Fibrati vettoriali e principali

Giulio Maltempi, Debora Perrotti, Ilary Rico, Giuliano Montelucci

Capitolo 1

Gruppi di Lie

di Giulio Maltempi

Sia G un gruppo.

Definizione 1.1. G si dice gruppo di Lie se ha una struttura di varietá differenziabile tale che l'applicazione $G \times G \longrightarrow G$ che $(g,h) \longrightarrow (gh)^{-1}$ sia differenziabile.

Osservazione 1.2. G si dice un gruppo di Lie complesso se ha una struttura di varietá differenziabile complessa tale che l'applicazione $G \times G \longrightarrow G$ sia olomorfa.

Definizione 1.3. H si dice sottogruppo di Lie di un gruppo G se ha una struttura di sottovarietá immersa di G.

Diamo ora la definizione di azione di un gruppo definita su una varietá.

Definizione 1.4. Sia G un gruppo di Lie e M una varietá. Un'azione di G su M é un'applicazione $M \times G \longrightarrow M$ che $(m,g) \longrightarrow mg$ tale verifica le seguenti proprietá :
1. $me = m \ \forall m \in M$;
2. $(mg)h = m(gh) \ \forall m \in M$ e $\forall g,h \in G$.

In particolare le applicazioni $R_g : M \longrightarrow M$ definite da $R_g(m) = mg$ sono dei diffeomorfismi. Quindi l'azione si dice libera se R_g non ha punti fissi $\forall g \neq e$, mentre si dice transitiva se $\forall m_1, m_2 \in M \ \exists g \in G$ tale che $m_2 = m_1 g$. Vediamo alcuni esempi fondamentali di gruppi di Lie.

Esempio 1.5. Consideriamo l'insieme di tutte le matrici invertibili di ordine n

$$GL(n,R) = \{A \in M(n,R) : det(A) \neq 0\}.$$

Vogliamo verificare che é un gruppo di Lie di ordine n^2. Identificando una matrice appartenente a $GL(n,R)$ con un punto di R^{n^2} si vede che la funzione $det : M(n,R) \longrightarrow R$ tale che $A \longrightarrow det(A)$ é continua. Inoltre l'insieme $det^{-1}(0)$ é chiuso. Quindi abbiamo che

$$GL(n,R) = M(n,R) - det^{-1}(0).$$

Pertanto $GL(n,R)$ ha una struttura di varietá differenziabile. Infine ricordando l'operazione di prodotto tra matrici e l'inversa di una matrice otteniamo che $GL(n,R)$ é un gruppo di Lie di dimensione n^2. Analogamente si puo dimostrare che $GL(n,C)$, gruppo delle matrici invertibili a valori complessi, é un gruppo di Lie complesso e di dimensione n^2.

Esempio 1.6. Consideriamo il gruppo speciale lineare

$$SL(n,R) = \{A \in GL(n,R) : det(A) = 1\}.$$

Questo é un sottogruppo chiuso di $GL(n,R)$ in quanto $SL(n,R) = det^{-1}(1)$, dove det é definita come nell'esempio precedente. Per verificare che é un gruppo di Lie si puo usare il seguente risultato di geometria differenziale.

Teorema 1.7. *(Teorema delle summersioni). Siano X , Y due varietá differenziabili analitiche con $dim(X) \geq dim(Y)$ e sia $\phi : X \longrightarrow Y$ un'applicazione differenziabile. Sia $x \in X$ e $y = \phi(x)$. Se $d\phi_x : T_xX \longrightarrow T_yY$ é suriettivo , allora $\phi^{-1}(y)$ é una sottovarietá di X e $T_x\phi^{-1}(y) = ker(d\phi)_x$.*

Esempio 1.8. Consideriamo il gruppo ortogonale

$$O(n) = \{A \in GL(n,R) : A^tA = I\}.$$

Vogliamo verificare che é un sottogruppo di Lie di $GL(n,R)$ di dimensione $\frac{n(n-1)}{2}$. Sia $F : GL(n,R) \longrightarrow M(2n,R)$ definita da $F(A) = A^tA - I$. Questa é sicuramente un' applicazione C^∞. Calcoliamone il differenziale

$$dF_A(X) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[F(A + Xh) - F(A)] = XA^t + AX^t.$$

Quindi moltiplicando a destra per A^t si ha che il $ker(dF_I)$ si identifica con il $ker(dF_A)$. Essendo il $ker(dF_I)$ l'insime delle matrici antisimmetriche che ha dimensione $\frac{n(n-1)}{2}$ allora si conclude che $O(n)$ é proprio un sottogruppo di Lie di dimensione $\frac{n(n-1)}{2}$.

Esempio 1.9. Consideriamo il gruppo speciale ortogonale

$$SO(n) = \{A \in O(n) : det(A) = 1\}.$$

Questo é un sottogruppo di Lie con la stessa dimensione di $O(n)$.

Algebre di Lie

Sia G un gruppo di Lie e $g \in G$.Indichiamo con $L_g : G \longrightarrow G$ e
$R_g : G \longrightarrow G$ rispettivamente le moltiplicazioni (o traslazioni) a sinistra e destra . Chiaramente questi sono dei diffeomorfismi con inverse L_g^{-1} e R_g^{-1} e verificano le seguenti proprietá:
1. $L_e = R_e = Id_G$;
2. $L_{g_1} \circ L_{g_2} = L_{g_1 \circ g_2}$.

Definizione 1.10. X é un campo vettoriale di G invariante a sinistra se $dL_g(X) = X \ \forall g \in G$.

In particolare denotiamo con ζ l'insieme dei campi vettoriali invarianti a sinistra dove sono definite le seguenti operazioni:
1. aX prodotto per uno scalare $a \in R$;
2. $X + Y$ somma tra campi vettoriali,
3. $[X, Y]$ bracket tra campi vettoriali.

Successivamente dimostreremo che questo insieme costituisce un algebra di Lie con il bracket classico. In maniera analoga si possono definire i campi vettoriali invarianti a destra e costruire su di essi una teoria di algebre di Lie. Notiamo che in generale un campo vettoriale invariante a sinistra non puo esserlo a destra e viceversa. Le due nozioni coincidono solo nel caso in cui G sia un gruppo abeliano.

Esempio 1.11. $GL(n, R)$ é isomorfo all'algebra delle matrici $X \in T_I GL(n, R)$ con il bracket definito da $[X, Y] = XY - YX$.

Esempio 1.12. Consideriamo gli insiemi

$$sl(n, R) = \{A \in M(n, R) : tr(A) = 0\},$$

$$so(n, R) = \{A \in M(n, R) : A = -A^t.$$

Queste sono algebre di Lie con il brachet definito come sopra. Per verificarlo basta mostrare che l'operazione di $[,]$ é chiusa nei due insiemi considerati. Prese due matrici A,B tali che $A = -A^t$ e $B = -B^t$, calcoliamo $-[A, B]^t$

$$-[A, B]^t = -(AB-BA)^t = -((AB)^t-(BA)^t) = -B^tA^t+A^tB^t = AB-BA = [A, B].$$

Allo stesso modo date due matrici A,B tali che $tr(A) = 0$ e $tr(B) = 0$, calcoliamo $tr([A, B])$

$$tr([A, B]) = tr(AB - BA) = tr(AB) - tr(BA) = tr(AB) - tr(AB) = 0.$$

In questo modo abbiamo verificato che l'operazione di bracket é chiusa nei due insiemi considerati.

Ora vogliamo alcuni risultati sulle algebre di Lie. Per fare cio ci servono le nozioni di sottogruppo ad un parametro e quella di derivata di Lie. Sia ϕ_t il flusso locale di un qualche $X \in \zeta$ e sia $\epsilon > 0$ tale che la curva $a_t = \phi_t(e)$ sia definita per $t < \epsilon$. Questa risulta essere una curva integrale locale con $\dot{a}_t = X_{a_t}$. Vogliamo far vedere che, preso un $g \in G$ anche la curva ga_t é una curva integrale locale. Per mostrare questo calcoliamo

$$\frac{\partial}{\partial t}(ga_t) = \frac{\partial}{\partial t}(L_g a_t) = dL_g(\dot{a}_t) = X_{ga_t}.$$

Quindi abbiamo che ga_t é una curva integrale locale di X vicino a g e che il flusso locale é $\phi_t = R_{a_t}$.

Definizione 1.13. L'immagine del morfismo che a $t \longrightarrow a_t$ é detta sottogruppo ad un parametro e si indica generalmente con $exp(tx) = a_t$.

Definizione 1.14. Siano X,Y campi vettoriali e M una varietá. La derivata di Lie di X rispetto a Y su M é definita da $l_X Y = [X, Y]$.

Lemma 1.15. *Lo spazio dei campi vettoriali invarianti a sinistra é un algebra di Lie con il bracket definito come prima*

Dimostrazione. Siano X,Y due campi vettoriali invarianti a sinistra. Calcoliamo

$$(L_g)_*[X, Y] = (L_g)_* l_X Y = l_{(L_g)_* X}(L_g)_* Y = l_X Y = [X, Y].$$

□

Lemma 1.16. *Siano G,H gruppi di Lie e sia $\phi : G \longrightarrow H$ un morfismo. Allora il differenziale nell'identita di ϕ é un morfismo tra algebre di Lie.*

Dimostrazione. Sia $X \in \zeta$ e denotiamo con ϕX il campo vettoriale invariante a sinistra definito su H indotto da $\phi_*(X_e)$. Poiché ϕ é un morfismo tra gruppi allora abbiamo che $\phi \circ L_g = L_{\phi(g) \circ \phi}$. Calcoliamo

$$\phi_*(X_g) = \phi_*(L_g)_*(X_e) = (L_{\phi(g)})_*(\phi_*(X_e)) = (\phi X)_{\phi(g)}.$$

Questo mostra che X e ϕX sono ϕ-correlati. Quindi anche il bracket $[X, Y]$ é ϕ-correlato con $[\phi X, \phi Y]$ cioé $\phi_*([X, Y]_g) = [\phi X, \phi Y]_{\phi(g)}$ per ogni $g \in G$. Infine ponendo $g = e$ otteniamo la tesi. □

Capitolo 2

Fibrati principali

di Debora Perrotti

Sia G un gruppo di Lie e M una varietá differenziabile.

Definizione 2.1. Un *G-fibrato principale* $P(M, G, \pi)$ (o anche una *G- struttura*) é una varietá differenziabile P insieme ad una sommersione differenziabile $\pi : P \to M$ e ad un'azione del gruppo di Lie G su P a destra, che si restringe ad un'azione libera e transitiva sulle fibre $\pi^{-1}(x)$.
G si chiama *gruppo di struttura* di P.
Inoltre un fibrato principale ha la proprietá di locale banalitá:
$\forall x \in M$ esistono $U \ni x$ aperto ed un diffeomorfismo $\psi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$ tale che

$$\psi(u) = (\pi(u), \phi(u))$$

con $\phi : \pi^{-1}(x) \longrightarrow G$, tale che $ug \longrightarrow \phi(ug) = \phi(u)g$, $g \in G$.
Quest' ultima proprietá viene chiamata *G-equivarianza* di ϕ.

Ora vediamo le principali proprietá di un fibrato principale.

1. Ogni fibra $P_x = \pi^{-1}(x)$ é diffeomorfa a G.
   Infatti basta scegliere un $u \in P_x$ e definire $L_u : G \to P_x$, $g \to ug$. L_u é iniettiva perché l'azione di G sulle fibre é libera (se $ug = uh$, $g, h \in G$ $\Rightarrow u = uhg^{-1} \Rightarrow hg^{-1} = e \Rightarrow h = g$) ma é anche suriettiva per la transitivitá dell'azione ($\forall v \in P_x \, \exists g \in G | v = ug \, u \in P_x \Rightarrow v = L_u(g)$).
   Inoltre facendo il differenziale $dL_u : T_gG \to T_{ug}P_x$ questo associa ad ogni X_g il vettore X_{ug} tangente sulle fibre nel punto ug.

2. Segue immediatamente, dalla transitivitá dell' azione di G sulle fibre che ogni elemento v di P_x si puó esprimere come $v = ug$ con

$u \in P_x, g \in G$ opportuno.

3. La transitivitá dell'azione di G equivale a dire che $M = P/G$.
   Infatti se l'azione é transitiva allora $v \in P_x \Rightarrow v = ug$ con $u \in P_x, g \in G$, allora $P_x = [u] = \{ug, g \in G\}$, ma allora $\pi([u]) = \pi(ug) = x$ quindi effettivamente ogni $x \in M$ é identificato con la classe $[u]$. Viceversa, se $M = P/G \Rightarrow x \longleftrightarrow [u] = \{ug, g \in G\} \cong P_x$ e cioé l' azione di G é transitiva.

Dalla proprietá di locale banalitá discende che esiste $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ricoprimento aperto di M e dei diffeomorfismi

$$\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G$$
$$u \longrightarrow (\pi(u), \phi_\alpha(u))$$

con le ϕ_α come la ϕ definita sopra.
La coppia $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$ é un *atlante banalizzante.*
Inoltre se consideriamo α e β tali che $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ e prendiamo $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ e $v = ug \in P_x$ abbiamo che

$$\phi_\alpha(v)(\phi_\beta(v))^{-1} = \phi_\alpha(u)gg^{-1}(\phi_\beta(u))^{-1} = \phi_\alpha(u)(\phi_\beta(u))^{-1}$$

e cioé che l'espressione non dipende da $u \in P_x$ ma solo dal punto x.
Risultano quindi ben definite le applicazioni

$$\psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$$
$$x \longmapsto \psi_{\alpha\beta}(x) := \phi_\alpha(u)(\phi_\beta(u))^{-1}$$

dove u é un qualsiasi elemento di P_x.
Si mostra facilmente che le $\psi_{\alpha\beta}$ soddisfano le identitá di cociclo:

- $\psi_{\alpha\alpha}(x) = id_G$;
- $\psi_{\alpha\beta} \circ \psi_{\beta\alpha}(x) = id_G$;
- $\psi_{\alpha\beta} \circ \psi_{\beta\gamma} \circ \psi_{\gamma\alpha}(x) = id_G$

Le $\psi_{\alpha\beta}$ si dicono *funzioni di transizione* relative al ricoprimento $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$.
Si dimostra che se $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ allora

$$\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(x, g) = (x, \psi_{\alpha\beta}(x)g) \quad \forall g \in G$$

Quindi abbiamo visto che in un fibrato vettoriale sono sempre definite delle funzioni di transizione che soddisfano le identitá di cociclo.
Viceversa, mostriamo ora che dati un gruppo di Lie G, un ricoprimento aperto di M $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ e delle funzioni $\psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$ che soddisfano le identitá di cociclo é sempre definito un G-fibrato principale su M.

Proposizione 2.2. *Sia M una varietá differenziale, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ un ricoprimento aperto di M e G un gruppo di Lie. Siano inoltre $\psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$ su $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ che soddisfano le identitá di cociclo.*
Allora esistono una varietá differenziale P ed un fibrato principale $\pi : P \longrightarrow M$ con $\psi_{\alpha\beta}$ funzioni di transizione relative al ricoprimento $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Inoltre tale fibrato é unico a meno di isomorfismi di fibrati.

Dimostrazione. Costruiamo il fibrato principale.
Siano $X_\alpha = U_\alpha \times G$ e definiamo $X = \sqcup_\alpha X_\alpha$ l'unione topologica degli X_α. Poiché gli X_α sono varietá differenziabili, la loro unione topologica X é ancora una varietá differenziabile. Ogni elemento di X sará una terna (α, x, g), $\alpha \in I$ l'indice, $x \in U_\alpha$ e $g \in G$.
Poniamo ora $P = X/\sim$ dove $\sim$ indica la relazione di equivalenza seguente: $(\alpha, x, g) \sim (\beta, y, h) \Leftrightarrow x = y \in U_\alpha \cap U_\beta$ e $g = \psi_{\alpha\beta}(x)h$.
La relazione $\sim$ é effettivamente una relazione di equivalenza (é semplice provare la riflessivitá, simmetria e transitivitá).
Si vede facilmente che la proiezione $\pi : P \longrightarrow M$ manda $[\alpha, x, a] \longmapsto x$ é ben posta ed é π suriettiva.
Consideriamo quindi l'azione di G, $P \times G \longrightarrow P$, $([\alpha, x, a], g) \longmapsto [\alpha, x, ag]$. Sivede che tale applicazione é ben posta.
Inoltre l'azione é transitiva e libera sulle fibre:
se $u, v \in \pi^{-1}(x)$, $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, $u = [\alpha, x, a]$ e $v = [\beta, x, b]$ allora dire che $\exists g \in G$ tale che $v = ug$ significa dire che $[\beta, x, b] = [\alpha, x, ag]$ ma questo é vero se prendiamo $g = a^{-1}\psi_{\alpha\beta}(x)b$ (transitiva);
$[\alpha, x, ag] = [\alpha, x, a] \Leftrightarrow ag = \psi_{\alpha\alpha}(x)a = a \Leftrightarrow g = id_G$ (libera).
Ora diamo a P una struttura di varietá differenziabile.
Notiamo che c' é una corrispondenza biunivica tra $U_\alpha \times G$ e $\pi^{-1}(U_\alpha)$ perché $\psi_{\alpha\alpha} = id_G$ e quindi ogni classe $[\alpha, x, a]$ ha un unico rappresentante in $U_\alpha \times G$. Quindi $\pi^{-1}(U_\alpha)$ é aperto in P. Inoltre l'identificazione di una terna (α, x, a) con $(\beta, x, \psi_{\beta\alpha}(x)a)$ avviene per mezzo di applicazioni defferenziabili.
L' azione di G é quindi anch'essa differenziabile ed ogni fibra é diffeomorfa a G.
Se definiamo le

$$\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G, \quad \psi_\alpha([\alpha, x, a]) = (x, a)$$

allora $P(M, G, \pi)$ é un fibrato principale con funzioni di transizione $\psi_{\alpha\beta}(x)b$ corrispondenti al ricoprimento U_α.

□

Vediamo ora alcuni esempi di fibtati principali

Esempio 2.3 (Il fibrato banale). $P = M \times G$ e $\pi : M \times G \longrightarrow M$.

Esempio 2.4 (Il fibrato dei riferimenti lineari). Prendiamo il fibrato tangente $TM \to M$, con $M = M^n$ e definiamo
$L(T_xM) = \{basi\, ordinate\, di\, T_xM\}$.
Sia ora $L(TM) = \sqcup_{x\in M} L(T_xM)$.
Il fibrato $L(TM)(M, Gl(n,\mathbb{R}), \pi)$, $\pi : L(TM) \longrightarrow M$ é il fibrato principale con gruppo di struttura $Gl(n,\mathbb{R})$.
In effetti se $\{U_i, \phi_i\}$ é un atlante di M, se prendo $x \in U_i$ di coordinate locali $(x_1, ...x_n)$, una base di T_xM é $b = \{b_1, ...b_n\}$ con $b_k = (d\phi_i)^{-1}_{\phi_i(x)}(e_k)$, $k = 1, ..n$.
Ogni altra base $f = \{f_1, ...f_n\}$ di T_xM é espressa attraverso una matrice invertibile $\{a_{jk}\}$che rappresenta il cambiamento di base $b \mapsto f$, $f_k = \Sigma_{j=1}^n b_j a_{jk}$.
Per cui effettivamente ogni fibra $L(T_xM)$ é diffeomorfa a $Gl(n,\mathbb{R})$, che agisce liberamente e transitivamente sulle fibre.
Possiamo dare a $L(TM)$ una struttura differenziabile in questo modo.
Prendiamo le coordinate locali $x^i = (x_1, ...x_n)$ di $x \in U_i$, ogni riferimento in T_xM é espresso nella forma $A^i = (a_1|, ..a_n|)$ con $a_k|$ vettori colonna della matrice $\{a_{jk}\}$ del cambiamento di coordinate.
Si ha che $\pi^{-1}(U_i)$ é in corrispondenza biunivoca con $U_i \times Gl(n,\mathbb{R})$.Quindi si costruisce un atlante per $L(M)$ prendendo le controimmagini degli aperti U_i di M con coordinate locali (x^i, A^i) sull' aperto $\pi^{-1}(U_i)$. .
Notiamo infine che per costruire il fibrato abbiamo utilizzato la locale banalitá di $TM \to M$ come fibrato vettoriale e cioé che ogni fibra é isomorfa ad $\mathbb{R}^n$, questo suggerisce che ogni fibrato vettoriale $\pi : E \to M$ ammette un fibrato principale associato $L(E)(M, Gl(n,\mathbb{R}))$ con gruppo di struttura $Gl(n,\mathbb{R})$ considerando $L(E_x) = \{basi\, ordinate\, di\, E_x\}$ e $L(E) = \sqcup_{x\in M} L(E_x)$ e facendo lo stesso ragionamento di sopra.

Ricordiamo ora che un *fibrato vettoriale* di rango n $\pi : E \longrightarrow M$ ha le proprietá:
(1) ogni fibra é diffeomorfa a $\mathbb{R}^n$
(2) $\forall x \in M$ $\exists U \ni x$ aperto e un diffeomorfismo $\psi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n$ la cui restrizione ad E_y é un isomorfismo di spazi vettoriali $E_y \longleftrightarrow \{y\} \times \mathbb{R}^n$, $\forall y \in U$.(Locale banalitá)
Se fissiamo un ricoprimento $\{U_i\}$ di M abbiamo funzioni di transizione

$$\psi_i \circ \psi_j^{-1}(x, v) = (x, g_{ij}(x)v)$$

con $x \in U_i \cap U_j$, $v \in \mathbb{R}^n$ e $g_{ij}(x) \in Gl(n,\mathbb{R})$.

Osservazione 2.5. Osserviamo a questo punto che un cociclo di Čech a valori in $Gl(n,\mathbb{R})$ definisce anche un fibrato vettoriale di rango n. Infatti se prendiamo una varietá differenziabile M^n e $\{(U_\alpha)_\alpha, \psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to Gl(n, \mathbb{R})\}$ allora il fibrato vettoriale $\pi : E \to M$ sará definito dal quoziente $E = \sqcup_\alpha (U_\alpha \times \mathbb{R}^n)/ \sim$, dove $\sim$ é la relazione di equivalenza

$$(\alpha, x, \xi) \sim (\beta, y, \zeta) \Leftrightarrow x = y\, e\, \xi = \psi_{\alpha\beta}(x)\zeta$$

sull'unione topologica $\sqcup_\alpha (U_\alpha \times \mathbb{R}^n)$.
Possiamo dedurre che un cociclo di Čech a valori in $Gl(n, \mathbb{R})$ definisce simultaneamente un fibrato principale (come visto sopra) ed un fibrato vettoriale. I due fibrati ottenuti in questo modo sono strettamente correlati, come vedremo piú avanti.

Capitolo 3

Morfismi di fibrati principali e Riduzioni

di Ilary Rico

Nel seguito indicheremo con $P(G, M)$ il fibrato principale che consiste delle varietá differenziabili P e M, della sommersione $\pi : P \to M$ con gruppo di struttura il gruppo di Lie G. Dati due fibrati principali $Q(H, M')$ e $P(G, M)$ (con sommersioni π' e π rispettivamente), un morfismo di fibrati principali é una coppia (F, f) dove $F : Q \to P$ é un'applicazione differenziabile tra varietá e $f : H \to G$ é un morfismo di gruppi di Lie.
Ricordando l'azione a destra di H su Q che manda (q, h) in $qh \in Q$, un'ulteriore richiesta sulla coppia (F, f) é che $\forall q \in Q$, $h \in H$ valga $F(qh) = F(q)f(h)$.

Una prima importante osservazione é che un morfismo di fibrati principali induce un'applicazione $M' \to M$ perché F manda fibre in fibre, infatti
sia $x \in M'$ e $u \in \pi'^{-1}(x)$. Allora, per quanto visto nel seminario precedente, $\pi'^{-1}(x) = \{uh, h \in H\}$. Allora $F(\pi'^{-1}(x)) = \{F(uh), h \in H\} = \{F(u)f(h), h \in H\} = \{F(u)g, \text{ per certi } g \in G\}$.
Del resto essendo $F(u) \in P$ esisterá $y \in M$ tale che $F(u) \in \pi^{-1}(y)$ e quindi $\pi^{-1}(y) = \{F(u)g, g \in G\}$. Da ció segue che $F(\pi'^{-1}(x)) \subseteq \pi^{-1}(y)$.
Allora l'applicazione $M' \to M$, che con abuso di notazione chiameremo ancora f, sará tale che

$$x \mapsto y$$

.

Definizione 3.1. : Due fibrati principali $P(G, M)$ e $Q(H, M')$ si dicono isomorfi se esistono due morfismi tra loro, uno inverso dell'altro.

Un morfismo tra i fibrati principali $Q(H, M')$ e $P(G, M)$ si chiama embedding se $F : Q \to P$, vista come applicazione tra varietá differenziabili, é un embedding e f é un monomorfismo di gruppi di Lie.
Si noti che un embedding F tra le varietá Q e P induce un embedding tra le varietá M' ed M.
Identificando Q con $F(Q)$, H con $f(H)$ ed M' con $f(M')$ diremo che $Q(H, M')$ é un sottofibrato di $P(G, M)$.
Se inoltre $M = M'$ e l'applicazione indotta $f : M' \to M$ é l'identitá su M, allora l'embedding (F, f) é chiamato *riduzione* del gruppo di struttura di P ad H e il sottofibrato $Q(H, M)$ é chiamato *fibrato ridotto.*

Definizione 3.2. Dato $P(G, M)$ un fibrato principale e $H \subset G$ sottogruppo di Lie, diciamo che il gruppo di struttura G é riducibile ad H se esiste un fibrato ridotto $Q(H, M)$.

Diamo a questo punto una caratterizzazione completa circa la riducibilitá dei gruppi di struttura attraverso la seguente proposizione.

Proposizione 3.3. *Sia $P(G, M)$ un fibrato principale e sia $H \subset G$ un sottogruppo di Lie.*
Il gruppo di struttura G é riducibile ad H se e solo se esiste un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$ di M con funzioni di transizione $\psi_{\beta\alpha}$ tutte a valori in H.

dim:
$(\Leftarrow)$ Supponiamo che esista un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$ di M insieme con funzioni di transizione tutte a valori nel sottogruppo di Lie H. Per $U_\alpha \cup U_\beta \neq \emptyset$, $\psi_{\beta\alpha}$ é un'applicazione differenziabile di $U_\alpha \cup U_\beta$ in un gruppo di Lie G tale che $\psi_{\beta\alpha}(U_\alpha \cup U_\beta) \subset H$.La questione centrale a questo punto é che $\psi_{\beta\alpha}$ é un'applicazione differenziabile di $U_\alpha \cup U_\beta$ in H rispetto alla struttura differenziabile di H e quindi, per un teorema visto nella sezione precedente, possiamo costruire un fibrato principale $Q(H, M)$ a partire da U_α e $\psi_{\beta\alpha}$. Allora per la proprietá di banalitá locale del nuovo fibrato $Q(H, M)$ esistono isomorfismi $\psi'_\alpha : \pi'^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times H$ e ovviamente la proprietá di banalitá locale vale anche per il fibrato $P(G, M)$ e quindi esisteranno isomorfismi $\psi_{\ alpha} : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$. Ora l'obiettivo é immergere Q in P. Consideriamo la seguente applicazione

$$f_\alpha : \pi'^{-1}(U_\alpha) \to \pi^{-1}(U_\alpha)$$

costruita come

$$\pi'^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times H \hookrightarrow U_\alpha \times G \to \pi^{-1}(U_\alpha)$$

f_α é composizione di due isomorfismi e un'iniezione quindi é anch'essa un'iniezione. Inoltre si puó vedere che $f_\alpha \equiv f_\beta$ su $\pi'^{-1}(U_\alpha \cup U_\beta)$ e quindi incollando insieme queste f_α otteniamo la riduzione $Q \to P$ cercata.
($\Rightarrow$) Viceversa, supponiamo che il gruppo di struttura G sia riducibile al suo sottogruppo di Lie H. Questo vuol dire che esiste un fibrato ridotto $Q(H, M)$ e una riduzione $Q \to P$ associata all'inclusione $H \hookrightarrow G$ e chiamiamo $\pi' : Q \to M$ la sommersione.
Poiché $Q(H, M)$ é un fibrato principale esiste un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$ di M e isomorfismi

$$\psi'_\alpha : \pi'^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times H$$
$$u \mapsto (\pi'(u), \varphi'_\alpha(u))$$

, dove

$$\varphi'_\alpha : \pi'^{-1}(U_\alpha) \to H$$

é tale che

$$\varphi'_\alpha(ua) = \varphi'_\alpha(u)a$$

$\forall u \in U_\alpha$ e $a \in H$.
Quindi esistono funzioni di transizione

$$\psi'_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow H$$

che sono composizione di

$$U_\alpha \cap U_\beta \to \pi'^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \to H$$

$$x \mapsto \pi'^{-1}(x) \ni v \mapsto \varphi'_\beta(v)(\varphi'_\alpha(v))^{-1}$$

.

Per lo stesso ricoprimento $\{U_\alpha\}$ di M definiamo isomorfismi

$$\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$$

$$u \mapsto (\pi(u), \varphi_\alpha(u)))$$

.
In questa definizione π la conosciamo perché il fibrato $P(G, M)$ é dato dal teorema e quindi anche la sommersione π é data. Dobbiamo invece chiarire chi é φ_α e la definiremo a partire dalle φ'_α che conosciamo.

Sia $v \in \pi^{-1}(U_\alpha)$. Allora esiste $g \in G$ e $u \in \pi'^{-1}(U_\alpha)$ tale che v si puó rappresentare come ug.
A questo punto definisco
$$\varphi_\alpha(v) := \varphi'_\alpha(u)g$$
.

Si osservi che $\varphi_\alpha(v)$ é ben definito, cioé é indipendente dalla scelta del rappresentante della fibra. Infatti se come rappresentantedelle fibra scelgo un certo u' al posto di u allora v sará rappresentato da $u'k$ per un certo $k \in G$.
Quindi avró che $ug = u'k$ e cioé $u' = ugk^{-1}$
A questo punto, per la definizione data,
$$\varphi_\alpha(v) = \varphi'_\alpha(u')k = \varphi'_\alpha(ugk^{-1})k = \varphi'_\alpha(u)gk^{-1}k = \varphi'_\alpha(u)h$$
.

Ora possiamo costruire le funzioni di transizione sul fibrato P rispetto al ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$ e il nostro scopo é vedere che tali funzioni di transizione abbiano tutte valori in H.
Definisco
$$\psi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$$
che sono composizione di
$$U_\alpha \cap U_\beta \to \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \to G$$
$$x \mapsto \pi^{-1}(x) \ni v \mapsto \varphi_\beta(v)(\varphi_\alpha(v))^{-1}$$
ma
$$\varphi_\beta(v)(\varphi_\alpha(v))^{-1} = \varphi'_\beta(u)gg^{-1}(\varphi'_\alpha(u))^{-1} = \varphi'_\beta(u)(\varphi'_\alpha(u))^{-1}$$
.
Essendo $\varphi'_\beta(u)(\varphi'_\alpha(u))^{-1} \in H$ ed essendo questo vero per ogni α, β vuol dire che la tesi é verificata.$\square$

Questa proposizione ci dice quando il gruppo di struttura puó essere ridotto a un suo sottogruppo di Lie. Ovviamente il gruppo di struttura puó anche essere “allargato”, e questo lo si puó fare sempre.
Infatti dato un fibrato principale $P(G, M)$ e dato un morfismo di gruppi di Lie $g : G \to K$ si puó sempre costruire un fibrato principale $Q(K, M)$ e lo si puó fare componendo le funzioni di transizione di P con il morfismo g.

Esempi

Sottofibrato ridotto dei riferimenti orientati positivamente
Sia M una varietá differenziabile di dimensione n. Dare un'orientazione su M vuol dire dare un'orientazione su tutti gli spazi tangenti T_pM al variare di $p \in M$, cioé vuol dire definire per ogni $p \in M$ una forma non degenere $\omega_p : T_pM \wedge T_pM \wedge ...T_pM \to \mathbf{R}$.
Equivalentemente per dare un'orientazione su T_pM si puó dare una base $\{e_1, ...e_n\}$ e affermare che tale base é orientata positivamente. (Questo definisce un'orientazione su T_pM perché a questo punto esiste un'unica forma $\omega_p \in \Omega^n(T_pM)$ tale che $\omega_p(e_1, ...e_n) = 1$).
Consideriamo l'insieme
$L^+M = \{(x, v_1, ...v_n), x \in M$ e $\{v_1, ..., v_n\}$ base di T_xM orientata posivamente$\}$
Considero il fibrato

$$\pi : L^+M \longrightarrow M$$

$$(x, v_1, ...v_n) \to x$$

.
Ipotizzando che questo sia un fibrato principale mi chiedo quale possa essere il suo gruppo di struttura.
Sia $p \in M$ e sia v_p una base orientata positivamente di T_pM.
$\pi^{-1}(p) = \{$ basi orientate positivamente di $T_pM\}$.
Allora per ogni altro elemento w_p di $\pi^{-1}(p)$, cioé per ogni altra base orientata positivamente di T_pM esiste un'unica matrice $A_p \in Gl^+(n, \mathbf{R})$ tale che A_p trasformi v_p in w_p. Allora esisterá un riciprimento aperto di M U_α e posso costruireun isomorfismi

$$\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times Gl^+(n, \mathbf{R})$$

tale che

$$(p, w_p) \mapsto (p, A_p)$$

e le funzioni di transizione associate saranno i cambiamenti di coordinate da un aperto all'altro del ricoprimento.
Quindi possiamo vedere L^+M come la riduzione del fibrato dei riferimenti al sottogruppo $Gl_n^+(\mathbf{R})$ di $Gl_n(\mathbf{R})$.

Fibrato dei riferimenti ortonormali sulla sfera $(n-1)$*-dimensionale*
Come sappiamo $A \in SO(n)$ é tale che $det(A) = 1$ e $A^tA = Id$. Quindi presa $A = (a_1, ...a_n) \in SO(n)$, dove a_i indica l'i-esima colonna di A, abbiamo che

$< a_i, a_j >= \delta_{ij}$.
Definisco la proiezione

$$\pi : SO(n) \to S^{n-1}$$
$$A \mapsto a_n$$

E' noto che per ogni $p \in S^{n-1}$, $T_pS^{n-1} = \{v \in \mathbf{R}^n :< v, p >= 0\}$.
Pertanto,se $A = (a_1, ...a_n) \in SO(n)$si ha che $\{a_1, ...a_{n-1}\}$ é una base ortonormale di $T_{a_n}S^{n-1}$. Chiamiamo $u(A)$ tale base.
Ora diamo un'orientazione su S^{n-1} in modo che $Id \in SO(n-1)$ definisca una base positiva di $T_{(0,0,...1)}S^{n-1}$.
Sia $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ un atlante di S^{n-1} orientato secondo l'orientazione scelta. Per ogni $p \in U_\alpha$ si puó sempre scegliere una base ortonormale di T_pS^{n-1} che chiamo $v^\alpha(p)$. (Una tale base esiste sempre, basta usare il procedimento di Gram-Schmidt applicato alla base $\{\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}(p), ...\frac{\partial}{\partial x_{n-1}^\alpha}(p)\}$).
Data $A = (a_1, ..., a_n) \in SO(n)$ esiste un'unica matrice $A_\alpha \in SO(n-1)$ tale che

$$u(A) = A_\alpha^t v_\alpha(a_n)$$

.
Quindi $\forall p \in S^{n-1}$ $\pi^{-1}(p) \cong SO(n-1)$.
Inoltre $SO(n-1)$ agisce per moltiplicazione a destra sulla fibra nel modo seguente. Se $B \in SO(n-1)$ e se $A \in \pi^{-1}(p)$ allora si definisce $B.\,A = B^t u(A)$.
Costruiamo le funzioni di banalizzazione locale

$$\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times SO(n-1)$$
$$A \mapsto (\pi(A), A_\alpha)$$

. Le funzioni di transizione associate $\psi_{\beta\alpha}$ sono le matrici di cambiamento di base da v_α a v_β e sono matrici di $SO(n-1)$.
Quindi $SO(n)$ é un sottofibrato di $LS^{n.-1}$ formato dalle basi orientate e ortonormali rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbf{R}^n$, infatti $SO(n)$ si ottiene come riduzione di LS^{n-1} riducendo il gruppo di struttura a $SO(n)$.
In realtá questo é un procedimento generale che vale su ogni varietá orientabile M.

Capitolo 4

Fibrati associati

di Giuliano Montelucci

Fibrati vettoriali associati a fibrati principali. Sia G un gruppo di Lie, e siano $P \to M$ un G-fibrato principale, e $\rho : G \to \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ una rappresentazione lineare di rango k di G.

Possiamo associare a P il fibrato vettoriale di rango k

$$E = P \times_\rho \mathbb{R}^k := (P \times \mathbb{R}^k)/_\sim,$$

dove $\sim$ è la relazione

$$(p, x) \sim (q, y) \overset{\text{def}}{\iff} \exists g \in G \text{ tale che } q = pg \text{ e } y = \rho(g^{-1})x.$$

È facile vedere che $\sim$ è una relazione di equivalenza. E è detto il *fibrato vettoriale associato a P (tramite ρ)*.

La classe di equivalenza di $(p, x) \in P \times \mathbb{R}^k$ si indica con $[p, x]$. Quando la rappresentazione ρ è evidente dal contesto, si scrive anche $P \times_G \mathbb{R}^k$ invece che $P \times_\rho \mathbb{R}^k$. Dalla definizione di $\sim$ si vede subito che $[pg, x] = [p, \rho(g)x]$.

Finora E è stato definito come insieme. Verifichiamo che E ammette effettivamente una struttura di fibrato su M.

Sia π la proiezione $\pi : P \xrightarrow{\pi} M$. Definiamo $\pi_E : E \to M$ come $\pi_E([p, x]) = \pi(p)$. Tale definizione non dipende dalla scelta del rappresentante di $[p, x]$. Sia infatti $(pg, \rho(g^{-1})x)$ un altro generico rappresentante. Allora risulta $\pi_E([pg, \rho(g^{-1}x]) = \pi(pg) = \pi(p)$, dato che per definizione di fibrato principale l'azione di G rispetta le fibre di P.

Per la locale banalità di E, fissiamo un ricoprimento aperto banalizzante $\mathcal{U}$ per $P \to M$. Allora per ogni aperto $U \in \mathcal{U}$, per ipotesi $\pi^{-1}(U) \simeq U \times G$. G agisce a destra su $U \times G$ nel modo ovvio, per moltiplicazione sul secondo fattore. Allora

$$\pi^{-1}(U) \times_\rho \mathbb{R}^k \simeq (M \times G) \times_\rho \mathbb{R}^k = (M \times G \times \mathbb{R}^k)/_\sim \simeq M \times \mathbb{R}^k,$$

dove il primo isomorfismo è l'isomorfismo di banalizzazione di P, e l'ultimo isomorfismo è la mappa $[m, g, x] \mapsto (m, \rho(g)x)$, con inversa $(m, x) \mapsto [m, e, x]$. Allora $\mathcal{U}$ è una banalizzazione di $E \to M$, e la fibra di E è $\mathbb{R}^k$.

Un esempio. Sia M una varietà differenziabile di dimensione n. Come visto precedentemente, il fibrato dei riferimenti $\mathrm{GL}(M)$ è un $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$-fibrato principale. Ora, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ agisce a sinistra su $\mathbb{R}^n$ nel modo ovvio. Allora possiamo costruire il fibrato associato

$$E = \mathrm{GL}(M) \times_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})} \mathbb{R}^n.$$

Consideriamo l'applicazione che manda il generico elemento $[b, z]$ di E (dove b è una base di un qualche T_xM e $z \in \mathbb{R}^n$) nel vettore tangente $v \in T_xM$ che ha coordinate z nella base b. Questa applicazione è ben posta, perché se $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, allora $[b, z] = [bA, A^{-1}z]$ definiscono lo stesso vettore $v \in T_xM$. È facile vedere che tale applicazione tra E_x e T_xM è un isomorfismo, sicché il fibrato associato E è (isomorfo a) TM.

Fibrati principali associati a fibrati vettoriali. Abbiamo visto come a un fibrato G-principale P e una rappresentazione ρ di G può associarsi un fibrato vettoriale. Viceversa, ad ogni fibrato vettoriale possiamo associare il fibrato principale $\mathrm{GL}(E)$.

In particolare, prendendo $G = GL(k, \mathbb{R})$ e $\rho = \mathrm{Id}$ nella costruzione sopra vediamo che le due operazioni $P \mapsto E = P \times_{\mathrm{Id}} \mathbb{R}^k$ ed $E \mapsto P = GL(E)$ sono inverse l'una dell'altra.

Sui fibrati vettoriali associati si può vedere [Mor07, Ch.4].

Fibrati associati con fibra qualsiasi. Come abbiamo visto, c'è un modo di associare a un fibrato G-principale e una rappresentazione lineare di G di rango k, un fibrato vettoriale di rango k.

Ricordiamo che una rappresentazione lineare $\rho : G \to \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ non è altro che un'azione (sinistra) di G su $\mathbb{R}^k$: basta porre $gx = \rho(g)x$.

Siamo dunque tentati di dare la definizione di fibrato associato in un contesto più generale: sia $P \to M$ un G-fibrato principale, e sia F una varietà differenziabile con un'azione sinistra di G. Definiamo

$$E = P \times_G F := (P \times F)/_\sim,$$

dove stavolta $\sim$ è la relazione d'equivalenza

$$(p, x) \sim (q, y) \overset{\text{def}}{\iff} \exists g \in G \text{ tale che } q = pg \text{ e } y = g^{-1}x.$$

(Osserviamo che se $F = \mathbb{R}^k$ e l'azione di G su F è lineare, ritroviamo la prima definizione.)

La verifica che E è un fibrato è identica a quella del caso vettoriale.

Una parentesi sulla banalità dei fibrati principali. Enunciamo ora un semplice risultato sulla banalità di un fibrato principale poiché, come vedremo, è un caso particolare del teorema centrale di questo seminario.

Lemma 4.1. *Siano P, Q fibrati G-principali. Ogni morfismo di fibrati principali $\varphi : P \to Q$ è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Esaminiamo prima il caso in cui $P, Q = M \times G$ sono banali. Un morfismo $\varphi : M \times G \to M \times G$ è della forma $\varphi(x, g) = (x, f(x)g)$ per qualche $f : M \to G$. Allora $\varphi^{-1}(x, g) := (x, f(x)^{-1}g$ è l'inverso di φ, quindi φ è un isomorfismo.

Nel caso generale, per dire che φ è un isomorfismo è sufficiente verificarne l'invertibilità localmente. Fissiamo allora una banalizzazione di P e una di Q, e sia $\mathcal{U}$ un loro raffinamento comune. Allora per ogni aperto $U \in \mathcal{U}$, la restrizione di φ a $\pi^{-1}(U) \subset P$ è un morfismo $\varphi : U \times G \to U \times G$. Per quanto detto sopra, è un isomorfismo. □

Proposizione 4.2. *Un G-fibrato P è banale se e solo se ammette una sezione globale.*

Dimostrazione. Se $P = M \times G$ è banale, certamente ammette la sezione $s : M \to M \times G$ data da $s(x) = (x, e)$.

Viceversa, sia $s : M \to P$ una sezione globale di P. Allora $\varphi : M \times G \to P$ dato da $\varphi(x, g) = s(x)g$ è un morfismo di G-fibrati. Per il lemma φ è un isomorfismo, dunque $P \simeq M \times G$. □

Il teorema di corrispondenza. In questo paragrafo enunciamo il risultato centrale del seminario.

Da qui in avanti H indicherà un sottogruppo di Lie chiuso del gruppo di Lie G. Considereremo il fibrato associato $E = P \times_G (G/H)$, con fibra G/H.

Osserviamo che H agisce a destra su P con l'azione ristretta da G. Possiamo dunque considerare lo spazio delle orbite P/H. (L'ipotesi che H è un sottogruppo chiuso serve a garantire che G/H e P/H abbiano una struttura di varietà differenziabile. In generale, se H non è chiuso, tali quozienti possono addirittura non essere di Hausdorff.)

Osservazione 4.3. $E \simeq P/H$. Consideriamo infatti la mappa $P \times (G/H) \to P/H$ che manda $(p, gH) \mapsto [pg]$. Questa rispetta la relazione $\sim$, infatti per ogni $a \in G$ risulta $[p, gH] = [pa, a^{-1}gH] \mapsto [paa^{-1}g] = [pg]$. Dunque induce una applicazione $E = (G/H)/_\sim \to P/H$. Si vede facilmente che questo è un isomorfismo, sicché $E \simeq P/H$.

Teorema 4.4. *Il gruppo di struttura G di P è riducibile ad H se e solo se il fibrato associato $E = P \times_G (G/H) = P/H$ ammette una sezione globale.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Supponiamo che il gruppo di struttura G è riducibile ad H. Sia dunque Q una riduzione, cioè un H-fibrato $Q \to M$ con un morfismo iniettivo di fibrati principali $F : Q \to H$. Sia inoltre $\mu : P \to E = P/H$ la proiezione naturale. Se q_1, q_2 sono nella stessa fibra di Q allora, visto che Q è per ipotesi un H-fibrato, esiste $h \in H$ tale che $q_2 = q_1 h$. Allora $\mu(F(q_2)) = \mu(F(q_1)h) = \mu(F(q_1))$. Così l'applicazione $\mu \circ F$ è costante sulle fibre. Allora è ben definita l'applicazione $s : M \to E$ da $s(x) = \mu(F(q))$, con q un qualsiasi elemento nella fibra sopra x. È chiaro che s è liscia, perché le mappe μ e F lo sono. Quindi s è una sezione (globale).

($\Leftarrow$) Supponiamo che $s : M \to E$ è una sezione globale. Vogliamo trovare una riduzione Q di P ad H. Definiamo Q dapprima come insieme:

$$Q = \{p \in P \mid \mu(p) = s(\pi(p)\}.$$

Per ogni $x \in M$, esiste $q \in Q$ tale che $\pi(q) = X$. Dati p_1, p_2 nella stessa fibra di P, allora $p_1 \in Q$ implica $p_2 \in Q$ se e solo se esiste $h \in H$ tale che $p_2 = p_1 h$ (questo perché $p_1, p_2 \in Q$ se e solo se $\mu(p_1) = \mu(p_2)$, se e solo se esiste h come descritto). Perciò H agisce (a destra) su Q, e per quanto appena visto l'azione rispetta le fibre ed è transitiva e libera. Pertanto Q è una riduzione di P ad H, come richiesto. □

Osservazione 4.5. Scegliendo come H il sottogruppo banale, ritroviamo la Proposizione 4.2. Infatti, il gruppo di struttura di P è riducibile ad $\{e\}$, come abbiamo visto, se e solo se esiste una banalizzazione di P con la proprietà che le mappe di transizione hanno valori in $\{e\}$, cioè se sono l'identità. Sia $\mathcal{U}$ una tale banalizzazione, e sia, per ogni $U \in \mathcal{U}$, $\phi_U : U \to \pi^{-1}(U) \times F$ l'isomorfismo di banalizzazione. Dati due aperti U, V con intersezione non vuota, per ipotesi le mappe di transizione ϕ_{UV} sono l'identità su $U \cap V$, dunque ϕ_U, ϕ_V possono incollarsi ad un isomorfismo $\phi_{U \cup V} : U \cup V \to \pi^{-1}(U \cup V) \times F$. Dunque tutti gli isomorfismi ϕ_U si incollano a un isomorfismo globale $\phi : P \to M \times G$, e ciò implica che P è il fibrato banale.

Ora, $E = P \times_G (G/\{e\}) = P \times_G G = P$. Il teorema allora dice implica che P è banale se e solo se $E = P$ ha una sezione globale, e questo è esattamente il contenuto della Proposizione 4.2.

Un'applicazione: esistenza di metriche riemanniane. Mostriamo ora come dal teorema di corrispondenza derivi il fatto, già noto, che ogni varietà differenziabile ammette una metrica riemanniana.

A tal scopo premettiamo un lemma, senza dimostrazione.

Lemma 4.6. *Sia $E = P \times_G \mathbb{R}^k$ un fibrato vettoriale associato. Ogni sezione locale su un chiuso di M si estende a una sezione globale.*

Dimostrazione. Vedi [KN96, I, §5, Teorema 5.7]. □

In particolare, scegliendo come chiuso l'insieme vuoto, il lemma dice che esistono sezioni i fibrati vettoriali associati ammettono sezioni globali. Questo non è molto interessante; sappiamo infatti che i fibrati vettoriali hanno sempre la sezione globale zero. Il lemma dice però che i fibrati vettoriali associati ammettono sezioni non banali, e che ne ammettono "tante": basta scegliere una sezione locale su un chiuso ed estendere.

Osservazione 4.7. $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{O}(n) \simeq \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$.

Dimostrazione. Per vederlo, sia $X \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Poniamo $Q := X^T X$. Q è una matrice simmetrica definita positiva.

Per il teorema spettrale esiste B tale che $D = BQB^{-1}$ è in forma diagonale, e gli elementi sulla diagonale sono strettamente positivi perché Q è definita positiva. Allora esiste un'unica matrice P simmetrica definita positiva tale che $P^2 = Q$. In effetti, per il teorema spettrale P dev'essere diagonalizzabile, e deve avere tutti gli autovalori strettamente positivi perché è definita positiva. Allora è evidente che l'unica possibilità è $P = B^{-1}\sqrt{D}B$ dove $\sqrt{D}$ è la matrice diagonale i cui elementi sono le radici quadrate dei corrispondenti elementi di D. Poniamo $A = XP^{-1}$. Allora A è una matrice ortogonale:

$$\begin{aligned} AA^T &= XP^{-1}(P^{-1})^T X^T \\ &= XP^{-2}X^T \\ &= XQ^{-1}X^T \\ &= XX^{-1}(X^T)^{-1}X^T = I. \end{aligned}$$

Dunque $X = AP$ si scrive come prodotto di una matrice ortogonale e di una simmetrica definita positiva. Inoltre, se $X = A'P'$ è un'altra tale scrittura, allora $AP = A'P'$, dunque $(A')^{-1}A = P'P^{-1}$. Poiché l'unica matrice ortogonale simmetrica definita positiva è I, ne segue che $A = A'$ e $P = P'$, cosicché la scrittura $X = AP$ è unica. Allora $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) = \mathrm{O}(n) \times \mathrm{S}^+(n,\mathbb{R})$, dove $\mathrm{S}^+(n,\mathbb{R})$ indica l'insieme delle matrici simmetriche definite positive.

Ora, $\mathrm{S}^+(n,\mathbb{R})$ è una varietà convessa (infatti se $A, B \in \mathrm{S}^+(n,\mathbb{R})$, è facile vedere, con un argomento di diagonalizzazione, che $\lambda A+(1-\lambda)B \in \mathrm{S}^+(n,\mathbb{R})$ per ogni $\lambda \in [0,1]$) e aperta, dunque è diffeomorfa a qualche $\mathbb{R}^k$. Che sia $k = \frac{1}{2}n(n+1)$ segue per ragioni dimensionali. Allora $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) = \mathrm{O}(n)\times\mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$, da cui la tesi. □

Lemma 4.8. *C'è una corrispondenza tra metriche riemanniane g su M, e riduzioni del gruppo struttura $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ di $\mathrm{GL}(M)$ ad $\mathrm{O}(n)$.*

Dimostrazione. Sia M una varietà differenziabile di dimensione n. In un verso, sia $Q \to M$ un $\mathrm{O}(n)$-fibrato, riduzione di $\mathrm{GL}(M)$. Vediamo ogni $q \in \mathrm{GL}_x(M)$ come un isomorfismo $q : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} T_xM$ (interpretando q come l'immagine della base canonica di $\mathbb{R}^n$). Definiamo

$$g(u,v) = q^{-1}(u)\cdot q^{-1}(v) \qquad \forall u,v \in T_xM,$$

dove $\cdot$ indica il prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^n$. L'invarianza di $\cdot$ sotto l'azione di $\mathrm{O}(n)$ garantisce che la definizione di g è indipendente dalla scelta di q.

Viceversa, se g è una metrica riemanniana su M, sia Q il sottoinsieme di $\mathrm{GL}(M)$ formato dalle basi ortonormali rispetto a g. Se vediamo ancora $q \in \mathrm{GL}_x(M)$ come un isomorfismo $q : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} T_xM$, allora $q \in Q$ se e solo se $z\cdot z' = g(q(z), q(z'))$ per ogni $z, z' \in \mathbb{R}^n$. Q riceve naturalmente l'azione destra di $\mathrm{O}(n)$ per cambio di base ortonormale, sicché Q è un fibrato. (Q si indica solitamente con $\mathrm{O}(M)$ e si chiama fibrato ortonormale.) □

Per il Lemma 4.8, una metrica riemanniana g su M esiste se e solo se il fibrato $\mathrm{GL}(M)$ ammette una riduzione ad $\mathrm{O}(n)$. Per il teorema di corrispondenza, questa riduzione esiste se e solo se il fibrato associato

$$E = \mathrm{GL}(M)\times_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})}(\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{O}(n))$$

ammette sezioni globali. Per l'Osservazione 4.7, E è un fibrato vettoriale associato. La sezione banale zero corrisponde alla metrica nulla. Per il Lemma 4.6, sezioni non banali di E esistono sempre. Per il Teorema 4.4, M ammette sempre una metrica riemanniana (non nulla).

Bibliografia

[KN96] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*. Number v. 1 in A Wiley Publication in Applied Statistics. Wiley, 1996.

[Mor07] A. Moroianu. *Lectures on Kähler Geometry*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 2007.