Geometria Superiore

Prova scritta del 19.6.2013 - Prof. P. Piccinni

Il candidato svolga, a sua scelta, due tra i seguenti temi.

1. Descrivere la fibrazione di Hopf $S^{2n+1} \to \mathbf{C}P^n$ e la metrica di Fubini-Study su $\mathbf{C}P^n$.

2. Si consideri il seguente sottoinsieme:

$$S_k(\mathbf{R}^n) = \{(\textit{ s. s. vettoriali } L_k \subset \mathbf{R}^n, \textit{ vettori su } L_k)\} \subset \ Gr_k(\mathbf{R}^n) \times \mathbf{R}^n$$

essendo $Gr_k(\mathbf{R}^n)$ la grassmanniana dei k-piani per O di $\mathbf{R}^n$.

i) Dimostrare che $S_k(\mathbf{R^n})$ è una varietà differenziabile e precisarne la dimensione.

ii) Dimostrare che la proiezione $S_k(\mathbf{R}^n) \to \ Gr_k(\mathbf{R}^n)$ è un fibrato localmente banale.

iii) Discutere in che senso il fibrato $S_k(\mathbf{R}^n) \to \ Gr_k(\mathbf{R}^n)$ può definirsi "universale".

3. Si discuta l'equivalenza di diverse definizioni di metrica di Kähler su una varietà complessa o quasi complessa.

4. Si dimostri qualche restrizione topologica per l'esistenza di una metrica di Kähler su una varietà complessa compatta.

5. Si enunci la caratterizzazione assiomatica delle classi di Chern di fibrati vettoriali complessi $\pi : E \to M$. Si dimostri quindi che le classi di coomologia

$$c_\alpha(E) \in H^{2\alpha}_{dR}(M),$$

definite secondo l'approccio di Chern-Weil:

$$c(E) = 1 + c_1(E) + \ldots + c_k(E) = \big[det\big(I - \frac{\Omega}{2\pi i}\big)\big]$$

verificano gli assiomi enunciati. Nella precedente formula k è il rango del fibrato, e $\Omega = (\Omega^\alpha_\beta)$ denota la matrice di forme di curvatura, associata a un riferimento locale e a una connessione su E.