurre, allora, alcuni concetti.

Definizione 4.3. Siano (X, h) e (Y, l) due varietà riemanniane e sia $M \times N$ la varietà topologica prodotto. Allora per ogni $(x, y) \in X \times Y$ si ha $T_{(x,y)}(X \times Y) \cong T_x X \oplus T_y Y$. La metrica prodotto $h \times l$ su $X \times Y$ è definita da $(h \times l)_{(x,y)} = h_x + l_y$ e $(X \times Y, h \times l)$ si dice prodotto riemanniano. Una varietá riemanniana (M, g) si dice *localmente riducibile* se ogni punto ammette un intorno isometrico a un prodotto riemanniano $(X \times Y, h \times l)$. (M, g) si dice *irriducibile* se non è localmente riducibile.

Proposizione 4.2.1. *Sia (M, g) una varietà riemanniana irriducibile di dimensione n, allora la rappresentazione di $Hol(g)$ su $\mathbb{R}^n$ è irriducibile.*

La dimostrazione di tale proposizione si trova su [[Jo], 3.2].

Definizione 4.4. Una varietà topologica X si dice spazio simmetrico se per ogni $x \in X$ esiste un'isometria $s_x : X \to X$ tale che $s_x^2 = Id$ e x è un punto fisso isolato per s_x. Una varietà riemanniana (M, g) si dice *localmente simmetrica* se ogni punto ammette un intorno isometrico a un aperto di uno spazio simmetrico, si dice, invece, *non simmetrica* se non è localmente simmetrica.

Teorema 4.2.2. ***(Cartan)*** *Sia (M, g) una varietà riemanniana con tensore di curvatura R e connessione di Levi Civita ∇. Allora (M, g) è localmente simmetrica se e solo se $\nabla R = 0$.*

La dimostrazione di tale teorema si trova su [[Dc], 8.2].

A questo punto siamo in grado di enunciare il teorema di classificazione di Berger.

Teorema 4.2.3. ***(Berger)*** *Sia (M, g) una varietà riemanniana semplicemente connessa, irriducibile e non simmetrica. Allora sussiste solo uno dei seguenti casi:*

i) $Hol(g) = SO(n)$

ii) $n = 2k$ *con* $k \geq 2$ *e* $Hol(g) = U(k) \subseteq SO(2k)$

iii) $n = 2k$ *con* $k \geq 2$ *e* $Hol(g) = SU(k) \subseteq SO(2k)$

iv) $n = 4k$ *con* $k \geq 2$ *e* $Hol(g) = Sp(k) \subseteq SO(4k)$

v) $n = 4k$ *con* $k \geq 2$ *e* $Hol(g) = Sp(k)Sp(1) \subseteq SO(4k)$

vi) $n = 7$ *e* $Hol(g) = G_2 \subseteq SO(7)$

vii) $n = 8$ *e* $Hol(g) = Spin(7) \subseteq SO(8)$

Osservazione 4.1. La dimostrazione del teorema parte dalla classificazione dei sottogruppi di $O(n)$ e via via elimina tutti i casi non possibili in base alle tre assunzioni del teorema:

- $Hol(g)$ è connesso perché (M, g) è semplicemente connessa
- la rappresentazione di $Hol(g)$ è irriducibile perché (M, g) è irriducibile

- $\nabla R \not\equiv 0$ perché (M, g) è non simmetrica

Se le prime due assunzioni sembrano non essere eccessivamente restrittive, l'ultima elimina una vasta gamma di varietà. Il motivo per cui viene inserita tra le ipotesi del teorema di Berger è che una classificazione delle varietà irriducibili simmetriche già esiste e si può consultare su [[Be], 11.K].

I gruppi che compaiono nel teorema sono i gruppi di automorfismi delle quattro algebre di divisione $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ e $\mathbb{O}$. Infatti:

- $SO(n)$ è un gruppo di automorfismi di $\mathbb{R}^n$
- $U(k)$ e $SU(k)$ sono gruppi di automorfismi di $\mathbb{C}^k \cong \mathbb{R}^k$
- $Sp(k)$ e $Sp(k)Sp(1)$ sono gruppi di automorfismi di $\mathbb{H}^k \cong \mathbb{R}^k$
- G_2 è il gruppo degli automorfismi di $Im\mathbb{O} \cong \mathbb{R}^7$ e $Spin(7)$ è un gruppo di automorfismi di $\mathbb{O} \cong \mathbb{R}^8$

Si noti che il teorema di Berger mostra che i sette sopracitati sono gli unici gruppi di olonomia possibili, ma non assicura l'esistenza di varietà per ciascun gruppo. La dimostrazione dell'esistenza di varietà con gruppo di olonomia isomorfo ad ognuno dei sette casi è posteriore. Si pensi che per gli ultimi due l'esistenza di tali varietà risale soltanto al 1985 ad opera di Bryant in [Br] e i primi esempi sono stati scoperti solo nel 2000 da Joyce in [Jo].

4.3 Olonomia Kähleriana

Poniamoci, ora, nell'ambito delle varietà kähleriane.

Proposizione 4.3.1. *Una varietà riemanniana (M, g) di dimensione $2n$ è Kähler rispetto a una struttura complessa J se e solo se $Hol(g) \subseteq U(n)$.*

Dimostrazione. Sia (M, g) varietà con struttura complessa J, sia $m \in M$ e ∇ la sua connessione di Levi Civita. Per definizione, (M, g) è Kähler se e solo se $\nabla J = 0$ e $\nabla \Omega = 0$ con Ω forma di Kähler, cioè J e Ω sono tensori costanti. Allora per il lemma 4.1.1 questo è vero se e solo se $Hol(g)$ è contenuto in un sottogruppo di $Gl(T_mM)$ che preserva J_m e Ω_m. Usando, quindi, il fatto che J è una struttura complessa si ha l'isomorfismo $(T_mM, J_m) \cong \mathbb{R}^{2n}$, da cui $Gl(T_mM) \cong GL(2n, \mathbb{R})$. Ma il sottogruppo di $GL(2n, \mathbb{R})$ che preserva J_m e Ω_m è $U(n)$, da cui la tesi. $\square$

Questo risultato fornisce, pertanto, un'ulteriore definizione equivalente a quelle viste precedentemente per varietà kähleriane.

Vogliamo, ora, concentrarci sul sottogruppo $SU(n)$ di $U(n)$ per vedere come esso caratterizzi una particolare famiglia di varietà kähleriane.

Osservazione 4.2. Consideriamo il fibrato canonico $K_M = \Lambda^{n,0}T^*M$ di una varietà kähleriana (M, g, J). Dal momento che T^*M è un fibrato olomorfo di rango n, $\Lambda^{n,0}T^*M$ sarà un fibrato olomorfo di rango $\binom{n}{n} = 1$, cioè un line bundle olomorfo su M. Identificando come di consueto la moltiplicazione per i con il tensore J, risulta che $g - i\Omega$ dà struttura hermitiana a TM, quindi a T^*M e di conseguenza a $K_M = \Lambda^{n,0}T^*M$. Allora su K_M è ben definita la connessione di Chern associata alla metrica hermitiana e possiamo considerarne la curvatura. Essa sarà uguale a $i\eta$ dove η è la $(1,1)$-forma reale di curvatura. Per quanto visto in un precedente seminario si ha, allora, $[\eta] = 2\pi c_1(K_M)$ in $H^2(M, \mathbb{R})$. Resta da capire chi è η.

Proposizione 4.3.2. *La curvatura della connessione di Chern del fibrato canonico di una varietà kähleriana è uguale a $i\rho$, dove ρ è la forma di Ricci.*

La dimostrazione di tale risultato si trova su [[Mo], 17.2]. Pertanto abbiamo mostrato che:

$$c_1(M) = c_1(K_M) = \frac{1}{2\pi}[\rho] \in H^2(M, \mathbb{R})$$

Ne segue, dunque, che:

Proposizione 4.3.3. *Sia (M, g, J) una varietà kähleriana semplicemente connessa. Allora $Hol(g) \subseteq SU(n)$ se e solo se g è Ricci piatta.*

Dimostrazione. (M, g, J) è Ricci piatta se e solo se $\rho \equiv 0$ quindi, in virtù dell'osservazione 4.2, se e solo se $c_1(K_M) = 0$. Questo equivale a dire che la connessione di Chern su K_M è piatta, cioè che K_M ammette una famiglia di sezioni locali costanti che si possono estendere a sezioni globali data la semplice connessione di M. Quindi (M, g, J) ammette una famiglia di $(n, 0)$-forme non nulle ω su M. Dal lemma 4.1.1 questo è vero se e solo se $Hol(g)$ preserva ω_m su $T_mM \cong \mathbb{C}^n$ per ogni $m \in M$, cioè se $Hol(g) \subseteq SU(n)$ dal momento che $SU(n)$ è il sottogruppo di $U(n)$ che preserva $dz_1 \wedge \ldots \wedge z_n$. □

In particolare:

Definizione 4.5. Una varietà di *Calabi-Yau* è una varietà kähleriana compatta (M, g, J) con $Hol(g) = SU(n)$ dove $n = dim_{\mathbb{C}}M$.

Dalla proposizione 4.3.3 e dall'osservazione 4.2 seguono immediatamente le seguenti proprietà per (M, g, J) varietà di Calabi-Yau:

- (M, g, J) è Ricci piatta
- $c_1(M) = 0$

- (M, g, J) ammette una $(n, 0)$-forma olomorfa costante non nulla ω che è, quindi, una forma di volume
- $K_M \cong \mathcal{O}_M$, cioè il fibrato canonico è banale come conseguenza dell'esistenza di ω

Vogliamo, ora, caratterizzare il diamante di Hodge delle Calabi-Yau. Premettiamo un risultato generale.

Teorema 4.3.4. ***Formula di Weitzenböck*** *Sia $(E, h) \to (M, g, J)$ un fibrato olomorfo hermitiano su M varietà kähleriana. Per ogni coppia di campi vettoriali $X, Y \in \Gamma(TM)$ definiamo $\widetilde{R}(X, Y) \in End(\Lambda^{p,q}T^*M \otimes E)$ l'operatore di curvatura della connessione su $\Lambda^{p,q}T^*M \otimes E$ indotta dalle connessioni di Levi Civita su $\Lambda^{p,q}T^*M$ e di Chern su E. Allora:*

$$\Delta = 2\Delta_{\overline{\partial}} = 2(\overline{\partial}^*\overline{\partial} + \overline{\partial}\overline{\partial}^*) = \nabla^*\nabla + \mathcal{R}$$

dove $\mathcal{R}$ è una sezione di $End(\Lambda^{p,q}T^*M \otimes E)$ definita da:

$$\mathcal{R}(\sigma) = \frac{i}{2}\widetilde{R}(Je_j, e_j)\sigma - \frac{1}{2}(e_j - iJe_j) \wedge (e_k + iJe_k) \lrcorner (\widetilde{R}(e_j, e_k)\sigma)$$

La dimostrazione del teorema consiste in un conto in coordinate che si trova su [[Mo], 20.1]. Dalla formula segue un utile corollario:

Corollario 4.3.5. *Sia (M, g, J) una varietà kähleriana compatta e Ricci piatta, allora per ogni $(p, 0)$-forma olomorfa α si ha $\nabla\alpha \equiv 0$.*

Dimostrazione. Nella formula di Weitzenböck consideriamo E fibrato banale. Se (M, g, J) è Kähler si mostra, ad esempio in [[Gr], 0.6], che $\mathcal{R}$ si può scrivere come somma di termini tutti dipendenti da ρ. Pertanto, dal momento che $\rho \equiv 0$, ne segue che $\mathcal{R} \equiv 0$. Inoltre dato che α è olomorfa si ha $0 = \nabla^*\nabla\alpha$. Perciò:

$$0 = \int_M < \nabla^*\nabla\alpha, \alpha > = \int_M < \nabla\alpha, \nabla\alpha > = ||\nabla\alpha||^2$$

cioè $\nabla\alpha \equiv 0$. $\square$

Possiamo finalmente caratterizzare il diamante di Hodge di una Calabi-Yau.

Proposizione 4.3.6. *Sia (M, g, J) una varietà di calabi-Yau di dimensione n. Allora $h^{0,0} = h^{n,0} = h^{0,n} = h^{n,n} = 1$ e se $p \neq 0, n$ allora $h^{p,0} = h^{0,p} = h^{p,n} = h^{n,p} = 0$.*

Dimostrazione. Basta dimostrare la proposizione per un solo quadrante del diamante di Hodge dal momento che valgono gli isomorfismi $\overline{H^{q,p}(M)} \cong H^{p,q}(M) \cong H^{n-p,n-q}(M)^*$. Ora, se $\alpha \in H^{p,0}(M)$, α è una $(p,0)$-forma olomorfa, quindi dal corollario precedente $\nabla\alpha \equiv 0$. Pertanto, per il lemma 4.1.1, α è fissato da $Hol(g) = SU(n)$ e lo spazio fissato da $SU(n)$ su $\Lambda^{p,0}T_m^*M \cong \Lambda^{p,0}(\mathbb{C}^n)^*$ è $\mathbb{C}$ se $p = 0, n$ e 0 altrimenti. Ciò prova la tesi. $\square$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & 0 & & h^{1,1} & & 0 & \\
1 & & h^{2,1} & & h^{2,1} & & 1 \\
 & 0 & & h^{1,1} & & 0 & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & & 1 & & &
\end{array}$$

Quindi il diamante di Hodge di una Calabi-Yau ha i lati nulli ad eccezione dei vertici dove c'è $\mathbb{C}$.

4.4 Calabi-Yau proiettive

Cerchiamo, ora, di sfruttare il risultato appena ottenuto per analizzare il rapporto che intercorre tra varietà kähleriane e varietà proiettive. Abbiamo mostrato a lezione che:

$$\text{Proiettivo} \Rightarrow \text{Kähler}$$

$$\text{Kähler} \not\Rightarrow \text{Proiettivo}$$

Vogliamo trovare delle ipotesi sufficienti su una varietà kähleriana affinchè essa sia proiettiva.

Sia (M, J) una varietà compatta che ammette metrica kähleriana, allora si ha:

$$H^2(M, \mathbb{C}) = H^{2,0}(M) \oplus H^{1,1}(M) \oplus H^{0,2}(M)$$

Se g è una metrica kähleriana su (M, J) con forma Kähler Ω, possiamo considerare $[\Omega] \in H^2(M, \mathbb{C})$. Dal momento che sappiamo che Ω è una $(1,1)$-forma reale chiusa ne segue che:

$$[\Omega] \in H^2(M, \mathbb{R}) \cap H^{1,1}(M)$$

Questo giustifica la seguente definizione:

Definizione 4.6. Sia (X, J) una varietà compatta che ammette struttura Kähler, chiamiamo il *cono Kähler* di (M, J) l'insieme $\mathcal{K} \subseteq H^2(M, \mathbb{R}) \cap H^{1,1}(M)$ delle classi $[\Omega]$ delle forme fondamentali di ogni possibile metrica kähleriana g su (M, J).

Si mostra che $\mathcal{K}$ è un aperto convesso in $H^2(M,\mathbb{R}) \cap H^{1,1}(M)$. Diamo un'ulteriore definizione.

Definizione 4.7. Sia (M,J) una varietà complessa e L un suo line bundle olomorfo, L si dice *positivo* se $c_1(L)$ in $H^2(M,\mathbb{R})$ può essere rappresentata da una $(1,1)$-forma reale chiusa η positiva, cioè tale che $\eta(v,Jv) > 0$ per ogni $v \neq 0$.

Osserviamo che, preso un line bundle positivo L con prima classe di Chern $c_1(L)$ rappresentata dalla $(1,1)$-forma reale chiusa η, ponendo $g(v,w) = \eta(v,Jw)$ allora g è metrica kähleriana con forma Kähler positiva η. D'altra parte se $c_1(L) \in \mathcal{K}$ allora, per definizione di cono Kähler, si rappresenta con una $(1,1)$-forma reale chiusa positiva. In altre parole L line bundle su (M,J) è positivo se e solo se $c_1(L) \in \mathcal{K}$. Questo risultato porta alla seguente proposizione:

Proposizione 4.4.1. *Sia (M,g,J) varietà kähleriana compatta. Allora essa ammette line bundles positivi se e solo se $H^2(M,\mathbb{Z}) \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. Se (M,g,J) ammette line bundle positivi, allora $c_1(L) \in \mathcal{K}$, ma per definizione $c_1(L) \in H^2(M,\mathbb{Z})$ da cui la tesi. Viceversa supponiamo $H^{2,0}(M,\mathbb{Z}) \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$. Ricordando che $\mathcal{K} \subset H^2(M,\mathbb{R}) \cap H^{1,1}(M)$, questo significa che $H^2(M,\mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(M) \cap (H^{1,1}(M))^+ \neq \emptyset$ dove $(H^{1,1}(M))^+$ sono le classi che ammettono per rappresentante una $(1,1)$-forma positiva. L'inclusione $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ induce in coomologia una mappa $H^2(M,\mathbb{Z}) \to H^2(M,\mathbb{C})$. Definiamo $H^{1,1}(M,\mathbb{Z}) \doteq Im(H^2(M,\mathbb{Z}) \to H^2(M,\mathbb{C})) \cap H^{1,1}(M)$. La nostra ipotesi diventa, quindi, $H^{1,1}(M,\mathbb{Z}) \cap (H^{1,1}(M))^+ \neq \emptyset$. Consideriamo la successione esatta corta:

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_M \to \mathcal{O}_M^* \to 0$$

Essa induce la successione esatta lunga in coomologia:

$$\ldots \to H^1(M,\mathcal{O}_M) \to H^1(M,\mathcal{O}_M^*) \to H^2(M,\mathbb{Z}) \to \ldots$$

In tale successione osserviamo che $H^1(M,\mathcal{O}_M^*) = Pic(M)$ e che l'ultima applicazione è proprio la prima classe di Chern $c_1 : Pic(M) \to H^2(M,\mathbb{Z})$. Dato che c_1 per la teoria di Chern-Weil è una forma di curvatura essa è una $(1,1)$-forma e pertanto $Im(c_1) \subseteq H^{1,1}(M,\mathbb{Z})$. Inoltre il teorema di Lefschetz (cfr. [[Hu], 3.3]) ci assicura che tale mappa è anche suriettiva. Quindi $Pic(M) \cong H^{1,1}(M,\mathbb{Z})$ e dato che $H^{1,1}(M,\mathbb{Z}) \cap (H^{1,1}(M))^+ \neq \emptyset$ questo mostra l'esistenza di line bundles positivi. $\square$

Richiamiamo un teorema fondamentale della geometria algebrica.

Teorema 4.4.2. ***Embedding di Kodaira*** *Sia (M, J) una varietà complessa compatta. Allora essa è proiettiva se e solo se ammette line bundles positivi.*

Ne segue:

Corollario 4.4.3. *Sia (M, J, g) una varietà kähleriana compatta tale che $H^{2,0}(M) = 0$, allora (M, g, J) è proiettiva.*

Dimostrazione. Dal teorema di Kodaira unito alla proposizione precedente segue che (M, g, J) è proiettiva se e solo se $H^2(M, \mathbb{Z}) \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$. Dato che ogni elemento in $H^2(M, \mathbb{Q})$ ha multiplo positivo in $H^2(M, \mathbb{Z})$, ne segue che (M, g, J) è proiettiva se e solo se $H^2(M, \mathbb{Q}) \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$. Dire che $H^{2,0}(M) = 0$ equivale a dire che $H^2(M, \mathbb{C}) = H^{1,1}(M)$, dato che (M, g, J) è Kähler. Perciò $H^2(M, \mathbb{Q}) \cap H^{1,1}(M) = H^2(M, \mathbb{Q})$ che è denso in $H^2(M, \mathbb{R})$. Inoltre $\mathcal{K}$ è un aperto non vuoto in $H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{R}) = H^2(M, \mathbb{R})$. Ne segue che per densità $H^2(M, \mathbb{Q}) \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$ e quindi (M, g, J) è proiettiva. □

Dalla proposizione 4.3.6 segue che per $n > 2$ le Calabi-Yau hanno $h^{2,0} = 0$, cioè $H^{2,0} = 0$. Abbiamo, allora, dimostrato il seguente:

Teorema 4.4.4. *Sia (M, g, J) una Calabi-Yau con $dim_{\mathbb{C}}(M) = n > 2$, allora (M, g, J) è proiettiva.*

Si noti che tale risultato è vero anche per le Calabi-Yau di dimensione 1. Infatti $SU(1) = 1$ e quindi le Calabi-Yau di dimensione 1 sono i tori con metrica piatta che sono proiettivi.

Il caso $n = 2$, invece, è più complicato da trattare. Dobbiamo, infatti, introdurre la seguente definizione.

Definizione 4.8. Una *superficie K3* è una varietà complessa compatta (M, J) di dimensione 2 con $h^{1,0}(M) = 0$ e fibrato canonico banale, $K_M \cong \mathcal{O}_M$.

È possibile dimostrare che tutte le Calabi-Yau di dimensione 2 sono K3 e che, viceversa, ogni K3 (M, J) ammette metriche kähleriane g che la rendono una Calabi-Yau.

Questa caratterizzazione è di vitale importanza perché mostra la non validità del teorema nel caso $n = 2$. Si possono, infatti, fornire esempi di K3 con gruppo di Picard nullo, $Pic(M) = 0$, che, come conseguenza del teorema di Kodaira, non sono proiettive dal momento che non ammettono line bundles. Pertanto esistono Calabi-Yau di dimensione 2 non proiettive. Per capire il motivo di tale anomalia è necessario introdurre la seguente definizione.

Definizione 4.9. Una varietà kähleriana (M, g, J) con gruppo di olonomia $Hol(g) = Sp(n)$ con $dim_{\mathbb{C}}(M) = 2n$ si dice *Hyperkähler.*

Se poniamo su $\mathbb{H}^n$ le coordinate $(q^1, \dots, q^n)$ con $q^l = x_0^l + x_1^l i + x_2^l j + x_3^l k$ dove $x_h^l \in \mathbb{R}$ per ogni $l = 1, \dots, n$, $h = 0, \dots, 3$, possiamo definire:

$$g = \sum_{l=1}^{n} (dx_0^l)^2 + (dx_1^l)^2 + (dx_2^l)^2 + (dx_3^l)^2 \qquad \Omega_1 = \sum_{l=1}^{n} dx_0^l \wedge dx_1^l \wedge dx_2^l \wedge dx_3^l$$

$$\Omega_2 = \sum_{l=1}^{n} dx_0^l \wedge dx_2^l \wedge -dx_1^l \wedge dx_3^l \qquad \Omega_3 = \sum_{l=1}^{n} dx_0^l \wedge dx_3^l \wedge dx_1^l \wedge dx_2^l$$

Identificando $\mathbb{H}^n \cong \mathbb{R}^{4n}$ si ha che g è la metrica euclidea. Inoltre, dette I, J, K le strutture complesse su $\mathbb{R}^{4n}$ indotte dalla moltiplicazione destra per i, j, k in $\mathbb{H}^n$, si ha che g è Kähler rispetto ad ognuna di esse con forma Kähler $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ rispettivamente. Inoltre per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ la combinazione $aI + bJ + cK$ è ancora una struttura complessa su $\mathbb{R}^{4n}$ e g è Kähler rispetto ad essa con forma Kähler $a\Omega_1 + b\Omega_2 + c\Omega_3$. Il gruppo $Sp(n)$ agisce su $\mathbb{H}^n \cong \mathbb{R}^{4n}$ preservando $g, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ e $a\Omega_1 + b\Omega_2 + c\Omega_3$. Pertanto una Hyperkähler può essere vista come una varietà riemanniana (M^{4n}, g) sulla quale è definita una famiglia di strutture complesse costanti I, J, K rispetto alle quali g è Kähler e tali che per ogni scelta di $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ il tensore $aI + bJ + cK$ è ancora una struttura complessa rispetto a cui g è Kähler.

Esiste, tuttavia, un altro modo per guardare alle Hyperkähler. Possiamo, infatti, identificare $\mathbb{H}^n \cong \mathbb{R}^{4n}$ con $\mathbb{C}^{2n}$. Utilizzando la notazione introdotta precedentemente possiamo definire coordinate complesse $(z_1, \dots, z_{2n})$ date da $z_{2l-1} = x_0^l + ix_1^l$ e $z_{2l} = x_2^l + ix_3^l$ per $l = 1, \dots, n$. Allora troviamo:

$$g = \sum_{l=1}^{2n} |dz_l|^2 \qquad \Omega_1 = \frac{i}{2} \sum_{l=1}^{2n} dz_l \wedge d\overline{z}_l \qquad \Omega_2 + i\Omega_3 = \sum_{l=1}^{n} dz_{2l-1} \wedge dz_{2l}$$

Quindi g e Ω_1 sono la metrica e la forma hermitiana standard su $\mathbb{C}^{2n}$ e $\Omega_2 + i\Omega_3$ è una $(2,0)$-forma olomorfa rispetto alla struttura complessa I che, essendo preservata da $Sp(n)$, è una struttura simplettica. Ne segue che $\Omega_2 + i\Omega_3$ è una $(2,0)$-forma simplettica. Pertanto una Hyperkähler si può anche vedere come una varietà complessa simplettica $(M, I, \Omega_2 + i\Omega_3)$ con metrica kähleriana g compatibile con la struttura complessa simplettica.

Dato che $SU(2) = Sp(1)$, le Calabi-Yau di dimensione complessa 2 sono Hyperkähler, che abbiamo visto avere duplice natura, e quindi hanno caratteristiche singolari non presenti in quelle di dimensione $n > 2$. Questo fatto dà un'idea del perché esistano Calabi-Yau non proiettive solo in dimensione 2.

Bibliografia

[Be] A. Besse *Einstein manifolds* Verlag Berlin Heidelberg, Springer, 2007.

[Br] R. Bryant *Metrics with holonomy* G_2 *o* $Spin(7)$ Verlag Berlin Heidelberg, Springer, 1985.

[Dc] M. Do Carmo *Riemannian Geometry* Boston Basel Berlin, Birkhauser, 1992.

[Gr] P. Griffiths, J. Harris *Principles of Algebraic Geometry* New York, Wiley, 1994.

[Hu] D. Huybrechts *Complex Geometry* Verlag Berlin Heidelberg, Springer, 2004.

[Jo] D. Joyce *Compact manifolds with special holonomy* USA, Oxford University Press, 2000.

[Ko] S. Kobayashi, K. Nomizu *Foundations of Differential Geometry - Volume 1* New York, Wiley, 1963

[Mo] A. Moroianu *Lectures on Kaehler Geometry* Cambridge, Cambridge University Press, 2007.