Ciclo di seminari tenuti dagli studenti del corso di Geometria Superiore per l'a.a. 2012-2013, organizzato dal Prof. Piccinni

Strutture complesse e quasi complesse

a cura di: Valerio Vallocchia, Emanuela Laura Giacomelli, Marco Prestipino, Enrico Toffoli

Capitolo 1

Prime definizioni e proprietà

a cura di Valerio Vallocchia.

Introduzione

Lo scopo di questo primo seminario è di mettere in luce la relazione che intercorre fra strutture complesse e strutture quasi complesse (che andremo a definire più avanti). In particolare, dopo aver richiamato alcune definizioni utili alla comprensione del presente lavoro, presenteremo dei primi risultati, ci soffermeremo sul teorema di Newlander-Niremberg dandone una parziale dimostrazione, infine esporremo due esempi significativi.
Prima di addentrarci nella trattazione dell'argomento principale di questo lavoro è bene richiamare alcune definizioni.

Olomorfia :

Definizione 1.1. Una funzione $F = f + ig : U \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ si dice olomorfa se soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{\partial g}{\partial x}, \end{cases} \tag{1.1}$$

per ogni $z = x + iy \in U$.

Una definizione equivalente ma a noi più funzionale sfrutta l'identificazione del piano complesso con $\mathbb{R}^2$:

Definizione 1.2. Una funzione $F : U \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ si dice olomorfa se il differenziale di F vista come applicazione reale $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ soddisfa il seguente criterio di compatibilità:

$$j \circ (dF)_p = (dF)_p \circ j \quad \forall p \in \mathbb{R}^2$$

avendo indicato con $j : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'operatore di $\mathbb{R}^2$ corrispondente alla moltiplicazione per i in $\mathbb{C}$, ovvero

$$j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Siamo ora in grado di generalizzare quanto detto per funzioni a valori complessi in dimensione arbitraria

Definizione 1.3. una funzione $F : U \subseteq \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ si dice olomorfa se il differenziale della funzione reale $F : U \subseteq \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2m}$ soddisfa il seguente criterio di compatibilità:

$$j_m \circ (dF)_p = (dF)_p \circ j_n \quad \forall p \in \mathbb{R}^{2n}$$

avendo indicato con

$$j_n = \begin{pmatrix} 0 & -Id_n \\ Id_n & 0 \end{pmatrix}$$

l'operatore che rappresenta la moltiplicazione per i in $\mathbb{C}^n$.

Varietà: Un ulteriore oggetto di cui è utile ricordare la definizione è una varietà topologica , differenziabile e complessa.

Definizione 1.4. Una varietà topologica M (di dimensione n) è una spazio topologico di dimensione n, di Haussdorff, tale che

- M ha un ricoprimento aperto $\mathfrak{U}$
- $\forall U \in \mathfrak{U}$ esiste un omeomorfismo

$$\phi_U : U \subseteq M \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

- dati due aperti $U, V \in \mathfrak{U}$ tali che la loro intersezione sia non vuota , la funzione di transizione

$$\phi_{UV} := \phi_U \circ \phi_V^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

è continua

In maniera del tutto analoga diremo che M è una varieta differenziabile se le sue funzioni di transizione sono diffeomorfismi di $\mathbb{R}^n$. Infine

Definizione 1.5. Una varietà complessa M di dimensione n è una varietà topologica tale che

- $\forall U \in \mathfrak{U}$ esiste un omeomorfismo

$$\phi_U : U \subseteq M \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

- le funzioni di transizione sono biolomorfismi fra aperti di $\mathbb{C}^n$ (ovvero funzioni olomorfe con inversa olomorfa)

La collezione delle carte $\{(U, \phi_u)\}$ si dirà struttura olomorfa.

Strutture complesse $\longrightarrow$ strutture quasi complesse

Iniziamo questo nuovo capitolo con un esempio chiarificatore:

Osservazione 1. *Consideriamo lo spazio vettoriale complesso $\mathbb{C}^n$ ed il corrispondente spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^{2n}$, corrispondeza data dalla biiezione*

$$\begin{aligned} &(z_1, z_2, \dots, z_n) \longrightarrow (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \\ &z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha \end{aligned} \tag{1.2}$$

Quale informazione stiamo perdendo nel passaggio da spazio complesso a spazio reale?
Stiamo tralasciando la moltiplicazione per i. Per ricostruire questo dato abbiamo bisogno dell'applicazione

$$\begin{aligned} j_n : \mathbb{R}^{2n} &\longrightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ j_n &= \begin{pmatrix} 0 & -Id_n \\ Id_n & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.3}$$

che soddisfa $j_n^2 = -Id$ e ci permette di imporre

$$(a + ib) \cdot v = a \cdot v + b \cdot j_n(v) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad v \in \mathbb{R}^{2n}$$

ovvero di ricostruire la moltiplicazione per uno scalare complesso nello spazio $\mathbb{C}^n$.
Ne segue che la coppia $(\mathbb{R}^{2n}, j_n)$ ha una struttura equivalente a quella complessa di $\mathbb{C}^n$

Vogliamo applicare un procedimento analogo nel caso di una varietà complessa.
Sia M una varietà complessa di dimensione n ed indichiamo con TM il suo fibrato tangente, di fibre $\{T_pM\}$ al variare del punto $p \in M$. Per definizione sappiamo che le funzioni di transizione della varietà M sono biolomorfismi fra aperti di $\mathbb{C}^n$, quindi in particolare sono diffeomorfismi fra aperti di $\mathbb{R}^{2n}$.
Ne segue che è possibile leggere la varietà M come una una $2n$-varietà differenziabile reale , che indicheremo con $M_{\mathbb{R}}$. Su questa varietà reale è definito il fibrato tangente $TM_{\mathbb{R}}$, le cui fibre ora sono la collezione dei $2n$-spazi vettoriali reali $\{T_pM_{\mathbb{R}}\}$.
In che modo possiamo ricostruire la struttura di spazio complesso delle fibre di $TM_{\mathbb{R}}$?

Consideriamo il generico spazio vettoriale reale $T_pM_{\mathbb{R}}$ per $p \in M$, e consideriamo l'endomorfismo

$$J_{p,U} := (d\phi_U)^{-1} \circ j_n \circ (d\phi_U) \in End(T_pM_{\mathbb{R}})$$

Mostriamo innanzitutto che questa applicazione è ben posta:

Lemma 1.1. *L'endomorfismo $J_{p,U}$ è ben definito.*

Dimostrazione. Vogliamo mostrare che l'operatore in questione non dipende dalla carta scelta. Supponiamo allora che il punto $p \in U \subset M$ appartenga anche ad un'altra carta $V \in \mathfrak{U}$, per definizione si ha:

$$J_{p,V} = (d\phi_V)^{-1} \circ j_n \circ (d\phi_V) = (\text{ ricordando che } \phi_{V,U} = \phi_V \circ \phi_U^{-1} \ ) =$$

$$= (d\phi_v)^{-1} \circ j_n \circ (d\phi_{VU}) \circ (d\phi_U) = (d\phi_V)^{-1} \circ (d\phi_{VU}) \circ j_n \circ (d\phi_U) =$$
$$= (d\phi_U)^{-1} \circ j_n \circ (d\phi_U) = J_{p,U}.$$

Ma allora l'applicazione è completamente indipendente dalla carta scelta, ovvero è ben definita. □

Per quanto appena mostrato ci riferiremo d'ora in poi all'endomorfismo $J_{p,U}$ omettendo la dipendenza dalla carta, ovvero $J_p := J_{p,U}$.

Lemma 1.2. $J_p^2 = -Id_{T_pM_{\mathbb{R}}}$

Dimostrazione. E' evidente componendo le due applicazioni. □

Diamo ora un'ulteriore definizione

Definizione 1.6. Utilizzando le usuali notazioni di prodotto tensoriale, siano

$$T^{(k,l)}M = TM^{\otimes k} \otimes T^*M^{\otimes l} \quad \text{e} \quad T_p^{(k,l)}M = T_pM^{\otimes k} \otimes T_p^*M^{\otimes l}.$$

Un'applicazione differenziabile

$$T : M \longrightarrow T^{(k,l)}M$$

si dice tensore di tipo (k, l) se ad ogni punto della varietà associa un tensore $T(p) \in T_p^{(k,l)}M$.

Al variare del punto $p \in M$ la collezione delle applicazioni J_p dà luogo ad un tensore (o meglio ad un campo di tensori) J di tipo (1,1): questo sta a significare che J è un'applicazione differenziabile

$$J : M \longrightarrow End(TM_{\mathbb{R}}) \quad \text{tale che} \quad p \in M \longrightarrow J_p \in End(T_pM_{\mathbb{R}}).$$

Inoltre gode della proprietà che $J^2 = -Id$ (questo discende direttamente dal fatto che $J_p^2 = -Id_{T_pM_{\mathbb{R}}}$).

Definizione 1.7. Un $(1,1)$-tensore J sulla varieta $M_{\mathbb{R}}$ tale che $J^2 = -Id$ si dice **struttura quasi complessa** . La coppia $(M_{\mathbb{R}}, J)$ si dirà invece **varietà quasi complessa**

Ora che abbiamo introdotto il concetto di struttura e varietà quasi complessa diamo un esempio esplicito di come calcolare il tensore J partendo da una varietà complessa.

Osservazione 2. *Sia M una varietà complessa di dimensione n ed $M_{\mathbb{R}}$ la corrispondente $2n$-varietà reale . Consideriamo l'atlante reale $\{(U, \phi_U)\}$ di $M_{\mathbb{R}}$ e quindi gli omeomorfismi*

$$\begin{aligned} \phi_U : U \subset M &\longrightarrow \quad \mathbb{R}^{2n} \qquad \textit{tali che} \\ z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha &\longrightarrow \{e_\alpha\}_{\alpha:1}^{2n} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Avendo indicato con $\{e_\alpha\}_{\alpha:1}^{2n}$ la base canonica di $\mathbb{R}^{2n}$.
Per definizione lo spazio tangente alla varietà in un punto ha per base i vettori

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right|_p &= (d\phi_U)^{-1}(e_\alpha) \quad \alpha : 1, \ldots, n \\ \left.\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right|_p &= (d\phi_U)^{-1}(e_{\alpha+n}) \end{aligned} \tag{1.5}$$

Per calcolare esplicitamente la forma del tensore J non ci rimane che studiare come agisce sui vettori della base. Attraverso un rapido calcolo otteniamo che:

$$\begin{aligned} J\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right|_p\right) &= J_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right|_p\right) = ((d\phi_U)^{-1} \circ j_n \circ (d\phi_U))\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right|_p\right) = \\ &= ((d\phi_U)^{-1} \circ j_n \circ (d\phi_U))((d\phi_U)^{-1}(e_\alpha)) = (d\phi_U)^{-1}(j_n(e_\alpha)) = \\ &= (d\phi_U)^{-1}(e_{\alpha+n}) = \left.\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right|_p \end{aligned} \tag{1.6}$$

In modo del tutto analogo otteniamo anche

$$J\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right|_p\right) = \left.\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right|_p$$

Ma allora abbiamo appena ricavato questo importante risultato: **partendo da una varietà complessa M , si ha sempre che questa possiede una struttura quasi complessa $J \equiv j_n$, ovvero la coppia $(M_{\mathbb{R}}, j_n)$ è sempre una varietà quasi complessa.**

Capitolo 2

Strutture quasi complesse

a cura di Emanuela Laura Giacomelli.

2.1 Introduzione

Un secondo modo per arrivare a definire varietà complesse, è quello di partire dalle varietà quasi complesse che sono state appena introdotte. In effetti la definizione di struttura quasi complessa data per una varietà $M_{\mathbb{R}}$ si può estendere ad una generica varietà reale differenziabile. L'equivalenza tra i due approcci è data dal Teorema di Newlander-Niremberg che sarà mostrato più avanti.

2.2 Diagonalizzazione di una struttura quasi complessa

Sia (M, J) una varietà quasi complessa, per quanto prima definito, si ha che $J^2 = -Id$. Dai criteri di diagonalizzabilità segue che l'endomorfismo J è diagonalizzabile ed ammette come autovalori $\pm\, i$. Per diagonalizzare J dobbiamo allora considerare il complessificato di TM.
D'ora in avanti useremo la seguente notazione

$$TM^{\mathbb{C}} = TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

Estendiamo dunque tutti gli endomorfismi reali e gli operatori differenziali per $\mathbb{C}$-linearità da TM a $TM^{\mathbb{C}}$ ponendo $J(v \otimes v) = J(v) \otimes z$.
Osserviamo poi che $TM^{\mathbb{C}}$ contiene due sottofibrati vettoriali complessi, entrambi di ugual rango, relativi ai due autovalori $\pm\, i$. Denoteremo tali sottofi-

brati rispettivamente con $T^{1,0}M$ e $T^{0,1}M$. È utile mostrare allora il seguente risultato.

Lemma 2.1. *Si ha che*

1. $T^{1,0}M = \{X - iJX | X \in TM\}$
2. $T^{0,1}M = \{X + iJX | X \in TM\}$
3. $TM^{\mathbb{C}} = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$

Dimostrazione. I primi due punti si dimostrano nello stesso modo, mostriamo allora solo il primo. Procediamo per doppia inclusione.

- $T^{1,0}M \supset \{X - iJX | X \in TM\}$
  $J(X - iJX) = JX - iJ^2X = i(X - iJX)$
- $T^{1,0}M \subset \{X - iJX | X \in TM\}$
  $X \in T^{1,0}M \Rightarrow JX = iX$, dunque $X = \frac{X}{2} + \frac{X}{2} = \left(\frac{X}{2}\right) - iJ\left(\frac{X}{2}\right)$

Mostriamo infine il terzo punto. Prendiamo un generico $Z \in TM^{\mathbb{C}}$, esso si scriverà come $Z = X + iW$ con $X, W \in TM$ e $W := J\tilde{W}$.
Si ha allora

$$Z = \frac{1}{2}[(V - \tilde{W}) - iJ(V - \tilde{W})] + \frac{1}{2}[(V + \tilde{W}) + iJ(V + \tilde{W})]$$

Inoltre, il fatto che $T^{1,0}M$ e $T^{0,1}M$ sono sottofibrati relativi a due autovalori distinti, ci garantisce che la loro intersezione è banale. Segue allora che

$$TM^{\mathbb{C}} = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$$

□

2.3 Condizioni necessarie affinché una varietà ammetta struttura quasi complessa

Le condizioni necessarie affinché una varietà differenziabile reale M ammetta una struttura quasi complessa sono due: la dimensione di M deve essere pari e M deve essere orientabile.

2.3.1 Dimensione pari

Il fatto che M abbia dimensione pari segue dalle seguenti uguaglianze

$$det(J)^2 = det(J^2) = det(-Id) = (-1)^{dim(M)}$$

2.3.2 Orientabilità

Per mostrare che una varietà quasi complessa M è necessariamente orientabile, dobbiamo fare delle considerazioni preliminari.

Lemma 2.2. *Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione m, tale che su V è ben definito un endomorfismo $J : V \to V$ con $J^2 = -Id$. Allora V ha dimensione pari ed ammette una base del tipo $\{v_1, \cdots, v_n, J(v_1), \cdots, J(v_n)\}$.*

Dimostrazione. Assumiamo $m > 0$. Scegliamo $v_1 \neq 0$ in V, si ha che v_1 e $J(v_1)$ sono linearmente indipendenti. Consideriamo infatti una generica combinazione lineare di v_1 e $J(v_1)$ nulla e a coefficienti reali

$$\lambda v_1 + \mu J(v_1) = 0$$

applicando J ad ambo i membri, ottieniamo anche che

$$-\mu v_1 + \lambda J(v_1) = 0$$

Dunque scrivendo le due equazioni in forma matriciale, si ha

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ J(v_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e dovendo essere

$$det \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix} = 0$$

otteniamo $\lambda = \mu = 0$.
Osserviamo poi che $Span\{v_1, J(v_1)\}$ è J-invariante, se esso esaudisce tutto V abbiamo finito. Altrimenti consideriamo $V' := V \backslash Span\{v_1, J(v_1)\}$. Anche V' è J-invariante e quindi $J_{|V'} : V' \to V'$ e $(J_{|V'})^2 = -Id$. Procedendo per induzione sulla dimensione, risulta allora che V ammette una base della forma $\{v_1, \cdots, v_n, J(v_1), \cdots, J(v_n)\}$. □

A questo punto, siamo pronti per mostare l'orientabilità di M.

Proposizione 2.1. *Ogni varietà quasi complessa è orientabile.*

Dimostrazione. Sia (M, J) una varietà quasi complessa. Applichiamo il Lemma precedente a $V = T_p^*M$ e a J mappa duale indotta $T^*M \to T^*M$.
Riusciamo quindi a scegliere un ricoprimento $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ di M tale che esiste un riferimento del tipo $\{\varphi_1^\alpha, \cdots, \varphi_n^\alpha, J(\varphi_1^\alpha), \cdots, J(\varphi_n^\alpha)\}$ su $T^*(U_\alpha)$. Allora se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ risulta

$$\varphi_1^\alpha \wedge \cdots \wedge \varphi_n^\alpha \wedge J(\varphi_1^\alpha) \wedge \cdots \wedge J(\varphi_n^\alpha) = det(A) \varphi_1^\beta \wedge \cdots \wedge \varphi_n^\beta \wedge J(\varphi_1^\beta) \wedge \cdots \wedge J(\varphi_n^\beta)$$

dove A è la matrice del cambio di base. Essendo la matrice A del tipo

$$\begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix}$$

essa ha determinante positivo. Abbiamo allora trovato una $2n$-forma non nulla che ha come espressione locale su U_α, $\omega_{U_\alpha} = \varphi_1^\alpha \wedge \cdots \wedge \varphi_n^\alpha \wedge J(\varphi_1^\alpha) \wedge \cdots \wedge J(\varphi_n^\alpha)$ e tale che nelle intersezioni non vuote degli aperti del ricoprimento da la stessa orientazione. Dato che ogni combinazione convessa di $2n$-forme che danno la stessa orientazione, da ancora la stessa orientazione, segue la tesi. Basta infatti utilizzare la partizione dell'unità $\{\rho_{U_\alpha}\}$ subordinata al ricoprimento scelto per definire una $2n$-forma globale e non nulla su M, $\omega = \sum \rho_{U_\alpha}\omega_{U_\alpha}$. □

Osservazione 3. *Non tutte le varietà differenziabili reali di dimensione pari ed orientabili ammettono una struttura quasi complessa. Ad esempio, Ehresmann ed Hopf mostrarono che $\mathbb{S}^4$ non ammette alcuna struttura quasi complessa.*

2.4 Espressione locale di J

Mostriamo un altro risultato importante sulle varietà quasi complesse.

Lemma 2.3. *Sia (M, J) una varietà quasi complessa, allora per ogni $p \in M$, J è localmente rappresentata dalla matrice j_n.*

Dimostrazione. Identifichiamo $GL(n,\mathbb{C}) = \{A \in GL(2n,\mathbb{R} \mid Aj_n = j_nA\}$. Possiamo allora parametrizzare l'insieme delle strutture complesse di $\mathbb{R}^{2n}$ attraverso $GL(2n,\mathbb{R})/GL(n,\mathbb{C})$, mediante

$$[A] \leftrightarrow J_{[A]} := Aj_nA^{-1}$$

Tale corrispondenza è ben definita perché se $[A] = [B]$, allora esiste $C \in GL(n,\mathbb{C})$ tale che $A = BC$, dunque

$$Aj_nA^{-1} = BCj_nC^{-1}B^{-1} = Bj_nB^{-1}$$

Inoltre, $J_{[A]}$ è evidentemente una struttura complessa.
D'altra parte, per ogni struttura complessa su $\mathbb{R}^{2n}$ esiste $[A]$ tale che $J_{[A]} = J$. Basta infatti considerare il tipo di basi la cui esistenza è stata mostrata nel Lemma 2.2; la matrice A cercata allora è la matrice del cambio di base. □

Osservazione 4. *Si può scegliere di parametrizzare l'insieme delle strutture complesse di $\mathbb{R}^{2n}$ anche attraverso $GL^+(2n,\mathbb{R})/GL(n,\mathbb{C})$. Tale scelta non è del tutto equivalente alla precedente, considerando infatti $GL^+(2n,\mathbb{R})/GL(n,\mathbb{C})$ stiamo sottolineando il fatto di aver già fissato un'orientazione della varietà quasi complessa (M, J).*

2.5 Esempi

Abbiamo già visto che se M è una varietà complessa, $(X_{\mathbb{R}}, J)$ è una varietà quasi complessa. Vediamo ora altri due esempi.

2.5.1 Superficie orientata di $\mathbb{R}^3$

Ogni superficie orientata Σ di $\mathbb{R}^3$ ammette una struttura quasi complessa. Possiamo definire tale struttura tarmite il prodotto vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

$$J_p : T_p\Sigma \to T_p\Sigma$$

$$x_p \mapsto \gamma_p \times x_p$$

dove γ_p è il vettore unitario normale a Σ in p e $\times$ indica l'usuale prodotto vettoriale di $\mathbb{R}^3$. La ragione del fatto che J è una struttura quasi complessa è che

$$\gamma_p \times (\gamma_p \times x_p) = \gamma_p(x_p \cdot \gamma_p) - x_p(\gamma_p \cdot \gamma_p) = -x_p||\gamma_p||^2 = -x_p$$

Dunque $J^2 = -Id$.

2.5.2 Varietà simplettica

Ogni varietà simplettica ammette una struttura quasi complessa. Ricordiamo che

Definizione 2.1. Sia X una varietà differenziabile una 2-forma ω su X si dice forma simplettica se è non nulla, chiusa e non degenere. In tale caso, la coppia (X, ω) si dice varietà simplettica.

Possiamo dare poi una nozione di compatibilità della struttura quasi complessa J con la forma ω.

Definizione 2.2. Sia (M, ω) una varietà simplettica e sia J una struttura quasi complessa su M. J si dice compatibile con ω se risulta

- $\omega(Jv, Jw) = \omega(v, w)\ \forall v, w;$
- $\omega(Jv, v) > 0\ \forall v \neq 0.$

Sulle varietà simplettiche vale in realtà un risultato più profondo.

Teorema 2.4. *Ogni varietà simplettica (X, ω) ammette una struttura quasi complessa J compatibile con ω.*

Il legame tra varietà simplettiche e strutture quasi complesse è molto importante. Fu Gromov a mostrare che ogni varietà simplettica (X, ω) ammette una struttura quasi complessa compatibile con ω ed uso ciò per dare avvio alla sviluppo della teoria delle curve pseudolomorfe, cioè mappe lisce da una superficie di Riemann ad una varietà quasi complessa che soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann.

Capitolo 3

Il Teorema di Newlander-Nirenberg

a cura di Marco Prestipino.

In questo paragrafo vogliamo dare una dimostrazione del Teorema di Newlander-Nirenberg. Prima di cominciare diamo la seguente definizione.

Definizione 3.1. Sia (M, J) una struttura quasi complessa su una varietà M. Allora chiameremo *Tensore di Nijenhuis* associato a J il tensore $(2,1)$ $N : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$ seguente:

$$N(X, Y) := [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY].$$

(Ricordiamo che si definisce $[X, Y] := X \circ Y - Y \circ X$)

Teorema 3.1 (Newlander-Nirenberg, 1957)**.** *Sia (M, J) una struttura quasi complessa su una varietà M. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *J è una struttura complessa.*

2. *Il sottofibrato $T^{(0,1)}M$ è integrabile.*

3. *$\forall\ X, Y \in \chi(M)$ si ha che $N(X, Y) = 0$.*

Dimostrazione.

- **(1⇒2)** Il fatto che J abbia una struttura complessa equivale ad affermare che l'atlante sulla varietà M sia olomorfo. Detta pertanto $\phi_U : U \subseteq M \to \tilde{U} \subseteq \mathbb{C}^m \cong \mathbb{R}^{2m}$ una carta locale, possiamo considerare la sua α-esima coordinata $z_\alpha := x_\alpha + iy_\alpha$. Per definizione allora, detta $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^{2m}$ la base canonica di $\mathbb{R}^{2m}$, vale che:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} = (d\phi)^{-1}(e_\alpha) \qquad \frac{\partial}{\partial y_\alpha} = (d\phi)^{-1}(e_{\alpha+m}).$$

Naturalmente se $P \in M$ allora $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\big|_P, \frac{\partial}{\partial y_\alpha}\big|_P \in T_P M$ formano una base locale per $\alpha = 1, \dots, m$. Calcoliamo allora quanto vale J su tali campi. Per definizione si ha che:

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right) = ((d\phi)^{-1} \circ j_m \circ (d\phi))((d\phi)^{-1}(e_\alpha)) = ((d\phi)^{-1} \circ j_m)(e_\alpha) =$$

$$= (d\phi)^{-1}(e_{\alpha+m}) = \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \text{ e analogamente } J\left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$$

utilizzando il fatto che per come abbiamo definito la matrice j_m si ha $j_m(e_\alpha) = e_{\alpha+m}$. Ricordando la definizione dei due sottofibrati $T^{(1,0)}M = \{X - iJX,\ X \in TM\}$ e $T^{(0,1)}M = \{X + iJX,\ X \in TM\}$, possiamo allora dare una base locale composta da $\frac{\partial}{\partial z_\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} - i\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right) \in T^{(1,0)}M$ e da $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + i\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right) \in T^{(0,1)}M$. Per definizione vale che il sottofibrato $\Gamma(T^{(0,1)}M)$ si dice integrabile se e solo se dati $X, Y \in \Gamma(T^{(0,1)}M)$ allora anche $[X, Y] \in \Gamma(T^{(0,1)}M)$. La nostra tesi si può pertanto mostrare tramite il calcolo in coordinate. Siano allora $X = \sum_{\alpha=1}^m x_\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha}$ e $Y = \sum_{\alpha=1}^m y_\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha}$. Allora, calcolando esplicitamente otteniamo che

$$[X, Y] = \sum_{\alpha,\beta} x_\alpha \cdot \frac{\partial y_\beta}{\partial \bar{z}_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta} - \sum_{\alpha,\beta} y_\alpha \cdot \frac{\partial x_\beta}{\partial \bar{z}_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta}$$

ovvero abbiamo ottenuto un'espressione in coordinate solamente in termini di $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha}$ che corrisponde alla nostra tesi.

- **(2⇒3)** Cominciamo considerando due generici campi vettoriali $X, Y \in \chi(M)$. Scomponiamoli proiettandoli sui due sottofibrati $T^{(1,0)}M$ e $T^{(0,1)}M$ nel modo seguente

$$X = \underbrace{\frac{1}{2}(X - iJX)}_{=:Z} + \underbrace{\frac{1}{2}(X + iJX)}_{=:\bar{Z}}; Y = \underbrace{\frac{1}{2}(Y - iJY)}_{=:W} + \underbrace{\frac{1}{2}(Y + iJY)}_{=:\bar{W}}$$

dove generalmente Z, W sono dette parti olomorfe di X, Y (rispettivamente) e $\bar{Z}, \bar{W}$ parti antiolomorfe. Possiamo dire che N è bilineare per come è stato definito (è un tensore (2,1) definito tramite bracket), pertanto possiamo dire che

$$N(X,Y) = N(Z,W) + N(Z,\bar{W}) + N(\bar{Z},W) + N(\bar{Z},\bar{W}).$$

Per mostrare la tesi basterà mostrare che i 4 termini dell'espressione precedente sono tutti identicamente nulli. Cominciamo da

$$N(Z,\bar{W}) = [X-iJX, Y+ijY]+J[JX+iX, Y+iJY]+J[X-iJX, JY-iY]-$$

$$\begin{aligned}-[JX+iX, JY-iY] &= [X,Y]-i[JX,Y]+i[JX,JY]+i[X,JY]+\\ &+J[JX,Y]+iJ[JX,JY]+iJ[X,Y]-J[X,JY]+\\ &+J[X,JY]-iJ[X,Y]-iJ[JX,JY]+J[JX,Y]-\\ &-[JX,JY]+i[JX,Y]-i[X,JY]-[X,Y]=0\end{aligned}$$

(Nota: per semplicità abbiamo eliminato dai calcoli il fattore $\frac{1}{2}$). In modo del tutto analogo si ricava che anche $N(\bar{Z},W)=0$. Per quanto riguarda invece $N(\bar{Z},\bar{W})$ si ha che (calcolando similmente)

$$N(\bar{Z},\bar{W}) = ([\bar{Z},\bar{W}] - iJ[\bar{Z},\bar{W}]).$$

Sappiamo però che $T^{(0,1)}M$ è integrabile, e ciò implica che il bracket $[\bar{Z},\bar{W}]$ è nell'autospazio di autovalore $-i$, pertanto vale che $J[\bar{Z},\bar{W}] = -i[\bar{Z},\bar{W}] \Leftrightarrow J[\bar{Z},\bar{W}]+i[\bar{Z},\bar{W}]=0 \Leftrightarrow [\bar{Z},\bar{W}]-iJ[\bar{Z},\bar{W}]=0$ pertanto possiamo dire che $N(\bar{Z},\bar{W})=0$. In modo del tutto analogo si mostra che anche $N(Z,W)=0$ pertanto segue la tesi.

- **(3⇒2)** Per mostrare questa implicazione, consideriamo due generici campi vettoriali $X,Y \in \chi(M)$. Definiamo il campo seguente $U := [X+iJX, Y+iJY]$, ed osserviamo che per come l'abbiamo definito si ha che $X+iJX, Y+iJY \in \Gamma(T^{(0,1)}M)$; ne segue allora che la tesi equivale a mostrare che $U \in \Gamma(T^{(0,1)}M)$. Mostriamo allora che vale la seguente identità

$$U - iJU = N(X,Y) - iJN(X,Y). \tag{3.1}$$

Sviluppiamo il primo membro ed otteniamo così

$$U - iJU = [X+iJX, Y+iJY] - iJ[X+iJX, Y+iJY] =$$

$$\begin{aligned}&= [X,Y]+i[JX,Y]+i[X,JY]-[JX,JY]-\\ &-iJ[X,Y]+J[JX,Y]+J[X,JY]+iJ[JX,JY]=\end{aligned}$$

$$= \underbrace{[X,Y] + J[JX,Y] + J[X,JY] - [JX,JY]}_{=N(X,Y)} +$$
$$\underbrace{-iJ[X,Y] + i[JX,Y] + i[X,JY] + iJ[JX,JY]}_{=-iJN(X,Y)}$$

semplicemente riordinando i termini. Possiamo allora dire che essendo $N(X,Y) = 0$ dev'essere $U - iJU = 0 \Leftrightarrow U = iJU \Leftrightarrow -iU = JU$ ovvero se e soltanto se si ha che $U \in T^{(0,1)}M$ cioè al sottofibrato di autovalore $-i$.

- **(2⇒1)** Quest'ultima implicazione è la parte realmente difficile della dimostrazione. Daremo in questa sede solo un passaggio del procedimento, senza entrare nei dettagli, per cui rimandiamo a [4]. Il punto centrale consiste nel mostrare l'esistenza di coordinate locali $\left\{\frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right\}_{\alpha=1}^m$ su M per le quali valga che

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \qquad J\left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}. \tag{3.2}$$

Supponiamo di aver mostrato quest'affermazione. Sulla nostra varietà M possiamo allora considerare altre coordinate locali $\left\{\frac{\partial}{\partial u_\alpha}, \frac{\partial}{\partial v_\alpha}\right\}_{\alpha=1}^m$ per cui valgano le (3.2). Scriviamo allora le equazioni dei cambi di coordinate da un sistema all'altro e mostriamo che si tratta di funzioni olomorfe. Possiamo scrivere che

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \sum_{\beta=1}^m \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial u_\beta} + \sum_{\beta=1}^m \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial v_\beta} \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_\alpha} = \sum_{\beta=1}^m \frac{\partial u_\beta}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial u_\beta} + \sum_{\beta=1}^m \frac{\partial v_\beta}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial v_\beta}. \tag{3.4}$$

Applichiamo allora l'operatore J alla (3.3)

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right) = \sum_{\beta=1}^m \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \cdot J\left(\frac{\partial}{\partial u_\beta}\right) + \sum_{\beta=1}^m \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \cdot J\left(\frac{\partial}{\partial v_\beta}\right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial y_\alpha} = \sum_{\beta=1}^m \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial v_\beta} + \sum_{\beta=1}^m \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial u_\beta}\right)$$

e confrontando l'ultima espressione ottenuta con la (3.4) otteniamo una condizione sui coefficienti, ovvero

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial v_\beta}{\partial y_\alpha} \qquad \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} = -\frac{\partial u_\beta}{\partial y_\alpha}$$

cioè le equazioni di Cauchy-Riemann. Ne concludiamo pertanto la tesi.

□

Capitolo 4

Strutture complesse e quasi complesse su sfere

a cura di Enrico Toffoli.

Introduzione

Al fine di osservare qualche esempio concreto e di accennare a dei problemi interessanti, in questa sezione ci occuperemo di strutture complesse e quasi complesse su sfere. Il problema di fondo è il seguente.

Problema 1. *Per quali $n \in \mathbb{N}$ la sfera S^n ammette una struttura complessa? E una struttura quasi complessa?*

Proveremo a tracciare una risposta a questa domanda assai naturale, soffermandoci a studiare alcune di queste strutture.

4.1 Discussioni preliminari

Iniziamo ad escludere alcune possibilità. Come condizioni necessarie affinché una varietà differenziabile possa ammettere una struttura quasi complessa (e dunque a maggior ragione una struttura complessa) abbiamo visto l'orientabilità e la dimensione pari. Se la prima di queste condizioni non crea restrizioni nel caso delle sfere (in quanto tutte orientabili), la seconda ci permette invece di restringere il campo di indagine alle sfere S^n con n numero pari. Tra queste, escludiamo subito dalla nostra analisi il caso di S^0, che essendo una coppia di punti ammette banalmente una struttura complessa e quasi complessa. Andiamo invece ad analizzare un altro caso in cui conosciamo già la risposta al problema.

4.2 L'esempio di S^2

Consideriamo la sfera

$$S^2 = \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3 \mid p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Poiché essa è diffeomorfa allo spazio proiettivo $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$, ammette chiaramente una struttura complessa. Siano $S = (0, 0, -1) \in S^2$ il polo sud e $N = (0, 0, 1) \in S^2$ il polo nord della sfera. Un atlante differenziabile che sia anche olomorfo è allora costituito ad esempio dalle due carte seguenti.

$$\varphi_S : S^2 \backslash \{S\} \to \mathbb{R}^2$$

definita da

$$\varphi_S(p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{p_1}{1 + p_3}, \frac{p_2}{1 + p_3} \right),$$

la cui inversa è data da

$$\varphi_S^{-1}(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \left(2x, 2y, 1 - (x^2 + y^2) \right)$$

(si tratta della proiezione stereografica dal polo sud) e

$$\varphi_N : S^2 \backslash \{N\} \to \mathbb{R}^2$$

definita da

$$\varphi_N(p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{p_1}{1 - p_3}, -\frac{p_2}{1 - p_3} \right),$$

la cui inversa è data da

$$\varphi_N^{-1}(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \left(2x, -2y, x^2 + y^2 - 1 \right)$$

(si tratta della proiezione stereografica dal polo nord composta con la riflessione rispetto all'asse x in $\mathbb{R}^2$). In effetti troviamo che entrambi i cambiamenti di carte

$$\varphi_N \circ \varphi_S^{-1}, \varphi_S \circ \varphi_N^{-1} : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} = \mathbb{C} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} = \mathbb{C} \backslash \{0\}$$

hanno l'espressione

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2}(x, -y)$$

che in notazione complessa corrisponde alla funzione olomorfa

$$z \mapsto \frac{1}{z}.$$

D'altro canto, abbiamo visto che a ogni superficie orientabile di $\mathbb{R}^3$ è possibile associare una struttura quasi complessa attraverso il prodotto vettoriale. Nel caso di S^2 questa struttura J è data dagli endomorfismi

$$\begin{aligned} J_p : T_pS^2 = p^\perp &\to T_pS^2 = p^\perp \\ v &\mapsto p \times v. \end{aligned}$$

Ci chiediamo se questa struttura quasi complessa coincida con la struttura complessa che deriva dall'essere varietà olomorfa. Per rispondere a questa domanda, andiamo a calcolare l'espressione di J rispetto all'atlante olomorfo che abbiamo definito in precedenza: grazie a ciò che abbiamo visto in precedenza (lezione di Valerio Vallocchia, cfr Osservazione 2), avremo questa coincidenza se e soltanto se la matrice che rappresenta J rispetto alle basi coordinate di questo atlante è

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = j_1.$$

Sia dunque $p = (p_1, p_2, p_3) \in S^2$, $p \neq S$ e calcoliamo l'espressione di J_p rispetto alla base coordinata $\{\frac{\partial}{\partial x}|_p, \frac{\partial}{\partial y}|_p\}$ di T_pS^2 relativa alla carta φ_s. Con l'identificazione tra T_pS^2 e $p^\perp = Im\left(d(\varphi_s^{-1})|_{\varphi(p)}\right)$, abbiamo

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p = d(\varphi_s^{-1})|_{\varphi(p)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p = d(\varphi_s^{-1})|_{\varphi(p)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Siccome φ_S^{-1} è un'applicazione differenziabile di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$, il suo differenziale in un punto (x, y) sarà rappresentato rispetto alle basi canoniche da una matrice 3×2. Calcolando le derivate troviamo

$$d(\varphi_s^{-1})|_{(x,y)} = \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} 2(1 + x^2 + y^2) - 4x^2 & -4xy \\ -4xy & 2(1 + x^2 + y^2) - 4y^2 \\ -4x & -4y \end{pmatrix}$$

e dunque, svolgendo i conti ricordando che $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$,

$$d(\varphi_s^{-1})|_{\varphi(p)} = d(\varphi_s^{-1})|_{\left(\frac{p_1}{1+p_3}, \frac{p_2}{1+p_3}\right)} = \begin{pmatrix} 1 + p_3 - p_1^2 & -p_1p_2 \\ -p_1p_2 & 1 + p_3 - p_2^2 \\ -p_1(1 + p_3) & -p_2(1 + p_3) \end{pmatrix}$$

Di conseguenza, con questa identificazione abbiamo

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p = \begin{pmatrix} 1+p_3-p_1^2 \\ -p_1p_2 \\ -p_1(1+p_3) \end{pmatrix}, \quad \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p = \begin{pmatrix} -p_1p_2 \\ 1+p_3-p_2^2 \\ -p_2(1+p_3) \end{pmatrix}.$$

A questo punto, avendo l'espressione in $\mathbb{R}^3$ dei vettori coordinati, possiamo calcolarvi J_p attraverso la definizione. Otteniamo

$$J_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p\right) = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1+p_3-p_1^2 \\ -p_1p_2 \\ -p_1(1+p_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_1p_2 \\ p_1^2+p_3+p_3^2 \\ -p_2(1+p_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_1p_2 \\ 1+p_3-p_2^2 \\ -p_2(1+p_3) \end{pmatrix} = \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p$$

e dunque, siccome $J_p^2 = -Id$, abbiamo automaticamente anche

$$J_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p\right) = -\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p.$$

Ne segue che la matrice che rappresenta J_p nella base $\{\frac{\partial}{\partial y}|_p, \frac{\partial}{\partial x}|_p\}$ di T_pS^2 è esattamente

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = j_1.$$

Ripetendo calcoli per le coordinate della carta φ_N, otteniamo lo stesso risultato. Questo ci dice esattamente che la struttura quasi complessa definita attraverso il prodotto vettoriale è la stessa che deriva dall'atlante olomorfo costituito da φ_S e φ_N.

4.3 Una struttura quasi complessa su S^6

$\mathbb{R}^3$ non è l'unico spazio in cui è possibile definire un prodotto vettoriale. In particolare, in $\mathbb{R}^7$ è ben definito un prodotto interno $\times$ con le seguenti due proprietà (maggiori dettagli nell'Appendice A):

(i) $a \cdot (a \times b) = b \cdot (a \times b) = 0$;

(ii) $a \times (a \times b) = (a \cdot b)a - (a \cdot a)b$.

Questo ci permette di definire, in $S^6 \subset \mathbb{R}^7$, una struttura quasi complessa in modo analogo a quanto fatto per S^2 e più in generale per tutte le superfici orientabili di $\mathbb{R}^3$. Più precisamente, abbiamo in S^6 la struttura quasi complessa J data dagli endomorfismi

$$\begin{aligned} J_p : T_pS^6 = p^\perp &\to T_pS^6 = p^\perp \\ v &\mapsto p \times v. \end{aligned}$$

In effetti, per ogni $p \in S^6$, la proprietà (i) ci assicura che l'immagine di v sia ancora in $p^\perp$, mentre la proprietà (ii) ci fornisce l'identità $J_p^2 = -Id$.

Ci chiediamo adesso se J definito in questo modo definisca in realtà una struttura complessa. Grazie al teorema di Newlander-Nirenberg, rispondere a questa domanda è concettualmente molto semplice: basta verificare ad esempio se il tensore di Nijenhuis si annulli o meno. Per farlo concretamente, ci sono due passi da fare:

1. scegliere un atlante di S^6 e calcolare l'espressione di J rispetto alle basi coordinate date dalle sue carte (così come avevamo fatto nel caso di S^2);
2. calcolare $N^J(X,Y) = [X,Y] + J[JX,Y] + J[X,JY] - [JX,JY]$ su dei campi locali dati localmente dai vettori coordinati e verificare se si annulla su tutti i possibili accoppiamenti.

A livello computazionale però tutto questo è complicato dalla dimensione relativamente grande degli spazi in questione. Se ad esempio φ_S è ancora una proiezione stereografica dal polo sud $S = (0,0,0,0,0,0,1) \in S^6$, si trova

$$d(\varphi_S^{-1})|_{\varphi(p)} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1+p_7-p_1^2 & -p_1p_2 & -p_1p_3 & -p_1p_4 & -p_1p_5 & -p_1p_6 \\ -p_1p_2 & 1+p_7-p_2^2 & -p_2p_3 & -p_2p_4 & -p_2p_5 & -p_2p_6 \\ -p_1p_3 & -p_2p_3 & 1+p_7-p_3^2 & -p_3p_4 & -p_3p_5 & -p_3p_6 \\ -p_1p_4 & -p_2p_4 & -p_3p_4 & 1+p_7-p_4^2 & -p_4p_5 & -p_4p_6 \\ -p_1p_5 & -p_2p_5 & -p_3p_5 & -p_4p_5 & 1+p_7-p_5^2 & -p_5p_6 \\ -p_1p_6 & -p_2p_6 & -p_3p_6 & -p_4p_6 & -p_5p_6 & 1+p_7-p_6^2 \\ -p_1(1+p_7) & -p_2(1+p_7) & -p_3(1+p_7) & -p_4(1+p_7) & -p_5(1+p_7) & -p_6(1+p_7) \end{pmatrix}$$

e dunque la rispettiva base coordinata $\{\frac{\partial}{\partial x_1}|_p\}, ..., \frac{\partial}{\partial x_6}|_p\}$ di $T_pS^6 = p^\perp$ (con $p \neq S$) sarà costituita dalle colonne di questa matrice. Calcolando ad esempio $J_p(\frac{\partial}{\partial x_1}|_p)$ attraverso la (4.1) data in Appendice, otteniamo

$$J_p\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\bigg|_p\right) = p \times \frac{\partial}{\partial x_1}\bigg|_p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1+p_7-p_1^2 \\ -p_1p_2 \\ -p_1p_3 \\ -p_1p_4 \\ -p_1p_5 \\ -p_1p_6 \\ -p_1(1+p_7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1p_6 \\ p_3(1+p_7) - p_1p_5 \\ -p_2(1+p_7) - p_1p_4 \\ p_5(1+p_7) + p_1p_3 \\ -p_4(1+p_7) + p_1p_2 \\ -(p_7+p_7^2+p_1^2) \\ p_6(1+p_7) \end{pmatrix}$$

e per trovarne l'espressione come combinazione lineare di $\frac{\partial}{\partial x_1}|_p \ldots, \frac{\partial}{\partial x_6}|_p$ bisogna infine risolvere un grosso sistema. Dopodiché è necessario ripetere il procedimento per gli altri vettori coordinati, e questo per completare il solo punto 1.

E' chiaro dunque che portare a conclusione il procedimento è nella pratica un'operazione faticosa e geometricamente poco chiarificante. Tuttavia, svolgendo tutti i conti si troverebbe $N^J \neq 0$ e dunque che la struttura quasi complessa derivante dal prodotto vettoriale non è una struttura complessa su S^6. Questo fatto si può anche mostrare più agilmente grazie a metodi più avanzati ([6]).

4.4 Risultati di non esistenza e il problema di S^6

Abbiamo costruito grazie al prodotto vettoriale di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^7$ delle strutture quasi complesse sulle sfere S^2 e S^6. La situazione per $n \neq 2, 6$ è invece del tutto differente. Nel 1947 Ehresmann e Hopf hanno mostrato l'inesistenza di una struttura quasi complessa su S^4 ([3]). Altri risultati particolari sono seguiti negli anni successivi, fino ad arrivare nel 1953 al risultato seguente, dimostrato attraverso strumenti di topologia algebrica ([1]):

Teorema 4.1. (Borel, Serre)
Le uniche sfere ad ammettere una struttura quasi complessa sono S^2 e S^6.

Possiamo a questo punto riassumere una parziale risposta al Problema 1 nella tabella seguente.

	Struttura quasi complessa	Struttura complessa
S^2	SI'	SI'
S^6	NO	?
S^n, $n \neq 2, 6$	NO	NO

Resta un punto interrogativo nella casella riguardante l'esistenza di strutture complesse su S^6 perché, se è vero che la struttura quasi complessa costruita con il prodotto vettoriale non è una struttura complessa, questo non esclude la possibilità di un'altra struttura che sia anche complessa. Formuliamo esplicitamente questo sottoproblema del Problema 1.

Problema 2. *E' possibile definire una struttura complessa su S^6?*

La risposta a questa domanda è ancora oggi sconosciuta.

Appendice: gli ottetti e il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^7$

Chiamiamo **ottetti** (o numeri di Cayley) gli elementi dell'insieme

$$\mathbb{O} := \left\{ a_0 + \sum_{k=1}^{7} a_k i_k \;\middle|\; a_0, ..., a_7 \in \mathbb{R} \right\},$$

dove $i_1, ..., i_7$ sono elementi detti unità immaginarie e le somme sono a priori somme formali. Essi sono dotati di una struttura di algebra 8-dimensionale reale che estende quella quadridimensionale definita sui quaternioni. Una possibile scelta per il prodotto corrispondente deriva dalla seguente tavola moltiplicativa delle unità immaginarie.

$\mathbb{O}$	$\boldsymbol{i_1}$	$\boldsymbol{i_2}$	$\boldsymbol{i_3}$	$\boldsymbol{i_4}$	$\boldsymbol{i_5}$	$\boldsymbol{i_6}$	$\boldsymbol{i_7}$
$\boldsymbol{i_1}$	-1	i_3	$-i_2$	i_5	$-i_4$	$-i_7$	i_6
$\boldsymbol{i_2}$	$-i_3$	-1	i_1	i_6	i_7	$-i_4$	$-i_5$
$\boldsymbol{i_3}$	i_2	$-i_1$	-1	i_7	$-i_6$	i_5	$-i_4$
$\boldsymbol{i_4}$	$-i_5$	$-i_6$	$-i_7$	-1	i_1	i_2	i_3
$\boldsymbol{i_5}$	i_4	$-i_7$	i_6	$-i_1$	-1	$-i_3$	i_2
$\boldsymbol{i_6}$	i_7	i_4	$-i_5$	$-i_2$	i_3	-1	$-i_1$
$\boldsymbol{i_7}$	$-i_6$	i_5	i_4	$-i_3$	$-i_2$	i_1	-1

Segue dalla definizione che questo prodotto non è associativo (ad esempio $i_1(i_2 i_4) = -i_7 \neq i_7 = (i_1 i_2) i_4$). Esso conserva però una proprietà, più debole dell'associatività, detta *proprietà alternativa*:

$$x(xy) = (xx)y, \;\; (yx)x = y(xx) \quad \forall x, y \in \mathbb{O}.$$

Vediamo adesso come definire, a partire da questa struttura, un prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^7$ (tutto questo sarà generalizzabile a un qualsiasi spazio euclideo di dimensione 7, mediante la scelta di una base ortonormale). Definiamo la **parte immaginaria** di un ottetto come

$$Im\left(a_0 + \sum_{k=1}^{7} a_k i_k\right) := \sum_{k=1}^{7} a_k i_k \in \mathbb{O}$$

e chiamiamo $Im(\mathbb{O})$ il sottospazio di $\mathbb{O}$ formato dagli ottetti puramente immaginari. Chiaramente, $Im(\mathbb{O})$ è identificabile a $\mathbb{R}^7$ attraverso la corrispondenza

$$\sum_{k=1}^{7} a_k i_k \longleftrightarrow (a_1, ..., a_7).$$

Con questa identificazione possiamo vedere $i_1, ..., i_7$ come i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^7$. Definiamo allora in $\mathbb{R}^7$ l'operazione bilineare

$$a \times b := Im(ab) \in \mathbb{R}^7, \quad (a, b \in \mathbb{R}^7),$$

che chiamiamo **prodotto vettoriale di $\mathbb{R}^7$**. La tavola moltiplicativa per $i_1, ..., i_k$ cambia soltanto nella diagonale principale.

$\times$	$\boldsymbol{i_1}$	$\boldsymbol{i_2}$	$\boldsymbol{i_3}$	$\boldsymbol{i_4}$	$\boldsymbol{i_5}$	$\boldsymbol{i_6}$	$\boldsymbol{i_7}$
$\boldsymbol{i_1}$	0	i_3	$-i_2$	i_5	$-i_4$	$-i_7$	i_6
$\boldsymbol{i_2}$	$-i_3$	0	i_1	i_6	i_7	$-i_4$	$-i_5$
$\boldsymbol{i_3}$	i_2	$-i_1$	0	i_7	$-i_6$	i_5	$-i_4$
$\boldsymbol{i_4}$	$-i_5$	$-i_6$	$-i_7$	0	i_1	i_2	i_3
$\boldsymbol{i_5}$	i_4	$-i_7$	i_6	$-i_1$	0	$-i_3$	i_2
$\boldsymbol{i_6}$	i_7	i_4	$-i_5$	$-i_2$	i_3	0	$-i_1$
$\boldsymbol{i_7}$	$-i_6$	i_5	i_4	$-i_3$	$-i_2$	i_1	0

Il prodotto di due generici elementi di $\mathbb{R}^7$ sarà dato dalla formula

$$\left(\sum_{j=1}^{7} a_j i_j\right) \times \left(\sum_{k=1}^{7} b_k i_k\right) = \sum_{j,k=1}^{7} (a_j b_k) i_j \times i_k$$

ossia, esplicitando i conti,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_5 - a_5b_4 + a_7b_6 - a_6b_7 \\ a_3b_1 - a_1b_3 + a_4b_6 - a_6b_4 + a_5b_7 - a_7b_5 \\ a_1b_2 - a_2b_1 + a_4b_7 - a_7b_4 + a_6b_5 - a_5b_6 \\ a_5b_1 - a_1b_5 + a_6b_2 - a_2b_6 + a_7b_3 - a_3b_7 \\ a_1b_4 - a_4b_1 + a_7b_2 - a_2b_7 + a_3b_6 - a_6b_3 \\ a_1b_7 - a_7b_1 + a_2b_4 - a_4b_2 + a_5b_3 - a_3b_5 \\ a_6b_1 - a_1b_6 + a_2b_5 - a_5b_2 + a_4b_4 - a_4b_3 \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Indicato con $\cdot$ il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^7$, seguono dalla definizione le seguenti proprietà algebriche.

a. (**ortogonalità**)

$$a \cdot (a \times b) = (a \times b) \cdot b = 0$$

b. (**proprietà della norma**)

$$|a \times b|^2 = |a|^2 |b|^2 - (a \cdot b)^2$$

c. (**anticommutatività**)

$$a \times b = -b \times a$$

d. (**proprietà del prodotto misto**)

$$a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a) + c \cdot (a \times b)$$

e. (**identità di Malcev**)

$$(a \times b) \times (b \times c) = ((a \times b) \times c) \times a + ((b \times c) \times a) \times a + ((c \times a) \times a) \times b$$

f. (**proprietà del prodotto vettoriale triplo**)

$$a \times (a \times b) = (a \cdot b)a - (a \cdot a)b$$

Osserviamo che la *a.* e la *b.* sono le proprietà geometriche che ci permettono di parlare di *prodotto vettoriale*. La *e.* e la *f.* sono invece generalizzazioni delle corrispondenti più forti proprietà soddisfatte dal prodotto vettoriale di $\mathbb{R}^3$, ovverosia l'*identità di Jacobi* e il prodotto vettoriale triplo di tre vettori qualsiasi. Le proprietà che ci servono per definire una struttura quasi complessa su S^6 sono la *a.* e la *f.*.

Bibliografia

[1] Borel, A., Serre, J. P., *Groupes de Lie et puissances réduites de Steenrod.* Amer. J. Math.75, 409–448 (1953)

[2] Joyce D., *Complex Manifolds and Kahler Geometry* http://www.maths.ox.ac.uk/system/files/coursematerial/2012/2694/3/KGlect12.pdf

[3] Hopf, H., *Sur les champs d'éléments de surface dans les variétés à 4 dimensions*, Topologie Algebrique, Paris 1947, pp. 55-59.

[4] Hormander L. , *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, 3rd edition, Amsterdam: North-Holland, 1990

[5] Moroianu Andrei, *Lectures on Kahler Geometry*, Cambridge University Press, 2007

[6] Simanca, S. R. *Canonical Metrics on Compact almost Complex Manifolds*, `http://http://www.impa.br/opencms/pt/biblioteca/pm/PM14.pdf`

[7] Wells R.O., *Differential Analysis on Complex Manifolds*, 3rd edition, Springer