Alcuni aspetti dell'evoluzione della Geometria dal secolo XIX alla metà del XX secolo

Paolo Trani

15 maggio 2013

Sommario

Questo lavoro intende riportare i risultati di una ricerca documentale di tipo storico relativa alle origini e agli sviluppi della Geometria (ma sarebbe più opportuno dire delle **Geometrie**, dopo il Manifesto di Erlangen di Felix Klein) a partire dalla Geometria Differenziale che, negli ultimi due secoli fino ai giorni attuali, si è posta, per risultati ed intuizioni, come brillante sintesi di analisi matematica, algebra e topologia e si è caratterizzata per la forte interazione, a due vie, con le altre scienze, in particolare la fisica e la meccanica quantistica.

Verranno riportati di seguito ampi stralci, ai soli fini didattici e divulgativi, di due interessanti articoli presenti in rete e scritti per Treccani dai professori inglesi Simon M. Salamon (King's College, London) e Jeremy Gray (Open University), per i quali si rimanda al sito: `www.treccani.it/enciclopedia`.

Alcune parti sono state poi ispirate da un lavoro del prof. Reinhold Remmert (Münster Universität) dal titolo: *From Riemann Surfaces to Complex Spaces* recuperabile in rete all'indirizzo:
`www.emis.de/journals/SC/1998/3/pdf/smf_sem-cong_3_203-241.pdf`.

1 Origini della Geometria Differenziale

La geometria differenziale è definibile, in prima approssimazione, come lo studio dei problemi geometrici effettuato con i metodi dell'analisi matematica e del calcolo differenziale e integrale.

Le sue origini risalgono al XVII secolo e nel XIX era una delle branche più attive della matematica.

I problemi tipici studiati dai geometri differenziali dell'epoca riguardavano "oggetti" nello spazio: curve nel piano e curve e superfici nello spazio.

Il concetto di "spazio" si è poi progressivamente esteso e così la geometria differenziale si è affiancata ad altri campi, quali la geometria algebrica e la topologia, per diventare uno degli argomenti centrali della matematica e della fisica matematica.

Già prima della formalizzazione dell'analisi matematica da parte di Gottfried Leibniz e Isaac Newton alla fine del XVII secolo, i matematici avevano costruito un certo repertorio, in realtà piuttosto modesto, di curve, superfici e solidi.

Problemi[1] come la costruzione della radice cubica di 2 avevano peraltro condotto i Greci alla scoperta non solo delle coniche ma anche di altre curve piane come la cissoide e la concoide.

Euclide introdusse la definizione di retta tangente a una circonferenza in un suo punto, e Apollonio, mediante la costruzione delle normali (ossia le rette perpendicolari alle tangenti) alle coniche, è quasi giunto alla nozione di curvatura.

Il metodo delle coordinate, introdotto nel XVII secolo da Pierre de Fermat e da René Descartes (Cartesio), ha consentito di determinare una curva piana mediante una equazione nelle "coordinate cartesiane".

Le coniche sono curve la cui equazione si ottiene annullando un polinomio di secondo grado, e per questo sono dette curve algebriche del secondo ordine; il metodo delle coordinate ha reso possibile lo studio della geometria delle curve di ordine 3 e anche di ordine superiore. Fermat, Descartes e Newton hanno contribuito alla determinazione delle curve generabili meccanicamente, come la cicloide.

L'interazione tra gli studi dell'analisi matematica e i problemi della meccanica classica ha condotto scienziati come Keplero, Galilei, Newton e Pascal, Torricelli, Leibniz e i fratelli Bernoulli (tra gli altri) alla determinazione delle tangenti e al calcolo di lunghezze, aree e volumi, allo studio dei punti di flesso di una curva e alle geodetiche di una superficie avvicinandosi così al concetto di curvatura di una curva piana.

Lo studio degli oggetti in uno spazio tridimensionale ha registrato notevoli progressi nel corso del Settecento. La teoria delle curve "sghembe", ossia le curve per cui non esiste alcun piano che le contenga, richiede un'estensione delle tecniche precedenti che è stata introdotta da Alexis Clairaut e sviluppata parallelamente alla teoria delle superfici.

A partire da precedenti lavori di Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) e di altri, il fisico belga Joseph Plateau (1801-1883) studia la forma delle lamine di sapone con bordo assegnato. Queste lamine tendono a formare superfici di area minima e, per questo motivo, tale branca della geometria viene detta "teoria delle superfici minime". Ebbe un notevole sviluppo nel XIX secolo e, come molti dei maggiori problemi posti in quel secolo, sarà affrontata da nuovi punti di vista nel corso del secolo successivo, mentre altri nuovi temi di ricerca si andavano affermando.

2 La situazione nel XIX secolo

Il contributo più importante allo sviluppo delle geometrie si ebbe attorno al 1850 ed è dovuto al matematico tedesco Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), che si basò su una precedente idea del suo maestro Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Nel 1827, Gauss, che da molti è considerato il padre della geometria differenziale moderna, nella sua memoria *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, aveva sviluppato in modo sistematico la teoria delle "coordinate curvilinee" su una superficie.

[1] il *problema della duplicazione del cubo* (o problema di Delo), così come quello della *quadratura del cerchio* e della *trisezione dell'angolo* si erano dimostrati insolubili con le procedure che oggi chiamiamo "con riga e compasso", le sole ammesse dalla geometria greca

La notazione di Gauss della “**prima forma quadratica fondamentale** su una superficie“:

$$\mathrm{d}s^2 = E\ \mathrm{d}p^2 + 2\,F\ \mathrm{d}p\ \mathrm{d}q + G\ \mathrm{d}q^2 \tag{1}$$

è tuttora comunemente studiata in geometria differenziale.

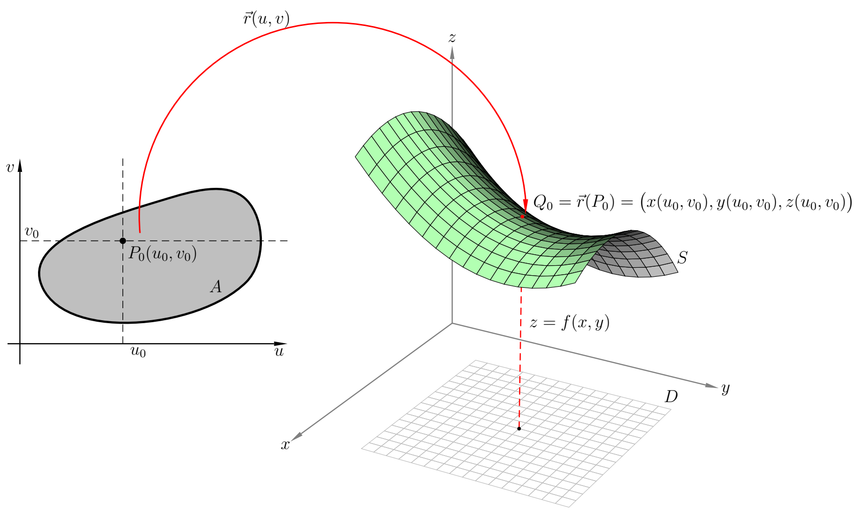
Questa espressione contiene implicitamente il metodo per misurare le distanze usando le coordinate locali p, q e generalizza la formula $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$ che corrisponde al teorema di Pitagora nel piano.

Gauss aveva dimostrato inoltre che la curvatura di una superficie (da intendersi come la misura di quanto essa sia ben approssimata da una sfera, da un piano o da una sella di forma data) è una proprietà intrinseca (*Teorema Egregium*). Ciò significa che la si può determinare attraverso misure che fanno intervenire soltanto la superficie e non lo *spazio ambiente* in cui è immersa.

Riportiamo alcuni cenni di dimostrazione del teorema; siano:

$$\begin{cases} x = x(u^1, u^2) \\ y = y(u^1, u^2) \\ z = z(u^1, u^2) \end{cases} \qquad (u^1, u^2) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$$

le equazioni parametriche di una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$; allora il vettore posizione di un punto generico sulla superficie S è: $\mathbf{r}(u^1, u^2) = \big(x(u^1, u^2), y(u^1, u^2), z(u^1, u^2)\big)$.



I vettori tangenti alle curve ottenute ponendo rispettivamente $u^2 = k$ e $u^1 = h$, con h, k costanti (rispettivamente la *linea* u^1 e la *linea* u^2)[2], sono dati da:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} = \left(\frac{\partial x}{\partial u^1}, \frac{\partial y}{\partial u^1}, \frac{\partial z}{\partial u^1}\right) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{v}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial u^2}, \frac{\partial y}{\partial u^2}, \frac{\partial z}{\partial u^2}\right)$$

[2] se ad esempio S fosse una sfera, allora le due linee sarebbero un meridiano e un parallelo

e i prodotti scalari:

$$g_{ij} =< \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j >= \frac{\partial x}{\partial u^i}\frac{\partial x}{\partial u^j} + \frac{\partial y}{\partial u^i}\frac{\partial y}{\partial u^j} + \frac{\partial z}{\partial u^i}\frac{\partial z}{\partial u^j}, \qquad i, j = 1, 2$$

individuano le lunghezze di $\mathbf{v}_1$ e di $\mathbf{v}_2$ e l'angolo tra di essi; infatti, se con $||\mathbf{v}_k||$ indichiamo la *norma* dei vettori dello spazio normato $\mathbb{R}^3$, per $i = j$ si ha $g_{11} = ||\mathbf{v}_1||^{1/2}$ e $g_{22} = ||\mathbf{v}_2||^{1/2}$ e per $i \neq j$ si ha:

$$g_{12} = g_{21} = \arccos \frac{< \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j >}{||\mathbf{v}_i|| \cdot ||\mathbf{v}_j||}$$

Le funzioni di Gauss E, F, G coincidono rispettivamente con $g_{11}, g_{12} = g_{21}$ e g_{22}; pertanto alla forma quadratica espressa dalla (1) corrisponde la matrice simmetrica:

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

il cui determinante $|g| = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = EG - F^2$ viene usato per misurare l'area della superficie.

In relazione alle linee u^1 e u^2 è poi possibile calcolare le cosiddette *curvature normali* e scrivere la "**seconda forma quadratica fondamentale**" di Gauss:

$$II_G = L \, \mathrm{d}p^2 + 2\, M \, \mathrm{d}p \, \mathrm{d}q + N \, \mathrm{d}q^2 \tag{2}$$

dove i parametri L, M, N dipendono dalle derivate parziali seconde delle equazioni parametriche rispetto a u^1 e u^2.

Allora, le curvature (normali) della superficie S in un punto P misurate rispetto alla linea u^1 e alla linea u^2 rispettivamente, sono esprimibili analiticamente con le funzioni:

$$k(P, u^1) = II_G\left(\frac{\mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||}, \frac{\mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||}\right) \quad \text{e} \quad k(P, u^2) = II_G\left(\frac{\mathbf{v}_2}{||\mathbf{v}_2||}, \frac{\mathbf{v}_2}{||\mathbf{v}_2||}\right)$$

Si chiamano *curvature principali* i due valori, massimo e minimo, delle curvature normali espresse dalla relazione precedente e si indicano con $k_1(P)$ e $k_2(P)$. Si definisce poi **curvatura gaussiana** il loro prodotto:

$$\kappa(P) = k_1(P)\, k_2(P)$$

Sia $\mathbf{v}^3$ il campo vettoriale unitario normale alla superficie S; allora i tre campi vettoriali $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ costituiscono un sistema di riferimento in ogni punto di S.

Differenziando $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ si ha:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial u^j} = \Gamma^1_{ij}\mathbf{v}_1 + \Gamma^2_{ij}\mathbf{v}_2 + h_{ij}\mathbf{v}_3, \qquad i, j = 1, 2$$

Le quantità Γ^i_{jk} (ci sono 6 termini diversi in quanto per esempio $G^i_{12} = G^i_{21}$) sono detti *simboli di Christoffel*.

Le quantità h_{ij} (ce ne sono 3 diversi in quanto per esempio $h_{12} = h_{21}$) danno un'espressione analitica per la seconda forma quadratica fondamentale di Gauss, che esprime la nozione di curvatura normale (o *estrinseca*) della superficie in un punto (cioè che dipende dal modo in cui essa è immersa in $\mathbb{R}^3$).

E' possibile dimostrare che i simboli di Christoffel possono essere calcolati con la seguente formula:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\sum_{r^1}^{2} g^{-1}_{kr}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jr}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^r}\right)$$

Dalla precedente segue che i simboli di Christoffel dipendono solo dalla prima forma fondamentale, cioè dai parametri E, F, G, cioè ancora solo dal prodotto scalare di due vettori tangenti alla superficie in un punto, e quindi dalla **metrica** su S.

Poichè la curvatura gaussiana nel punto è esprimibile come:

$$\kappa = |g|^{-1}\sum_{r=1}^{2} g_{r2}\left(\frac{\partial \Gamma^r_{11}}{\partial u^2} - \frac{\partial \Gamma^r_{12}}{\partial u^1} + \Gamma^1_{11}\Gamma^r_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^r_{22} - \Gamma^1_{11}\Gamma^r_{12} - \Gamma^2_{12}\Gamma^r 21\right)$$

se ne ricava che la curvatura gaussiana dipende solo dai g_{ij} e delle loro derivate; quindi la curvatura Gaussiana è una proprietà intrinseca di una superficie e dipende solo dalla prima forma fondamentale e non dal modo con cui la superficie è immersa in $\mathbb{R}^3$.

Di qui il Teorema Egregium di Gauss:

Teorema 1. *La curvatura Gaussiana di una superficie è intrinseca, cioè dipende soltanto dalla prima forma fondamentale.*

In particolare, questo dice che due superfici localmente isometriche devono avere la stessa curvatura Gaussiana e che non può esistere alcuna isometria locale fra un pezzo di sfera e un pezzo di piano, in quanto la sfera ha curvatura Gaussiana sempre positiva mentre il piano ha curvatura Gaussiana identicamente nulla. In altri termini, non è possibile disegnare su un foglio una mappa della sfera che conservi le distanze.

Dopo Gauss, dalla disciplina che si occupava di superfici immerse nello spazio euclideo si separò così un nuovo campo di ricerca, la *geometria intrinseca*.

Riemann, che di Gauss era studente a Gottinga, osservò allora che si può studiare la geometria delle superfici indipendentemente da qualunque spazio nel quale si suppongano esistere, cioè in modo intrinseco, e anzi che si possono definire e studiare le superfici senza nemmeno supporne l'esistenza in qualche spazio tridimensionale; basta infatti considerare un insieme di punti bidimensionale (nel senso intuitivo che sono necessarie due coordinate per descrivere l'intorno di un punto) sul quale misurare le distanze lungo una curva (*superfici di Riemann*).

La restrizione a due dimensioni è arbitraria, e Riemann propose subito lo studio della geometria intrinseca di spazi di dimensione qualunque (anche infinita). Il passaggio alle dimensioni più alte fu ottenuto da Riemann formalizzando per la prima volta il concetto di *tensore metrico* che rende possibile definire le distanze in un modo completamente astratto: le sue idee hanno in seguito permesso di giungere al concetto di *varietà* noto ai giorni nostri.

Una prima conferma di questa impostazione si ebbe quando il matematico italiano Eugenio Beltrami (1835-1900) utilizzò le idee di Riemann per costruire una geometria bidimensionale non euclidea.

L'enfasi che Riemann pose sul ruolo svolto dalla metrica incrementò infatti la validità delle geometrie non euclidee. La geometria iperbolica è parte della visione di Gauss, ma è stata chiaramente concepita da Nikolaj Lobacevskij e da János Bolyai.

Si deve a Beltrami la dimostrazione rigorosa del fatto che questo tipo di geometria produca un sistema coerente in cui il postulato delle parallele di Euclide non vale; la *pseudosfera* di Beltrami è un esempio di superficie a curvatura negativa descrivibile assiomaticamente mediante una geometria non euclidea, la geometria iperbolica di Lobacevskij e Bolyai.

La geometria differenziale cominciò quindi a occuparsi di proprietà locali di curve e superfici (cioè proprietà che valgono in un intorno di un punto di tali oggetti), il genere di problemi ai quali l'analisi si applica in modo naturale.

Anche le applicazioni tra superfici furono ampiamente studiate. Le origini risalgono naturalmente allo studio delle applicazioni cartografiche della Terra sulle pagine di un atlante (cartografia matematica).

Gauss aveva introdotto quella che oggi è chiamata *applicazione di Gauss*. Essa associa a ogni punto di una superficie immersa nello spazio la direzione della sua normale in quel punto. Questa direzione è descritta da un punto variabile sulla sfera unitaria, e quindi l'applicazione di Gauss "applica la superficie sulla sfera unitaria".

La curvatura di Gauss in un punto della superficie è definita allora come il limite del rapporto tra l'area dell'immagine sulla sfera unitaria di un triangolo che racchiude il punto e l'area del triangolo quando lo stesso tende a ridursi a un punto.

In un importante risultato, generalizzato in seguito da Pierre Bonnet (1819-1892), Gauss dimostrò che l'integrale della funzione curvatura esteso a un triangolo finito i cui lati sono geodetiche è legato alla somma degli angoli del triangolo (teorema di Gauss-Bonnet):

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = \pi + \int_T k \, \mathrm{d}A \tag{3}$$

ovvero la somma degli angoli interni di un triangolo α_i è uguale a π più la curvatura totale racchiusa dal triangolo T.

Una formulazione più completa del teorema di Gauss-Bonnet si ottiene dividendo una superficie compatta S dello spazio tridimensionale in un certo numero di triangoli geodetici e sommando il contributo di ciascuno di essi dato dalla (3). Ne segue che:

$$\int_S \kappa \, \mathrm{d}A = 2\pi \, \chi$$

dove il numero χ denota la *caratteristica di Eulero*[3] di S, pari a $c_0 - c_1 + c_2$, in cui c_0, c_1, c_2 rappresentano rispettivamente il numero dei vertici, dei lati e dei triangoli (le "facce"); indipendentemente dal modo in cui la superficie è divisa, questo numero è pari a $2 - 2g$, dove g è il numero dei "buchi", più propriamente detto il *genere* di S.

Questo comporta allora una stringente interazione tra le cosiddette proprietà locali e globali, tra curvatura e topologia.

[3] in topologia, la caratteristica di Eulero è un numero intero che descrive alcuni aspetti della forma di uno spazio topologico; formulata originariamente per i poliedri per la classificazione dei solidi platonici, essa si denota come: $\chi = F - S + V$, dove, rispettivamente, F è il numero di facce, S di spigoli e V di vertici di un poliedro semplice; fu successivamente ridefinita da Poincaré nell'ambito della disciplina dell'omologia (caratteristica di Eulero-Poincaré)

La curvatura di una superficie o di una curva in un punto si può determinare esaminando soltanto una piccola regione intorno al punto, ma è chiaro che questa nozione di tipo locale può influire sull'andamento della curva o della superficie nella loro globalità. Per esempio, proprio la curvatura della sfera è responsabile della sua chiusura su se stessa e quindi del fatto che la sua area sia finita.

La teoria delle applicazioni che conservano gli angoli (*rappresentazioni conformi*) fu particolarmente sviluppata in quanto Gauss, il matematico francese Joseph Liouville (1809-1882) e Riemann avevano dimostrato che essa è intimamente legata alla teoria delle funzioni complesse. In effetti, una rappresentazione conforme di una superficie è necessariamente espressa da una funzione olomorfa.

Vi fu anche un notevole interesse nello studio delle applicazioni di una superficie in un'altra che trasformano un tipo di curve in un altro: per esempio, le applicazioni di una superficie su un piano che trasformano geodetiche (le curve di minima lunghezza tra due punti) in rette.

I problemi di carattere globale cominciarono a essere formulati intorno al 1900 seguendo l'impostazione delineata da Felix Christian Klein (1849-1925) nel Programma di Erlangen del 1872.

Da questo punto di vista la geometria è lo studio di uno spazio sul quale agisce un gruppo in modo che certe proprietà siano conservate. Per esempio, nell'usuale geometria euclidea piana lo spazio è il piano e il gruppo è il gruppo delle isometrie (trasformazioni che conservano le lunghezze). Oltre alla lunghezza le isometrie conservano le rette, gli angoli e di fatto la grandezza e la forma delle figure.

Un secondo esempio è quello della geometria proiettiva. Si può estendere il piano aggiungendo una retta e ottenere il gruppo delle proiezioni di questo piano "proiettivo" in sé. Tale gruppo conserva pochissime proprietà delle figure; tra queste, l'appartenenza di un punto a una retta o la proprietà che due rette si incontrano in un punto.

Klein introdusse questa filosofia per spiegare in che modo geometrie diverse possano essere collegate. Il gruppo delle isometrie euclidee è un sottogruppo del gruppo delle trasformazioni proiettive, e lo spazio proiettivo un sottospazio dello spazio euclideo. Klein attribuiva molta importanza a questa gerarchia delle geometrie conosciute; la sua crescente influenza come organizzatore della matematica ne agevolò la diffusione.

Altri matematici, quali il norvegese Sophus Lie (1842-1899) e il francese Jules-Henri Poincaré (1854-1912), trovarono ancora importanti applicazioni del concetto di gruppo di trasformazioni.

In particolare, Lie fornì gli elementi essenziali della classificazione dei gruppi delle trasformazioni infinitesime. Da questo straordinario risultato, poi ottenuto indipendentemente da Wilhelm Karl Killing (1847-1923), per ottenere il quale fu assistito dagli studenti di Klein e di Poincaré che venivano mandati ogni tanto a studiare da lui affinché i risultati ottenuti fossero completati, si aprì un nuovo campo di ricerca.

Allo stesso tempo si dimostrava che i gruppi che a mano a mano venivano scoperti erano, con poche eccezioni, esattamente quelli già noti.

Alla morte di Lie, i suoi lavori erano essenzialmente completi, ma scritti in modo così oscuro che pochi se ne occuparono.

La teoria delle equazioni differenziali alle derivate parziali e delle trasformazioni di contatto (equazioni di Hamilton) fu, di questi lavori, la parte più facilmente accettata dell'opera di Lie: essa era infatti quella che corrispondeva più da vicino agli interessi di Jean-Gaston Darboux (1842-1917), una figura molto importante a Parigi.

Chi si interessò attivamente alle idee di Lie sui gruppi di trasformazioni fu Élie Cartan (1869-1951) il quale diede forma rigorosa a quelle idee correggendo alcuni errori di Lie e di Killing. Tuttavia anche lui passò poi allo studio dei sistemi di equazioni differenziali, che si avviavano a divenire una parte importante della più vasta analisi tensoriale.

Nel 1900 lo studio della geometria differenziale fu sviluppato più lungo linee tradizionali che non secondo l'aspetto intrinseco.

Darboux, figura di punta della geometria, aveva scritto molto su problemi riguardanti le superfici, e anche insegnato e tenuto conferenze sull'argomento. I suoi manuali divennero i testi di riferimento per i matematici che volessero conoscere i risultati del XIX secolo e i problemi attuali. Darboux si era occupato a lungo, tra l'altro, di superfici minime. Queste comprendono le superfici di area minima generate da una curva dello spazio e si possono pensare simili a quelle che formano le lamine di sapone. Ma può anche trattarsi di superfici infinite senza bordo, ciascuna componente delle quali è di area minima. In termini geometrici, una superficie è "minima" se, e soltanto se, la curvatura media è nulla.

L'intuizione di Riemann e, indipendentemente, di Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) fu di capire che questa proprietà implica che l'applicazione di Gauss di una superficie minima è *meromorfa*.

Ciò permetteva ai geometri differenziali di far uso di tecniche della teoria delle funzioni complesse, e Weierstrass dimostrò, utilizzando precedenti risultati di Alfred Enneper, come definire rappresentazioni parametriche di queste superfici valide su tutto il loro insieme di definizione.

Un'impostazione che lasciava aperto il problema di trovare la corretta rappresentazione di una data curva e che, inoltre, non spiegava le proprietà globali di una superficie, come la questione di sapere se essa interseca o no sé stessa lungo altre curve.

Darboux dette molti esempi di superfici minime, e riassunse una copiosa e spesso eterogenea letteratura su questo argomento, dimostrando così che esistono superfici minime la cui equazione è algebrica, superfici minime rigate, superfici minime con una data curva piana come geodetica, superfici minime non orientabili (la superficie di Henneberg), e così via.

Il matematico Luigi Bianchi (1856-1928) fece opera analoga per il pubblico italiano.

I gruppi di trasformazioni e i loro corrispettivi infinitesimi, studiati intensamente da Lie e da Killing, furono applicati a problemi geometrici da Luigi Bianchi e da Gaston Darboux - autori, rispettivamente, di *Lezioni di geometria differenziale*[4] e *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, che sono considerati due testi chiave. All'epoca della loro pubblicazione, alla fine dell'Ottocento, sono stati compiuti molti sforzi per cercare di mettere in relazione le strutture geometriche più rigide definite dai gruppi di Lie e il tipico apparato riemanniano in cui le strutture locali variano da punto a punto.

[4]è proprio in quest'opera del 1894 di Luigi Bianchi che compare per la prima volta il termine di *geometria differenziale*

Però con Darboux lo studio della geometria differenziale rimase ristretto allo studio delle curve e delle superfici dello spazio euclideo tridimensionale.

Uno dei pochi risultati di geometria globale del XIX secolo ha origine nella teoria delle funzioni complesse. Nei primi anni Ottanta, Poincaré e Klein avanzarono la congettura che ogni superficie di Riemann (che si può supporre di curvatura costante) è l'insieme quoziente del piano complesso, della sfera di Riemann o del disco non euclideo rispetto a un gruppo discreto di trasformazioni.

Nel 1883 Poincaré dette una dimostrazione, incompleta, di questo fatto; esso fu poi dimostrato rigorosamente nel 1907 dallo stesso Poincaré e, indipendentemente, dal tedesco Paul Koebe (1882-1945). Sono state poi trovate dimostrazioni più semplici di questo risultato, che prende il nome di "teorema di uniformizzazione".

Dalla teoria di Gauss delle superfici segue che la geometria delle superfici è intrinseca: il teorema di uniformizzazione implica che la geometria intrinseca è in quasi tutti i casi non euclidea. Pertanto, nell'intorno di un suo qualsiasi punto una superficie di Riemann a curvatura costante è simile localmente a una porzione di sfera, a una porzione del piano euclideo o di uno spazio non euclideo bidimensionale.

3 Geometria intrinseca: 1900-1917

Alla fine dell'Ottocento lo studio della geometria differenziale intrinseca, in due o più dimensioni, non era andato molto oltre il punto in cui l'aveva portato Riemann, anche perché quest'ultimo non aveva lasciato alcuna trattazione sistematica della materia.

Personalità di spicco in questo campo erano due matematici italiani Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925) e Tullio Levi-Civita (1873-1941). Basandosi su lavori precedenti di Lipschitz, Christoffel e altri, essi scrissero una serie di importanti articoli, tra cui spiccano la memoria di Ricci-Curbastro del 1895 e il lavoro congiunto del 1900.

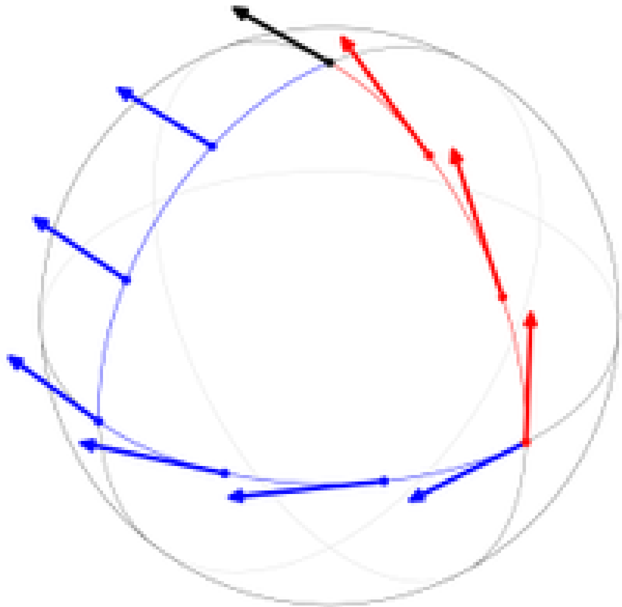
Essi svilupparono una teoria per misurare le lunghezze in diversi sistemi di coordinate e per definire in che modo due vettori in punti diversi di una superficie si possano considerare paralleli. Nel piano vi è una definizione naturale, ma su ogni altra superficie la definizione fa necessariamente intervenire la nozione di *trasporto parallelo* di vettori lungo una curva.

Questa può funzionare in molti modi, secondo teorie che erano dette del "parallelismo a distanza" e che ora sono chiamate delle **connessioni**.

Altri matematici si sono occupati di come definire concetti intrinseci in diversi sistemi di coordinate, dando origine a una fiorente teoria, anche se tecnicamente molto complessa, di quelli che venivano detti gli *invarianti differenziali.*

L'idea originale di Levi-Civita fu quella di definire il trasporto parallelo di un vettore $\mathbf{u}$ tangente a una superficie in un punto P nel modo seguente. Egli suppone che la superficie sia immersa nello spazio euclideo tridimensionale; il vettore $\mathbf{u}$ è dunque parallelo a un unico vettore $\mathbf{v}$ applicato in un altro punto P' della superficie; quest'ultimo ha una componente $\mathbf{u}'$ tangente alla superficie, e un'altra $\mathbf{u}''$ perpendicolare alla prima, per cui $\mathbf{v} = \mathbf{u}' + \mathbf{u}''$.

Levi-Civita definisce come vettore parallelo a $\mathbf{u}$ il vettore $\mathbf{u}'$ tangente in P'. Questa definizione è aperta alle ovvie obiezioni che non è intrinseca e che è priva di senso quando il vettore $\mathbf{u}'$ è nullo. Ma se si richiede che P' sia un punto a distanza infinitesima da P, una nozione che si può rendere precisa, allora la definizione è intrinseca e il vettore parallelo è determinato dalla metrica definita sulla superficie.



Hermann Weyl (1885-1955) definì la costruzione di Levi-Civita su una varietà n-dimensionale in uno spazio euclideo una *connessione euclidea*. Essa permette di parlare di determinazione unica per l'angolo tra vettori applicati in punti vicini.

Nel libro del 1923, Levi-Civita studia il problema del parallelismo a distanza nel modo seguente. Dato un vettore unitario uscente da un punto P di una superficie, egli dimostra dapprima come definire il vettore unitario uscente da un altro punto P', sviluppando la superficie su un piano lungo una curva da P a P'.

Questa definizione dipende in generale dalla scelta della curva. L'angolo tra due vettori applicati in P è invece indipendente.

Se la curva scelta è una geodetica, lo sviluppo della superficie determina una retta nel piano, e i corrispondenti vettori unitari nel piano sono paralleli.

Le tangenti a una geodetica sono quindi tutte tra loro parallele (rispetto alla geodetica stessa). Considerando la direzione istantanea del moto, ossia il caso in cui P e P' sono a distanza infinitesima, Levi-Civita dà una definizione di curve parallele in termini di differenziali. Mostra allora che essendo le geodetiche definite intrinsecamente, il parallelismo lungo una geodetica è una nozione intrinseca.

Muovendo da queste considerazioni egli derivò una famiglia di equazioni differenziali che determinano il parallelismo. In tali equazioni intervengono i cosiddetti simboli di Christoffel.

Levi-Civita generalizza anche queste idee a una superficie a n dimensioni, dando equazioni differenziali per le geodetiche e definendo la derivata covariante in questo ambito più generale.

4 Il periodo 1918-1939

Tre avvenimenti significativi incideranno in modo decisivo sullo studio della geometria differenziale dopo il 1918. Si tratta della formalizzazione del concetto di varietà, della teoria della relatività generale di Einstein, e, infine, dell'accettazione, in una forma rielaborata, della teoria di Lie dei gruppi di trasformazioni.

4.1 Varietà e fibrati vettoriali

È difficile ricostruire un percorso storico relativo alla definizione del concetto di varietà: molti sono infatti gli esempi che ne hanno preceduto una formulazione esplicita.

Un'idea semplice e intuitiva è quella di spazio composto da parti che si sovrappongono parzialmente, ciascuna equivalente a una porzione di spazio euclideo e aventi tutte la stessa dimensione; tale spazio non è necessariamente euclideo: può trattarsi, per esempio, di una sfera oppure di un toro.

La sfera e il toro sono infatti esempi semplici di varietà compatte di dimensione 2. Il termine "compatto" indica che sono limitate in estensione e senza bordo, mentre il termine "varietà" indica che le regioni della superficie possono essere dotate di un sistema di coordinate e trattate come parti di un piano.

I punti di una varietà n-dimensionale possono essere rappresentati da diversi sistemi di coordinate equivalenti; dati due tali sistemi, $(x^1, \cdots, x^n)$ e $(y^1, \cdots, y^n)$, si assume che esistano n equazioni del tipo:

$$x^i = x^i(y^1, \cdots, y^n), \qquad 1 \leq i \leq n$$

che esprimono un sistema di coordinate in funzione dell'altro.

In questo contesto viene dato un senso a quelli che in fisica, anche prima dello sviluppo del calcolo, venivano detti gli "infinitesimi". Per esempio, l'espressione $\mathrm{d}x^i$, che prende il nome di *covettore* o di *1-forma*, rappresenta la velocità di cambiamento dell'i-esima coordinata x^i in tutti i punti possibili e in tutte le direzioni possibili e varia al variare dei sistemi di coordinate in accordo con la "regola della catena":

$$\mathrm{d}x^i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\,\mathrm{d}y^j$$

Dunque una n-varietà, in coordinate, può essere definita come insieme di soluzioni di un sistema di equazioni, ma se ne possono specificare le componenti anche mediante disequazioni (per esempio, tutti i punti dello spazio tridimensionale $\mathbb{R}^3$ che hanno la terza coordinata maggiore di zero).

Viceversa, partendo da un insieme di porzioni dello spazio euclideo e precisando il modo in cui devono sovrapporsi, si ottiene uno spazio assemblando i vari pezzi.

Una definizione più rigorosa e più ampia si ottiene considerando una varietà come uno spazio topologico ricoperto da insiemi che si intersecano, ciascuno dei quali omeomorfo a un aperto di un fissato spazio euclideo.

Siano:

$$\phi \ : \ U \to \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \qquad \text{e} \qquad \phi' \ : \ U' \to \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$$

due tali omeomorfismi definiti su due insiemi U e U' che si intersecano.

Due opportune restrizioni delle ϕ e ϕ' e le loro inverse danno applicazioni del tipo $\phi^{-1} \circ \phi$ (*funzioni di transizione*) che permettono di affermare che la varietà è continua, differenziabile o analitica se lo è ciascuna applicazione definita come sopra.

Inoltre, per evitare esempi patologici che secondo nessuna definizione sarebbero varietà, sono richiesti requisiti più tecnici.

Per gli studi di geometria differenziale si suppone che le funzioni di transizione ammettano derivate parziali di ordine qualsiasi, e in questo caso la varietà si dice *liscia*.

Le varietà lisce sono gli oggetti a cui vengono estesi in modo naturale l'usuale calcolo differenziale e integrale: l'operazione di differenziazione viene usata per definire lo spazio tangente in un punto arbitrario e la teoria delle *forme differenziali* permette di calcolare gli integrali sull'intera varietà.

Una varietà liscia si dice *orientabile* se si possono scegliere tutti i sistemi di coordinate in modo tale che il determinante di ogni matrice (jacobiana) $(\partial x^i / \partial y^j)$ sia positivo; anche se l'orientamento è una nozione di tipo topologico, colpisce il fatto che la si possa definire così semplicemente in termini di differenziazione.

È facile considerare varietà che non si riescono a visualizzare nello spazio ordinario.

Tutte le rette che passano attraverso un punto fisso O nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, di dimensione 3, possono essere pensate come punti di una varietà di dimensione 2, che prende il nome di *piano proiettivo reale* e che si indica come $\mathbb{RP}^2$; è chiaro che ogni retta di questo tipo incontra una sfera S^2 con centro in O in due punti antipodali, quindi $\mathbb{RP}^2$ si può ottenere da S^2 "identificando" punti antipodali; allora ogni regione di S^2 che non contenga una coppia di punti antipodali costituisce una carta di $\mathbb{RP}^2$. A differenza della sfera S^2, lo spazio proiettivo $\mathbb{RP}^2$ non è orientabile.

Una varietà più complicata è data dall'insieme E di tutte le rette di $\mathbb{R}^3$. Più precisamente, si può ottenere una retta generica k dalla traslazione di una retta l a essa parallela e passante per O lungo una direzione perpendicolare a l, ed è pertanto individuata dalla coppia (l, Q), dove Q è un punto del piano ortogonale a l.

Tale piano può essere visto come il piano tangente a $\mathbb{RP}^2$ in l, ed E risulta essere l'insieme di tutti i punti di questi piani tangenti, al variare di l in $\mathbb{RP}^2$; E prende il nome di *fibrato tangente* di $\mathbb{RP}^2$ ed è una varietà di dimensione 4.

Una nozione di varietà, intuitiva ma utile in pratica, fu enunciata con chiarezza da Poincaré negli straordinari, innovativi lavori di topologia degli anni Novanta del XIX secolo. L'idea fu poi ripresa dai topologi, i quali, per renderla praticabile, la interpretarono nel senso che una varietà ammette una triangolazione, si può cioè suddividere in simplessi (i simplessi generalizzano in dimensione superiore i triangoli e i tetraedri).

Dal punto di vista puramente topologico, infatti, una n-varietà può essere sempre costruita in vari modi mediante una collezione di *celle* di dimensioni diverse.

Per esempio, un "ipercubo" di $\mathbb{R}^4$:

$$C := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ \text{ tale che } |x_i| \leq 1, \quad i = 1, 2, 3, 4\}$$

può essere visto come una varietà topologica di dimensione 3 (si richiede solo che le funzioni di transizione siano continue) con 16 vertici (dimensione 0), 32 spigoli (dimensione 1), 24 facce (dimensione 2) e 8 celle di dimensione 3 (facce tridimensionali cubiche).

Allora la definizione di caratteristica di Eulero si può estendere ponendo:

$$\chi = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p c_p$$

dove c_p è il numero delle celle di dimensione p; quindi nel caso dell'ipercubo suddetto si ha: $c_0 = 16, c_1 = 32, c_2 = 24, c_3 = 8$, e pertanto $\chi(C) = 0$, il che è in realtà vero per ogni varietà orientata di dimensione dispari.

Infatti la caratteristica di Eulero χ risulta essere anche uguale a $\sum_{p=0}^{n}(-1)^p b_p$, dove i b_p sono i numeri di Betti - così chiamati da Poincaré in onore del matematico italiano Enrico Betti - che, a differenza dei c_p, dipendono solo dalla topologia della varietà.

Un passo avanti decisivo nella formalizzazione di una varietà fu fatto da Weyl con la sua definizione di superficie, data per poter trattare in modo rigoroso le superfici di Riemann.

Egli considerava una superficie come una varietà bidimensionale, affermando esplicitamente che una superficie di Riemann non è una superficie dello spazio euclideo, bensì un insieme di punti definito specificando quali di essi si trovano in un intorno di ogni dato punto.

Per ogni intorno viene assegnata un'applicazione su un disco aperto del piano, che manda gli intorni in esso contenuti in dischi contenuti nel disco immagine. Un punto è contenuto all'interno di ogni suo intorno, una condizione che esclude i bordi.

Il libro di Weyl influì notevolmente sull'adozione dei moderni strumenti di topologia algebrica nello studio delle superfici di Riemann.

Il risultato di tutte le ricerche fatte in quegli anni indica che è possibile studiare oggetti che non potrebbero essere descritti globalmente per mezzo di un unico sistema di coordinate grazie a sistemi di coordinate locali.

Presentiamo di seguito uno degli esempi più semplici di fibrato, un concetto che ha un ruolo fondamentale in gran parte delle ricerche attuali.

La sfera e il piano euclideo sono modelli di superfici con curvatura gaussiana costante. Ci sono modi diversi di interpretare il concetto di curvatura costante in dimensioni superiori e ciò ha fatto scaturire un'intera serie di problemi interessanti. Innanzitutto si potrebbe richiedere che il tensore di curvatura non cambi da punto a punto; tale proprietà si verificherebbe, per esempio, se per ogni coppia di punti P e Q sulla varietà esistesse una trasformazione che mandi P in Q e che conservi le distanze, vale a dire un'*isometria*.

Nell'ambito della geometria riemanniana le varietà che ammettono tali isometrie prendono il nome di *spazi omogenei* e molti risultati sono più facili da capire nel caso omogeneo; per esempio, vi sono varietà che pur non essendo omogenee sono costruite in modo semplice a partire dagli spazi omogenei; è stata inoltre sviluppata una teoria molto ricca sullo spazio totale dei **fibrati vettoriali** su spazi omogenei.

Uno degli spazi omogenei più facili da descrivere è la sfera ordinaria S^2, luogo dei punti dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, di dimensione 3, aventi distanza unitaria dall'origine. Ogni rotazione di $\mathbb{R}^3$ attorno all'origine è un'isometria che può far corrispondere due punti qualsiasi della sfera. Siano P_1, P_2, P_3 i punti della sfera S^2 rispettivamente di coordinate $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$, posti sugli assi cartesiani.

Ogni rotazione può essere rappresentata da una matrice quadrata di ordine 3:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

in cui le righe esprimono nell'ordine le coordinate dei punti immagine, mediante A, di P_1, P_2, P_3; per esempio $(a_{31}, a_{32}, a_{33}) = (0,0,1)\,A$ in accordo con la regola del prodotto di matrici.

Ne segue che le righe di A formano una base ortonormale di vettori per $\mathbb{R}^3$ (vale a dire sono vettori unitari a due a due ortogonali) e il determinante di A è uguale a 1.

L'insieme delle rotazioni di $\mathbb{R}^3$ attorno all'origine, che normalmente si indica con $SO(3)$, è un gruppo di Lie, ossia ha la struttura di varietà liscia compatibile con la legge del prodotto di due matrici, dove per "prodotto" AB di due rotazioni si intende la rotazione in cui A è seguita da B (gruppo di trasformazioni).

Le rotazioni intorno all'asse passante per l'origine e per il "polo nord" P_3 sono del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e formano un sottogruppo $H < SO(3)$, che rappresenta quindi il gruppo delle rotazioni (con angolo θ variabile) del piano equatoriale.

Data una matrice $B \in SO(3)$, le rotazioni aventi la stessa terza riga di B sono esattamente quelle della forma AB con A in H; queste formano ciò che si chiama un "laterale" e che si scrive in modo naturale come HB. Tale situazione si descrive schematicamente mediante il seguente diagramma:

$$SO(3) \xrightarrow{\pi} S^2$$

in cui π indica l'applicazione che associa a ogni matrice B la sua terza riga.

Ogni laterale è quindi la controimmagine $\pi^{-1}(Q)$ di un punto Q qualsiasi della sfera (la notazione $\pi^{-1}(Q)$ indica tutte le matrici B che π manda in Q) e coincide con una circonferenza.
Infatti, dato $Q \in S^2$, una matrice B di $\pi^{-1}(Q)$ è determinata dalle sue prime due righe, che rappresentano le immagini di P_1, P_2 mediante B. Se identifichiamo P_1, P_2 con i vettori tangenti alla sfera in P_3 otteniamo che ogni matrice B in $SO(3)$ è data semplicemente da una coppia ortonormale di vettori tangenti a S^2 nel punto $\pi(B)$.

L'applicazione π permette di rappresentare $SO(3)$ come un fibrato sulla sfera le cui fibre sono le controimmagini $\pi^{-1}(Q)$ al variare di Q.

Più precisamente, un fibrato vettoriale è determinato da tre varietà E, F e M e da una applicazione suriettiva $\pi : E \to M$ definita in modo che ogni punto Q di M appartenga a una regione U tale che $\pi^{-1}(U)$ si possa identificare con il prodotto

$U \times F$; in altri termini, lo *spazio totale* E è localmente il prodotto di F (la *fibra*) con la *base* M. Allora il diagramma precedente prende il nome di *fibrato principale* in quanto ogni fibra può essere vista come la copia di un gruppo (in questo caso H).

Un altro esempio di fibrato, ma di tipo diverso dal precedente è il fibrato tangente a S^2 rappresentato dal seguente diagramma :

$$TS^2 \xrightarrow{\pi} S^2$$

in cui la fibra $\pi^{-1}(Q)$ è lo spazio tangente a S^2 in Q o, in modo equivalente, il complemento ortogonale $Q^{\perp}$ di Q in $\mathbb{R}^3$. Si tratta in questo caso di un fibrato vettoriale di rango 2, poiché la fibra F è uno spazio vettoriale di dimensione 2 (il piano tangente a S^2 in Q).

I due fibrati nei diagrammi precedenti sono fortemente collegati, dato che ogni fibra del fibrato principale è costituita dalle basi ortonormali della fibra corrispondente del fibrato vettoriale. Più generalmente, su ogni varietà liscia M può essere definito in modo astratto lo spazio tangente in ogni punto e quindi il fibrato tangente TM, mentre la scelta di un fibrato principale opportuno dipende dalla struttura che si sta considerando.

Il gruppo $SO(3)$ appartiene a una delle tre famiglie di gruppi di Lie compatti, di tipo particolare e di notevole importanza, denominate $SO(n)$, $SU(n)$ e $S_p(n)$. Infatti, ciascuna di queste è un insieme di matrici che verificano ben determinate equazioni e ha la struttura di varietà liscia di dimensione $(n^2-n)/2, n^2-1, 2n^2+n$, rispettivamente.

4.2 Relatività generale

La teoria della relatività generale è stata costruita da Albert Einstein (1879 - 1955) intorno a un'approfondita analisi dell'equivalenza tra accelerazione e gravitazione.

Einstein impiegò quasi dieci anni (dal 1910 al 1917) per trovare la giusta formulazione matematica, scontando alcune false partenze.

Fu aiutato da Marcel Grossmann (1878-1936) matematico e suo amico, e fu solo allora che cominciò ad apprezzare la potenza e l'eleganza della matematica. Grossman lo introdusse ai lavori di Ricci-Curbastro e di Levi-Civita, e fu così che Einstein fu portato a esprimere le proprie idee sulla gravità nel linguaggio della curvatura di una varietà quadridimensionale.

Mentre la curvatura di una varietà bidimensionale, o superficie, si può esprimere con un solo numero, variabile da punto a punto, la curvatura di una varietà quadridimensionale si esprime con una matrice simmetrica di sei variabili. In un cambiamento di coordinate queste variabili si comportano come un tensore, un oggetto della teoria degli invarianti differenziali e che rientrava quindi negli interessi della scuola italiana.

È la combinazione di difficoltà tecniche e di potenza propria della geometria intrinseca riemanniana che doveva colpire Einstein.

Le previsioni di Einstein fecero grande impressione. I matematici furono sorpresi da quanto Einstein aveva realizzato in un campo di loro pertinenza.

Anzi, come Weyl sottolineò in una conferenza del 1949, se la teoria della relatività speciale ebbe un impatto maggiore sui fisici che sui matematici, quella della relatività generale provocò piuttosto la reazione inversa.

Alcuni cominciarono quasi subito a cercare di dare un senso a quanto era stato fatto, e a generalizzarlo. Le figure di spicco impegnate in questo compito furono Élie Cartan in Francia e Weyl stesso. Quest'ultimo cominciò presto a scrivere una serie di lavori sull'uso della geometria differenziale nella fisica moderna, il più noto dei quali è il volume *Raum-Zeit-Materie* (Spazio-tempo-materia, 1918) che doveva giungere alla quinta edizione.

Come tutti coloro che si avventurano nella fisica matematica, Weyl dovette occuparsi dell'espressione matematica di quantità fisiche. In fisica non ci si preoccupa soltanto della posizione degli oggetti, ma anche di altre loro proprietà come il momento, la carica o la fase. Le misure devono quindi specificare non solo le quattro coordinate spazio-temporali di un oggetto puntiforme, ma anche altre quantità numeriche pertinenti al tipo di oggetto in considerazione.

Un diverso sistema di coordinate dà luogo a numeri diversi, legati ai primi in un modo particolare. Se le quantità, esclusa la posizione, sono di natura vettoriale, è utile pensare allo spazio di tutte le possibili misure come a uno spazio quadridimensionale (delle posizioni) a ogni punto del quale è associato un opportuno spazio vettoriale (in seguito un oggetto di questo tipo verrà chiamato *fibrato vettoriale*).

Se le altre grandezze non sono vettoriali (come, per es., la fase, che è descritta da un numero complesso di modulo 1), allora si ricorre a fibrati di altro genere.

L'idea di fibrato doveva però farsi strada lentamente: la prima formalizzazione utilizzabile è degli ultimi anni Quaranta del Novecento.

La terza edizione del *Raum-Zeit-Materie* di Weyl (1919) contiene il tentativo di unificare elettromagnetismo e forze gravitazionali della Natura (le sole conosciute all'epoca). Tentativo generalmente considerato fallimentare (ma vedremo più avanti che Weyl vi ritornò sopra con grande successo).

Weyl fu spinto allora a considerare quello che chiamò il "problema dello spazio" (*Raumproblem*), ossia trovare una caratterizzazione naturale dello spazio fisico. Egli si allontanò così dalla geometria differenziale come l'aveva concepita in passato, indirizzandosi verso un argomento destinato a un ruolo importante nel futuro della geometria differenziale.

4.3 Gruppi di Lie

In una memoria sul problema dello spazio (1922) Weyl passa in rassegna i vari modi in cui esso era stato trattato in precedenza.

Prima c'erano gli assiomi di Euclide e quelli di Hilbert, ora c'è la descrizione cartesiana (come la chiama lo stesso Weyl) che fa uso di coordinate e di una metrica indefinita, la metrica di Lorentz-Einstein della relatività speciale.

C'è poi l'impostazione della geometria differenziale basata sulla teoria di Riemann nella revisione di Levi-Civita, con la sua teoria del trasporto parallelo infinitesimo.

È naturale che tutto ciò impegnasse a fondo Weyl. Da questo complesso di idee egli isolò la necessità di caratterizzare i gruppi ortogonali, cioè i gruppi che conservano una forma quadratica (come la $x^2+y^2+z^2-t^2$). E ciò andava fatto in modo che risultasse plausibile che i gruppi fossero naturalmente quelli che determinano la geometria locale dello spazio.

Nel 1926 Weyl era pronto per affrontare quella che sarà una straordinaria analisi dei *gruppi di Lie semisemplici*, chiarendo per la prima volta la vera natura dei gruppi di Lie, diversa da quella delle algebre di Lie all'epoca molto più note.

Egli considerò i gruppi infinitesimali di Lie e di Cartan (a rigore non si tratta di gruppi ma piuttosto di algebre), e determinò i gruppi a essi associati: le trasformazioni finite generate dalle trasformazioni infinitesimali studiate da Lie.

Su queste basi rigorose fu possibile creare per la prima volta una teoria dei gruppi di trasformazioni che interessa la fisica, la geometria e anche la chimica. Weyl fece tutto ciò rielaborando la teoria dei pesi di Cartan.

Cartan aveva notato che le rappresentazioni di un gruppo o di un'algebra di Lie dipendono da certe sottoalgebre massimali $\mathbf{h}$ dell'algebra di Lie, che in suo onore si chiamano ora sottoalgebre di Cartan; un esempio tipico è quello delle matrici diagonali.

Se $\tilde{n}(\mathbf{h})$ è una rappresentazione di una tale sottoalgebra, egli considera gli autovettori elementi di $\tilde{n}(\mathbf{h})$. Gli autovalori corrispondenti sono i pesi; si tratta di forme lineari definite su $\mathbf{h}$. Cartan dimostra che, viceversa, esiste un ordinamento dei pesi rispetto al quale un insieme massimale di pesi determina la rappresentazione della sottoalgebra.

La teoria di Cartan supponeva però che le rappresentazioni dei gruppi e delle algebre in questione fossero completamente riducibili. Questo fatto, a priori non evidente, fu dimostrato per la prima volta da Weyl.

Dalla teoria dei prodotti di rappresentazioni dovuta ad Alfred Young (1873-1940) seguiva allora, con considerazioni standard, che era possibile una teoria completa delle rappresentazioni dei gruppi di Lie semisemplici.

Con l'avvento della nuova meccanica quantistica questo lavoro doveva acquisire ulteriore importanza, anche se la complessa forma algebrica elaborata da Weyl in *The classical groups: their invariants and representations* (1939) sarebbe stata considerata proibitiva da autori successivi e spesso rielaborata.

5 Connessioni

Cartan cominciò a interessarsi alla teoria della relatività generale nel 1922 quando, su invito di Paul Langevin (1872-1946), Einstein tenne un ciclo di conferenze al Collège de France.

Si incontrarono a casa di Jacques-Salomon Hadamard (1865-1963) dove discussero della teoria del parallelismo a distanza, e Cartan gli fece l'esempio della sfera, in cui due vettori sono considerati paralleli se formano lo stesso angolo con i meridiani che passano per i loro punti di applicazione (pubblicò questo esempio nel 1924).

Con tale definizione le geodetiche (definite in questo caso come le curve lungo le quali non vi è accelerazione) sono curve lossodromiche, cioè le curve che intersecano i meridiani secondo un angolo costante. Egli sosteneva che il parallelismo a distanza è un caso particolare di una nozione più generale, quella di connessione euclidea. Una connessione permette di definire curvatura e torsione di una varietà; nel caso delle connessioni di Levi-Civita la torsione è nulla, tuttavia se la connessione è definita mediante un parallelismo a distanza la curvatura, e non la torsione, è nulla.

Cartan discusse queste idee in due serie di conferenze a Toronto nel 1924 e a Berna nel 1927.

Molti matematici venivano intanto attratti dalle teorie di Einstein. Tra questi l'olandese Jan Arnoldus Schouten (1883-1971), che in un lavoro pubblicato nel 1926 nei "Rendiconti del Circolo matematico di Palermo" osservò come nel XIX secolo fossero state stabilite e organizzate alla maniera di Klein tre teorie della geometria elementare, e cioè le teorie euclidea, affine e proiettiva.

Nessuna di queste poteva evidentemente essere applicata così com'era alla nuova geometria differenziale. Poche varietà hanno infatti simmetrie e ammettono gruppi di trasformazioni diversi dal gruppo identico.

Egli cercò quindi di colmare questa lacuna. Il problema era trovare un modo in cui il trasporto parallelo potesse essere considerato nel quadro della geometria proiettiva. Tuttavia, come avrebbe rilevato Cartan nella recensione del lavoro di Schouten, è la nozione stessa di parallelismo che non ha senso nella geometria proiettiva.

La soluzione di Schouten fu di riprendere alcune idee di Julius König (1849-1913), secondo le quali una connessione stabilisce una relazione lineare tra spazi vettoriali (non necessariamente spazi tangenti) associati a una varietà in due punti a distanza infinitesima.

Il punto di vista di Cartan fu invece di considerare il trasporto parallelo non come una nozione fondamentale, bensì semplicemente come un modo di applicare due porzioni vicine della varietà su uno stesso spazio euclideo. Egli supponeva dati una varietà e uno spazio (nel senso di Klein) associato a ogni suo punto. Questi spazi hanno tutti lo stesso gruppo di trasformazioni G: un confronto tra loro definisce una varietà con gruppo fondamentale G (in termini moderni, G è il *gruppo di olonomia*).

In questa formulazione, uno spazio è dotato di una connessione o di un'altra a seconda del gruppo di trasformazioni di Klein scelto. Una connessione proiettiva, per esempio, viene descritta da Cartan in termini di spazi proiettivi associati a ogni punto: un confronto tra punti vicini dà luogo a una trasformazione proiettiva da uno spazio all'altro.

Come hanno osservato Chern e Claude Chevalley (1909-1984) ciò si riduce a specificare una trasformazione di un'opportuna algebra di Lie. Unendo le idee di König e di Cartan, Schouten riuscì a presentare la geometria differenziale, secondo Klein, come lo studio delle proprietà che si conservano in una connessione, vista come una trasformazione dello spazio associato a ogni punto della varietà.

Nel maggio 1929, quando Einstein aveva appena compiuto cinquanta anni e veniva pubblicamente acclamato, Cartan, che dal canto suo ne aveva appena compiuti sessanta, scrisse a Einstein. Gli faceva notare che le ricerche nelle quali lui, Einstein, era allora impegnato sembravano in realtà fondate su un caso particolare di parallelismo a distanza e gli ricordava che avevano discusso insieme di queste idee a Parigi.

Ne seguì una corrispondenza che proseguì per i tre anni successivi, finché Einstein, ancora non in grado di elaborare la teoria unificata del campo gravitazionale, si allontanò dalle teorie del parallelismo a distanza per indirizzarsi verso altre impostazioni, elaborate con il suo assistente Walther Mayer.

Einstein convenne che le sue ricerche erano incluse, dal punto di vista matematico, in quelle di Cartan, confessando però di non aver capito molto della conversazione avuta a Parigi e chiedendo ulteriori spiegazioni. Egli affermò che soltanto recentemente si era reso conto di come la teoria del parallelismo a distanza potesse permettergli di derivare le equazioni del campo gravitazionale.

A conclusione della vicenda Cartan, su suggerimento di Einstein, scrisse una breve rassegna storica sul parallelismo a distanza, che fu pubblicata nel 1930 nei "Mathematische Annalen", in appendice a un articolo di Einstein.

In questa rassegna Cartan fondava l'idea del parallelismo a distanza sulla teoria delle forme differenziali pfaffiane. Due vettori infinitesimi su una varietà di dimensione n si dicono paralleli se e solo se, ogni elemento di una base di 1-forme ha lo stesso valore per entrambi. Una definizione, scriveva, legata a quella di Roland Weitzenböck di derivata covariante pubblicata nel 1921 e nel 1923, mentre i sistemi pfaffiani erano al centro della memoria fondamentale di Ricci-Curbastro del 1895. L'idea fu però resa esplicita per la prima volta nella memoria del 1923 dello stesso Cartan, nella quale una varietà è costituita da infinite piccole porzioni di spazio, ciascuna con una geometria nel senso di Klein (euclidea, affine, proiettiva, ecc.) e con una legge per far combaciare parti contigue. Questa legge si riduce a specificare una connessione, che può quindi essere di un qualunque tipo di Klein.

Si può trasportare, almeno intuitivamente, un vettore lungo una curva chiusa infinitesima avente per base un punto P. Se il vettore ritorna al punto di partenza con la stessa direzione, Cartan definisce nulla la curvatura della varietà in P.

Se la curvatura è ovunque nulla si può parlare di parallelismo tra due vettori applicati in punti diversi (e ora a distanza finita), in quanto, come egli dimostra, il trasporto parallelo di un vettore non dipende dal cammino scelto. Si può anche definire la nozione di torsione. Cartan considera lo spostamento parallelo di un vettore lungo un cammino chiuso infinitesimo di base un punto P, ed esprime il vettore finale come trasformato di quello iniziale in una trasformazione affine. La parte vettoriale di questa trasformazione corrisponde alla torsione, quella matriciale alla curvatura. Cartan osserva che la prima teoria della relatività generale di Einstein richiedeva una varietà senza torsione, mentre la nuova una varietà senza curvatura.

I primi lavori di Cartan sulle connessioni non furono subito ripresi dagli altri ricercatori. L'impostazione rendeva difficile ottenere le più semplici definizioni dello spazio del quale si studiava la geometria.

Un altro problema era che lo stile di Cartan non era dei più chiari. In una recensione di un'edizione delle lezioni di Cartan degli anni 1931-1932 Weyl le trovava "come la maggior parte dei lavori di Cartan, difficili da leggere". Jean Dieudonné (1906-1992) scrisse che tale miscela di "uno stile estremamente ellittico ... e di una misteriosa intuizione algebrica e geometrica aveva sconcertato due generazioni di matematici". Un'osservazione sollevata a proposito dei lavori di Cartan sui sistemi differenziali e i gruppi di Lie ma che è ugualmente valida per i lavori sulla geometria.

Le connessioni erano state studiate a fondo nei primi anni Trenta del XX secolo, in particolare dalla scuola di Princeton sotto la guida di Veblen e di T.Y. Thomas. In anni più recenti il caso euclideo e quello affine sono apparsi maggiormente rilevanti. Quando intervengono le proprietà metriche di una superficie occorre definire una metrica riemanniana, e la geometria appropriata è allora quella metrica. Quando, però, è sufficiente definire le parallele a distanza, allora entra in gioco la nozione più debole di geometria affine. Per esempio, la nozione di trasporto parallelo di un vettore secondo Levi-Civita definisce in modo intrinseco una connessione affine compatibile con la metrica riemanniana della superficie. La nozione di connessione affine permette a sua volta di definire la derivata covariante, che generalizza la nozione naturale di derivata direzionale nel piano. A partire da questo punto si può costruire tutto il complesso apparato dell'analisi tensoriale.

I metodi di Cartan erano particolarmente efficaci in un quadro nel quale la geometria differenziale si dimostrava essere lo strumento più idoneo per lo studio dei gruppi di Lie. Uno strumento che conduceva naturalmente al cosiddetto metodo del riferimento mobile (repère mobile), che si può anche utilizzare con buoni risultati nello studio delle connessioni.

Cartan considera un gruppo di Lie come gruppo di trasformazioni che muovono i punti di uno spazio: le possibili posizioni di un punto costituiscono la sua orbita. Egli considera poi lo spazio di tutte le orbite dello spazio di partenza. Per esempio, nell'usuale azione del gruppo degli interi sulla retta reale due punti sono equivalenti se differiscono per un intero, e pertanto lo spazio delle orbite è parametrizzato da una circonferenza.

In generale Cartan partiva da uno spazio S di dimensione p e da un gruppo di Lie G di dimensione r. Il metodo appena descritto fornisce allora uno spazio delle orbite M di dimensione $p - r$, che in un intorno infinitesimo di un punto è simile allo spazio ma che globalmente ha proprietà che riflettono quelle del gruppo. Cartan sceglie un sottogruppo H di G e nello stesso modo forma un secondo spazio $G \ / \ H$, usando G come spazio di partenza e H come gruppo.

Questi spazi si dicono *omogenei*. Tale idea permette il confronto tra i gli spazi M e $G \ / \ H$. In particolare, è possibile studiare in questo modo gli invarianti differenziali di M. Cartan mostra come questa impostazione comprenda la vecchia idea dello spostamento di un sistema di assi coordinati su una superficie. Lo spazio può essere, per esempio, quello euclideo tridimensionale, e il gruppo dei movimenti quello delle trasformazioni euclidee dello spazio pensate come traslazioni e rotazioni di piccoli assi tridimensionali, o "riferimenti" come egli li chiamava.

Data una superficie si può scegliere il sottogruppo che applica un riferimento (e la sua origine sulla superficie) in un altro riferimento. Prendendo questo gruppo come gruppo principale, si può confrontare la geometria locale della superficie e quella dello spazio euclideo. Oppure, per fare un esempio che risale al XIX secolo, si immagini una curva nello spazio. Ogni suo punto si può pensare come origine di un sistema di assi paralleli a un sistema fissato di assi coordinati dello spazio. Oppure si possono scegliere gli assi uscenti da un punto della curva nel modo seguente: il primo asse è tangente alla curva, il secondo è normale e pertanto è diretto verso il centro del cerchio che meglio approssima la curva nel punto stesso, e il terzo forma con i primi due un sistema destrogiro. Contrariamente alla prima, la seconda scelta è naturale. Se si immagina di percorrere la curva a velocità costante, il primo asse è diretto come il vettore velocità, il secondo come il vettore accelerazione. Entrambi gli assi formano un sistema di riferimento mobile che fornisce una buona descrizione della curva, mentre con la prima scelta ciò chiaramente non avviene.

Questi metodi venivano applicati allo studio di varietà a curvatura costante in spazi sia euclidei sia non euclidei, per estendere i lavori del XIX secolo a spazi di dimensioni arbitrarie, e in particolare per dimostrare che per $r < 2p-1$ non possono esistere nello spazio euclideo r-dimensionale varietà p-dimensionali a curvatura costante negativa.

Cartan avrebbe successivamente costruito una teoria sistematica che era basata sulle nozioni di forme esterne e di derivata esterna, nella quale il ruolo delle connessioni è svolto da opportune matrici di 1-forme.

Un aspetto particolare dei lavori di Cartan e di Weyl, pur nell'impiego frequente dei calcoli, è l'accento posto su argomentazioni di carattere strutturale che evita l'uso sistematico delle coordinate. Ciò è in contrasto con la predilezione dei fisici per i sistemi di coordinate, viva ancora oggi, dovuta sia al fatto che molti dei problemi che essi affrontano hanno carattere locale, e pertanto è appropriato il ricorso a un sistema di coordinate, sia alla necessità di avere a disposizione quantità calcolabili da confrontare con i risultati degli esperimenti. Il matematico è invece più interessato a questioni di carattere globale.

La tensione tra queste due impostazioni si fece acuta. Durante la Seconda guerra mondiale, e subito dopo, due matematici decisero di riformulare la teoria secondo una linea di indipendenza dai sistemi di coordinate. Il primo fu Charles Ehresmann (1905-1979): egli intuì che una connessione permette di riconoscere in ogni punto dello spazio totale di un fibrato lo spazio tangente alla fibra e allo spazio base. Viceversa, questo spezzamento dello spazio tangente sullo spazio totale dà luogo a una connessione. L'altro matematico era Jean-Louis Koszul, che mostrò come formulare una connessione assiomatizzando opportune proprietà di una derivata covariante.

La nozione generale di fibrato venne alla luce lentamente dopo essere rimasta nascosta per un certo periodo di tempo nei lavori di Cartan.

I primi a rivelarla furono il matematico americano Hassler Whitney (per i fibrati di sfere), Heinz Hopf (1894-1971) ed Eduard Stiefel (1909-1978) negli anni 1935-1940, e Lev Semenovic Pontrjagin (1908-1988) in Unione Sovietica.

Whitney si occupava di famiglie di sfere associate a ogni punto di uno spazio base; il termine fibrato, che divenne standard con Norman Earl Steenrod (1910-1971) è dovuto a lui. Whitney studiò quelle che oggi si chiamano le classi caratteristiche dei fibrati di sfere. Contemporaneamente, Stiefel, uno studente di Hopf, discusse una tesi sul problema di stabilire sotto quali condizioni una n-varietà ammette n campi vettoriali ovunque linearmente indipendenti, una ricerca che lo portò a studiare il fibrato di sfere di una varietà e ad associare una classe di omologia al fibrato tangente a una varietà. Come il nome stesso suggerisce, le classi caratteristiche contengono molte informazioni sul fibrato. Per esempio, una varietà è orientabile se e soltanto se la sua prima classe di Stiefel-Whitney è nulla.

Allo scopo di generalizzare il teorema di Gauss-Bonnet a n dimensioni, Carl Barnett Allendörfer (1911-1974) e André Weil (1906-1998) studiarono il fibrato tangente a una varietà. Ma in modo non intrinseco: essi utilizzarono infatti un'immersione della varietà in uno spazio euclideo ambiente. Un'impostazione presto sostituita da quella di Chern, che diede una definizione intrinseca del fibrato tangente in un importante lavoro del 1946. Chern e Weil avevano trascorso insieme a Princeton parte degli anni 1943-1944, quando Weil aveva parlato a Chern dell'uso delle classi caratteristiche che John A. Todd (1908-1994) e William L. Edge (1904-1997) avevano fatto in geometria algebrica. A sua volta Weil aveva imparato dai lavori di Chern sulle varietà complesse come usare i fibrati in geometria algebrica. Da questa interazione nacque l'estensione di Chern delle idee di Pontrjagin a fibrati vettoriali complessi. Il primo a redigere una teoria generale dei fibrati vettoriali complessi e delle loro classi caratteristiche fu Wu Wen-Tsun nel 1950.

I primi autori davano definizioni diverse, spesso perfino incompatibili, e ciò generò qualche confusione. Allo stesso tempo, in quello che i matematici chiamano folklore circolavano molti risultati ma senza dimostrazioni esplicite.

Dopo la fine della Seconda guerra mondiale il primo a sistemare la materia fu il topologo americano Steenrod nel libro *The topology of fibre bundles* (1951). L'impostazione di Steenrod si impose rapidamente come quella standard. Un fibrato consta di vari oggetti: uno spazio base, B, che è una varietà, pensata appunto come lo spazio ambiente. Vi è poi la fibra, che è anch'essa una varietà, diciamo F, e che è uno spazio di parametri associato a ogni punto di B. Vi è quindi lo spazio totale, una varietà E, che è l'insieme di tutte le possibili combinazioni delle posizioni e dei valori dei parametri.

Si considerano di grande interesse gli spazi per i quali lo spazio totale non è semplicemente il prodotto dello spazio base e della fibra. Per esempio, il cerchio si può prendere come spazio base, e i numeri reali come fibra. Vi sono essenzialmente due distinti spazi totali: il cilindro (che corrisponde al caso banale del prodotto) e il nastro di Möbius.

La definizione di fibrato specifica anche un gruppo di Lie che agisce sulla fibra, e afferma che la restrizione del fibrato a intorni sufficientemente piccoli di un punto dello spazio base è banale, cioè il fibrato si riduce al prodotto dello spazio base e della fibra.

Il libro di Steenrod, oltre a chiarire i fondamenti topologici della teoria dei fibrati, presentava la teoria dei fibrati universali e la teoria della classificazione dei fibrati, mostrando che è sufficiente considerare solo fibrati principali, per i quali la fibra e il gruppo sono gli stessi, poiché metodi standard consentono di costruire un fibrato generale a partire da un appropriato fibrato principale.

Nella teoria dei fibrati un ruolo centrale ha la teoria delle classi caratteristiche, inizialmente considerate come qualcosa di misterioso. Quelle conosciute come le classi di Stiefel-Whitney sono definite solo mod 2, mentre quelle che oggi sono chiamate classi di Chern sono definite sugli interi.

Un ulteriore tipo, dovuto a Pontrjagin, fu pubblicato in russo durante la Seconda guerra mondiale e inizialmente non fu conosciuto in Occidente. Pontrjagin e Chern trovarono, in maniera indipendente, che le loro classi caratteristiche potevano essere espresse in termini di forme differenziali. Questo risultato fu generalizzato da Weil.

Data una varietà n-dimensionale M, il teorema di Chern-Weil stabilisce un omomorfismo dall'anello dei polinomi invarianti all'anello di coomologia della base dei fibrati in considerazione. L'immagine di questo omomorfismo è l'insieme delle classi caratteristiche espresse come forme differenziali. Questo teorema, enunciato da Weil in una serie di lezioni tenute a Chicago nel 1949 ma pubblicate solo nel 1980, apparve a stampa in un libro del suo amico Chern nel 1951. L'ulteriore storia dei fibrati e delle classi caratteristiche è estremamente ricca ma, in virtù dei metodi adottati, appartiene forse più alla topologia algebrica che alla geometria differenziale.

Riferimenti bibliografici

[1] **Salamon S. M.** - *Geometria Differenziale - Enciclopedia del Novecento - Treccani, pp. 820-829 - (1998)*

[2] **Kobayashi S., Salamon S. M.** - *Geometria Differenziale - Enciclopedia della Scienza e della Tecnica (2007)*

[3] **Grey J.** - *Geometria Algebrica - Storia della Scienza (2012) - Treccani*

[4] **Pressley A.** *Elementary Differential Geometry - Ed. Springer*

[5] **Reinhold Remmert** - *From Riemann surfaces to complex spaces. Seminaires et congres, 3, 1998. Société mathématique de France*

[6] **Griffiths P., Harris J.** *Principles of Algebraic Geometry - Ed. Wiley, Hoboken (1994)*