

Università degli Studi di Roma “La Sapienza”

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI

Esempi di Metriche di Kähler

Studenti

Sabrina Troiani
Stefano Iovieno

Professore

Paolo Piccinni

Anno Accademico 2013-2014

Indice

1	Esempi di Metriche Kähleriane	5
1.1	Richiami	5
1.2	La metrica piana su \mathbb{C}^n	6
1.3	La metrica di Fubini-Study su $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$	8
2	Ulteriori proprietà della metrica di Fubini-Study	11
2.1	Definizioni introduttive	11
2.2	Risultati preliminari	12
2.3	La metrica di Fubini-Study come metrica di Einstein	15
2.4	Aspetti fisici	17
3	Metriche di Calabi-Yau come esempio di metriche di Kähler	19
3.1	Trasporto parallelo e gruppo di ologonia	19
3.2	Metriche di Kähler e di Calabi-Yau	20
3.3	Teorema di Calabi-Yau	22

Capitolo 1

Esempi di Metriche Kähleriane

Sabrina Troiani

1.1 Richiami

In questo seminario tratteremo due esempi molto importanti di Metriche Kähleriane:

- La Metrica Piana su \mathbb{C}^n
- La Metrica di Fubini-Study su $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$

Prima di trattare questi esempi nello specifico, richiamiamo alcune definizioni:

Definizione 1. Sia (M, J) una varietà quasi complessa. Una metrica Riemanniana h è detta metrica Hermitiana se

$$h(X, Y) = h(X, JY) \quad \forall X, Y \in TM$$

Definizione 2. Ad ogni metrica hermitiana è possibile associare una 2-forma, nel seguente modo:

$$\Omega(X, Y) = h(X, JY) \quad \forall X, Y \in TM$$

detta 2-forma fondamentale.

Definizione 3. Una metrica Hermitiana h è detta metrica Kähleriana se valgono le seguenti proprietà:

$$N^J = 0 \quad d(\Omega) = 0$$

La prima condizione, $N^J = 0$ può essere interpretata come il fatto che la varietà M è in realtà una varietà complessa: in questo modo possiamo subito affermare che la prima condizione è banalmente verificata nei nostri casi, essendo \mathbb{C}^n e $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$ varietà complesse.

Rimane da dimostrare la seconda proprietà: $d(\Omega) = 0$.

Quest'ultima può essere letta nei termini del *$i\partial\bar{\partial}$ -lemma*, che riportiamo qui di seguito:

Lemma 1. *Sia ω una (1,1)-forma chiusa, su di una varietà complessa M . Allora ω è chiusa se, e solo se, $\forall x \in M \exists$ un aperto U , intorno di x , tale che $\omega|_U = i\partial\bar{\partial}u$ per qualche funzione $u \in U$.*

Inoltre ricordiamo che: data una varietà complessa che ammette una struttura Hermitiana H , restringendoci alla parte reale di tale struttura

$$h = \Re(H)$$

otteniamo la metrica Hermitiana. La 2-forma fondamentale associata a tale metrica si ottiene restringendoci alla parte immaginaria di questa struttura H :

$$\Omega = \Im(H)$$

Considerando la base data dalle coordinate olomorfe (z, \bar{z}) , le espressioni precedenti diventano:

$$h = \sum_{\alpha, \beta} h_{\alpha, \beta} dz_\alpha \otimes d\bar{z}_\beta$$

$$\Omega = i \sum_{\alpha, \beta} h_{\alpha, \beta} dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta$$

dove

$$h_{\alpha, \bar{\beta}} := h \left(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta} \right).$$

1.2 La metrica piana su \mathbb{C}^n

Consideriamo su \mathbb{C}^n il prodotto hermitiano standard, che indicheremo: $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Questo definisce una struttura hermitiana H , la quale agisce nel seguente modo:

$$H(u, z) = \sum_{\alpha=1}^n u_\alpha \bar{z}_\alpha$$

Dai richiami precedenti abbiamo che

$$h = \Re(H) = \sum_{\alpha, \beta} h_{\alpha, \beta} dz_\alpha \otimes d\bar{z}_\beta$$

è una metrica hermitiana, la cui forma fondamentale è

$$\Omega = \Im(H) = i \sum_{\alpha, \beta} h_{\alpha, \beta} dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta.$$

In questo caso specifico l'espressione dei coefficienti è:

$$h_{\alpha, \bar{\beta}} := h \left(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta} \right) = \Re(H) \left(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta} \right).$$

Ricordandoci che la base $\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)$ può essere espressa in termini delle coordinate reali x, y , grazie alle formule seguenti:

$$z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha \quad \bar{z}_\alpha = x_\alpha - iy_\alpha$$

da cui:

$$\frac{\partial}{\partial z_\alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} - i \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + i \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right)$$

Possiamo dunque calcolarci la forma esplicita dei coefficienti di h :

$$\begin{aligned} h_{\alpha, \bar{\beta}} &= \Re(H) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} - i \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right), \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_\beta} + i \frac{\partial}{\partial y_\beta} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{4} \Re(H) \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} - i \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right), \left(\frac{\partial}{\partial x_\beta} + i \frac{\partial}{\partial y_\beta} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{4} \Re \left(H \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial}{\partial x_\beta} \right) + iH \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial}{\partial y_\beta} \right) - iH \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}, \frac{\partial}{\partial x_\beta} \right) + H \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}, \frac{\partial}{\partial y_\beta} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(H \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial}{\partial x_\beta} \right) + H \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}, \frac{\partial}{\partial y_\beta} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{4} (\delta_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2} \delta_{\alpha, \beta} \end{aligned}$$

Dunque la 2-forma fondamentale nelle coordinate (z, \bar{z}) è :

$$\begin{aligned} \Omega &= i \sum_{\alpha, \beta} h_{\alpha, \bar{\beta}} dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta = \\ &= \frac{i}{2} \sum_{\alpha=1}^n dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\alpha \end{aligned}$$

Per provare che h è una metrica hermitiana resta soltanto da verificare che Ω è chiusa.

Per dimostrare questo ultimo fatto faremo vedere che ammette un potenziale.

Consideriamo la funzione $u(z) = \frac{|z|^2}{2}$ e andiamo a calcolare la derivata $\partial\bar{\partial}$:

$$\partial\bar{\partial}u = \frac{1}{2} \partial\bar{\partial}|z|^2 = \frac{1}{2} \partial\bar{\partial}(z_1\bar{z}_1 + \dots + z_n\bar{z}_n) =$$

$$\frac{1}{2} \partial(z_1 d\bar{z}_1 + \dots + z_n d\bar{z}_n) = \frac{1}{2} (dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + \dots + dz_n \wedge d\bar{z}_n) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\alpha$$

Dunque $\Omega = i\partial\bar{\partial}u = i\partial\bar{\partial}\frac{|z|^2}{2}$, grazie al $i\partial\bar{\partial}$ -lemma Ω è chiusa e ammette $u(z) = \frac{|z|^2}{2}$ come potenziale di Kähler. Possiamo concludere che la metrica h è una metrica Kähleriana.

1.3 La metrica di Fubini-Study su $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$

Consideriamo su $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$ l'atlante formato dalle seguenti carte: $U = (U_j, \phi_j)$ dove $U_j = \{[z_0, \dots, z_m] : z_j \neq 0\}$ e $\phi_j : U_j \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^m$

$$\phi_j([z_0, \dots, z_m]) = \left(\frac{z_0}{z_j}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \dots, \frac{z_m}{z_j} \right)$$

Siamo interessati a costruire una forma Ω su $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$, dalla quale mediante la definizione ricaveremo un tensore h , che dimostreremo essere una metrica Hermitiana.

Ω la costruiamo mediante un potenziale, ovvero esibendo una funzione v per cui siamo in grado di dire che $\Omega = i\partial\bar{\partial}v$.

Se riusciamo ad esibire una funzione v per cui quanto detto sopra vale, grazie al *$i\partial\bar{\partial}$ -lemma* abbiamo che Ω è chiusa e dunque h è una metrica Kähleriana su $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$. Consideriamo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\} & \xrightarrow{\pi} & U_j \subseteq \mathbb{C}\mathbb{P}^m \\ & \searrow f_j & \downarrow \phi_j \\ & & \mathbb{C}^m \end{array}$$

la funzione f_j è la composizione della proiezione π su $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$ con l'applicazione $\phi_j : f_j = \phi_j \circ \pi$. Vediamo come agisce la funzione f_j :

$$\begin{aligned} f_j(z) &= f_j(z_0, \dots, z_m) = \phi_j(\pi(z_0, \dots, z_m)) = \\ &= \phi_j([z_0, \dots, z_m]) = \left(\frac{z_0}{z_j}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \dots, \frac{z_m}{z_j} \right). \end{aligned}$$

Questo ragionamento può essere fatto $\forall j = 0, \dots, m$, purchè la componente j -esima sia sempre diversa da zero: ma dato che z appartiene a $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$ escluso l'origine, allora z ha sempre almeno una componente diversa da zero. Consideriamo ora due applicazioni:

$$u : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{R} \text{ dove } u(z) = \ln(1 + |z|^2) \text{ e}$$

$$v : \mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ dove } v(z) = \ln(|z|^2)$$

cerchiamo di trovare un legame tra queste due applicazioni:

$$\begin{aligned} u(f_j(z)) &= u\left(\frac{z_0}{z_j}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \dots, \frac{z_m}{z_j}\right) = \\ &= \ln\left(1 + \frac{z_0\bar{z}_0 + \dots + z_{j-1}\bar{z}_{j-1} + z_{j+1}\bar{z}_{j+1} + \dots + z_m\bar{z}_m}{z_j\bar{z}_j}\right) = \\ &= \ln\left(\frac{z_j\bar{z}_j + z_0\bar{z}_0 + \dots + z_{j-1}\bar{z}_{j-1} + z_{j+1}\bar{z}_{j+1} + \dots + z_m\bar{z}_m}{z_j\bar{z}_j}\right) = \\ &= \ln\left(\frac{|z|^2}{z_j\bar{z}_j}\right) = \ln(|z|^2) - \ln(z_j\bar{z}_j) = v(z) - \ln(z_j\bar{z}_j) \end{aligned}$$

Adesso calcoliamo la derivata $\partial\bar{\partial}$:

$$\partial\bar{\partial}u(f_j(z)) = \partial\bar{\partial}v(z) - \partial\bar{\partial}\ln(z_j\bar{z}_j) =$$

$$\partial\bar{\partial}v(z) - \partial\left(\frac{z_j d\bar{z}_j}{z_j \bar{z}_j}\right) = \partial\bar{\partial}v(z)$$

Grazie al pull-back di forme differenziali e ricordando che questo commuta con gli operatori di derivazione, si ottiene:

$$f_j^* \partial\bar{\partial}u = \partial\bar{\partial}v$$

che è proprio la relazione che cercavamo tra la funzione u e la funzione v . Tramite l'applicazione f_j siamo in grado di prendere la forma differenziale $\partial\bar{\partial}u$ e mandarla nella forma $\partial\bar{\partial}v$.

Ma $f_j = \phi_j \circ \pi$, quindi $f_j^* = \pi^* \circ \phi_j^*$. In questo modo quando trasportiamo tramite $(\phi_j)^*$ la forma $\partial\bar{\partial}u$ su $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$, possiamo definire una forma globale Ω su tutto $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$.

Tale forma, è così definita:

$$\Omega|_{U_j} = i(\phi_j)^* \partial\bar{\partial}u$$

Se ne facciamo il pull-back tramite l'applicazione π otteniamo:

$$\pi^*(\Omega) = \pi^*(i(\phi_j)^* \partial\bar{\partial}u) = i(\pi^* \circ \phi_j^*) \partial\bar{\partial}u = i f_j^* \partial\bar{\partial}u = i \partial\bar{\partial}v$$

, dove v questa volta è calcolata sugli elementi di $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$.

Quindi di nuovo per il $i\partial\bar{\partial}$ -lemma abbiamo che Ω è chiusa.

Adesso dobbiamo solo costruire una metrica hermitiana che abbia proprio Ω come 2-forma fondamentale.

Definiamo il seguente tensore:

$$h(X, Y) = \Omega(X, JY) \quad \forall X, Y \in T\mathbb{C}\mathbb{P}^m$$

si tratta di un tensore hermitiano e simmetrico.

L'unica cosa che rimane da dimostrare per far vedere che il tensore h è una metrica hermitiana è l'essere definito positivo.

Osserviamo che data l'applicazione $(\phi_j)^*$ esiste un tensore \hat{h} su \mathbb{C}^m tale che $h = (\phi_j)^* \hat{h}$. Provare che h è definito positivo è come provare che \hat{h} lo è:

Dalla definizione di Ω e dall'espressione

$$h(X, Y) = \Omega(X, JY) \quad \forall X, Y \in T\mathbb{C}\mathbb{P}^m$$

si ha

$$\hat{h}(X, Y) = i\partial\bar{\partial}u(X, JY) \quad \forall X, Y \in T\mathbb{C}^m$$

Dato che il gruppo unitario U_m consiste di trasformazioni olomorfe di \mathbb{C}^m che preservano la funzione u , questi preservano anche il tensore \hat{h} .

Inoltre U_m agisce transitivamente sulla sfera di \mathbb{C}^m e dunque è sufficiente dimostrare che \hat{h} è definito positivo in un punto $p = (r, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^m$, per qualche numero positivo $r \in \mathbb{R}$, tale che p appartenga alla sfera di raggio r di \mathbb{C}^m .

Andiamo a calcolarlo :

$$\begin{aligned} \partial\bar{\partial}u &= \partial\bar{\partial}\ln(1 + |z|^2) = \partial\left(\frac{1}{1 + |z|^2} \left(\sum_{i=1}^m z_i d\bar{z}_i\right)\right) = \\ &= -\frac{1}{(1 + |z|^2)^2} \left(\sum_{i=1}^m \bar{z}_i dz_i\right) \wedge \left(\sum_{i=1}^m z_i d\bar{z}_i\right) + \frac{1}{1 + |z|^2} \left(\sum_{i=1}^m dz_i \wedge d\bar{z}_i\right) = \end{aligned}$$

Ristretta al punto p :

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{(1+r^2)^2}(\bar{z}_1 dz_1) \wedge (z_1 d\bar{z}_1) + \frac{1}{1+r^2} \left(\sum_{i=1}^m dz_i \wedge d\bar{z}_i \right) = \\
& -\frac{1}{(1+r^2)^2}(rdz_1) \wedge (rd\bar{z}_1) + \frac{1}{1+r^2} \left(\sum_{i=1}^m dz_i \wedge d\bar{z}_i \right) = \\
& \frac{-r^2}{(1+r^2)^2} dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + \frac{1}{1+r^2} \left(\sum_{i=1}^m dz_i \wedge d\bar{z}_i \right) = \\
& \frac{1}{(1+r^2)^2} \left(-r^2 dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + (1+r^2) \sum_{i=1}^m dz_i \wedge d\bar{z}_i \right) = \\
& \frac{1}{(1+r^2)^2} \left(dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + (1+r^2) \sum_{i=2}^m dz_i \wedge d\bar{z}_i \right) =
\end{aligned}$$

Dunque otteniamo:

$$\hat{h}_p(X, Y) = \frac{2}{(1+r^2)^2} \Re \left(X_1 \bar{Y}_1 + (1+r^2) \sum_{i=2}^m X_i \bar{Y}_i \right)$$

che è definito positivo.

Quindi anche h è definito positivo e possiamo concludere che h definisce una metrica hermitiana su $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$ la cui 2-forma fondamentale è proprio $\Omega = i\partial\bar{\partial}v = i\partial\bar{\partial}|z|^2$.

Grazie al $i\partial\bar{\partial}$ - lemma Ω è chiusa e quindi h è una metrica Kähleriana, detta Metrica di Fubini-Study su $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$.

Capitolo 2

Ulteriori proprietà della metrica di Fubini-Study

Stefano Iovieno

In questa seconda parte del seminario dimostreremo ulteriori proprietà della metrica di Fubini-Study su $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$. Il risultato principale che vogliamo esporre è quello di verificare che la suddetta metrica di Fubini-Study è una metrica di Kähler-Einstein con costante di Einstein $m + 1$, dove m è la dimensione complessa di $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$. Per arrivare a questo dimostreremo dei risultati preliminari. Faremo vedere come la metrica di Fubini-Study h_{FS} sia la proiezione su $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$ di un tensore bilineare simmetrico \tilde{h} semi-definito positivo operante su $\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$. Successivamente mostreremo che l'azione del gruppo unitario $U(m + 1, \mathbb{C})$ su $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$ è isometrica e transitiva, nel senso che preserva la struttura metrica e complessa.

2.1 Definizioni introduttive

Definizione 4. La forma di Ricci ρ di una varietà di Kähler M è così definita:

$$\rho(X, Y) \equiv \text{Ric}(JX, Y), \quad \forall X, Y \in TM$$

dove $\text{Ric}(X, Y) \equiv \text{Tr}\{V \mapsto R(V, X)Y\}$ ed $R(V, X)Y$ è il tensore di curvatura che ha la seguente espressione in relazione alla connessione ∇ su TM :

$$R(V, X)Y \equiv \nabla_V \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_V Y - \nabla_{[V, X]} Y$$

Le proprietà della forma di Ricci ρ che ci saranno utili in seguito sono le seguenti:

1. ρ è chiusa.
2. La classe di coomologia di ρ è uguale, a meno di multipli reali, alla classe di Chern del fibrato canonico $K_M = \bigwedge^{m,0} M$ di M .

3. In coordinate locali vale l'uguaglianza:

$$\rho = -i\partial\bar{\partial} \log \det(h_{\alpha\bar{\beta}})$$

dove $h = \{h_{\alpha\bar{\beta}}\}$ è la metrica kähleriana su M .

Definizione 5. Una metrica h è detta di Kähler-Einstein se è una metrica di Kähler e se esiste una costante λ appartenente ad \mathbb{R} tale che

$$\text{Ric}(X, Y) = \lambda h(X, Y), \quad \forall X, Y \in TM,$$

oppure, equivalentemente

$$\rho(X, Y) = \lambda \Omega(X, Y), \quad \forall X, Y \in TM$$

2.2 Risultati preliminari

Lemma 2. La proiezione canonica $\pi: \mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^m$ è una submersione, col significato che $d\pi_z$ è un'applicazione suriettiva $\forall z \in \mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$. Inoltre

$$\text{Ker}(d\pi_z) = \text{spann}\{z\}.$$

Dimostrazione. Sia $z \in \mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$ tale che $z_j \neq 0$. Sia

$$\begin{aligned} \pi: \mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^m \\ (z_0, \dots, z_m) &\mapsto [z_0, \dots, z_m] \end{aligned} \quad (2.1)$$

la proiezione canonica su $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$ e sia ϕ_j la carta

$$\begin{aligned} \phi_j: U_j &\rightarrow \mathbb{C}^m \\ [z_0, \dots, z_m] &\mapsto \left(\frac{z_0}{z_j}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \dots, \frac{z_m}{z_j} \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

che va dall'aperto $U_j \equiv \{[z_0, \dots, z_m] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^m : z_j \neq 0\} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^m$ in \mathbb{C}^m . Adesso consideriamo la funzione composta $f_j \equiv \phi_j \circ \pi$,

$$f_j(z_0, \dots, z_m) = \left(\frac{z_0}{z_j}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \dots, \frac{z_m}{z_j} \right). \quad (2.3)$$

Per semplicità consideriamo $j = 0$ ed indichiamo f_0 con f ,

$$f_0(z_0, \dots, z_m) \equiv f(z_0, \dots, z_m) = \frac{1}{z_0}(z_1, \dots, z_m).$$

Il differenziale di f in z è:

$$\begin{aligned} df_z &= d(\phi_0 \circ \pi)_z = (d\phi_0)_{\pi(z)} \circ d\pi_z = \\ &= \frac{1}{z_0}(dz_1, \dots, dz_m) - \frac{dz_0}{z_0^2}(z_1, \dots, z_m) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Prendiamo in considerazione $v \in T_z(\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\})$, un vettore generico tangente in z e calcoliamo il differenziale di f in v :

$$\begin{aligned} df_z(v) &= (d\phi_0)_{\pi(z)}(d\pi_z(v)) = \\ &= \frac{1}{z_0}(v_1, \dots, v_m) - \frac{v_0}{z_0^2}(z_1, \dots, z_m). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Da questo segue che

$$v \in \text{Ker}df_z \iff v \in \text{Ker}d\pi_z \quad (2.6)$$

Difatti:

1. \Rightarrow

$v \in \text{Ker}df_z \iff 0 = df_z(v) = (d\phi_0)_{\pi(z)}(d\pi_z(v)) \iff d\pi_z(v) = 0$, dato che $(d\phi_0)_{\pi(z)}$ è un'applicazione iniettiva.

2. \Leftarrow

$v \in \text{Ker}d\pi_z \iff d\pi_z(v) = 0$, per cui:

$$df_z(v) = (d\phi_0)_{\pi(z)}(d\pi_z(v)) = (d\phi_0)_{\pi(z)}(0) = 0$$

Adesso, se $v \in \text{Ker}df_z$, allora risulta:

$$0 = df_z(v) = \frac{1}{z_0}(v_1, \dots, v_m) - \frac{v_0}{z_0^2}(z_1, \dots, z_m)$$

Questo implica che

$$\frac{1}{z_0}(v_1, \dots, v_m) = \frac{v_0}{z_0^2}(z_1, \dots, z_m) \iff \frac{1}{z_0}v_i = \frac{v_0}{z_0^2}z_i$$

che ci porta a dire che

$$v_i = \frac{v_0}{z_0}z_i \quad i \in \{1, \dots, m\}$$

e

$$v_0 = \frac{v_0}{z_0}z_0$$

Quindi $v = \left(\frac{v_0}{z_0}\right)z$, per cui

$$\text{Ker}df_z = \text{Ker}d\pi_z = \text{spann}\{z\}. \quad (2.7)$$

Inoltre, visto che

$$m = \dim\left(T_z(\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}) / \text{Ker}df_z\right) = \dim(\text{Im}d\pi_z),$$

risulta che $d\pi_z$ è suriettiva $\forall z$

.

□

Consideriamo adesso lo spazio vettoriale z^\perp ortogonale a $z \in \mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$ rispetto al prodotto hermitiano canonico:

$$z^\perp \equiv \left\{y \in \mathbb{C}^{m+1} : \sum_{j=0}^m z_j \bar{y}_j = 0\right\}. \quad (2.8)$$

$D_z \equiv z^\perp$, definita per ogni $z \in \mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$, individua una distribuzione complessa di codimensione 1 del fibrato tangente di $\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$. Sia

$$X \mapsto X^\perp$$

la proiezione ortogonale su D_z in $T_z(\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\})$ e definiamo un tensore bilineare simmetrico \tilde{h} su $\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$:

$$\tilde{h}_z(X, Y) \equiv \frac{2}{|z|^2} \langle X^\perp, Y^\perp \rangle, \quad \forall X, Y \in T_z(\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}), \quad (2.9)$$

dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è il prodotto hermitiano canonico.

Lemma 3. *La (1-1)-forma $\varphi(X, Y) \equiv \tilde{h}(JX, Y)$ associata al tensore \tilde{h} soddisfa la relazione*

$$\varphi \equiv i\partial\bar{\partial}\log(|z|^2)$$

su $\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$.

Dimostrazione. È sufficiente provare la relazione nel punto $p = (r, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$, $r \in \mathbb{R}_+$, perché entrambi i membri dell'uguaglianza non variano sotto l'azione del gruppo unitario $U(m+1, \mathbb{C})$, che è transitiva sulle sfere. Risulta che:

$$\begin{aligned} \partial\bar{\partial}\log(|z|^2) &= \partial\left(\frac{1}{|z|^2} \left(\sum_{i=0}^m z_i d\bar{z}_i\right)\right) = \\ &= \frac{1}{|z|^2} \sum_{i=0}^m dz_i \wedge d\bar{z}_i - \frac{1}{|z|^4} \left(\sum_{i=0}^m \bar{z}_i dz_i\right) \wedge \left(\sum_{i=0}^m z_i d\bar{z}_i\right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Se calcoliamo la precedente espressione in $p = (r, 0, \dots, 0)$, otteniamo:

$$(\partial\bar{\partial}\log(|z|^2))_p = \frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^m (dz_i \wedge d\bar{z}_i)_p. \quad (2.11)$$

D'altra parte, sempre in p risulta che:

$$\begin{aligned} -i\varphi_p(\partial/\partial z_\alpha, \partial/\partial \bar{z}_\beta) &= -i\tilde{h}_p(J\partial/\partial z_\alpha, \partial/\partial \bar{z}_\beta) = \\ &= -i\tilde{h}_p(i\partial/\partial z_\alpha, \partial/\partial \bar{z}_\beta) = \tilde{h}_p(\partial/\partial z_\alpha, \partial/\partial \bar{z}_\beta) = \\ &= \frac{2}{r^2} \langle (\partial/\partial z_\alpha)^\perp, (\partial/\partial \bar{z}_\beta)^\perp \rangle = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha = 0 \text{ o } \beta = 0 \text{ dato che } (\partial/\partial z_0)_p^\perp = 0 \\ \frac{2}{r^2} \langle (\partial/\partial z_\alpha), (\partial/\partial \bar{z}_\beta) \rangle = \frac{1}{r^2} \delta_{\alpha\beta} & \end{cases} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Quindi

$$-i\varphi_p = \frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^m (dz_i \wedge d\bar{z}_i)_p = (\partial\bar{\partial}\log(|z|^2))_p,$$

e

$$\varphi_p = i(\partial\bar{\partial}\log(|z|^2))_p \quad (2.13)$$

□

Dato che nella parte precedente del seminario abbiamo visto che $\pi^*\Omega = i(\partial\bar{\partial}\log(|z|^2))_p$, e sempre ricordando che $\Omega(X, JY) = h(X, Y)$, segue che

$$\pi^*\Omega(X, JY) = i\partial\bar{\partial}v(X, JY) = \tilde{h}(JX, JY) = \tilde{h}(X, Y), \quad (2.14)$$

ovvero che $\pi^*h = \tilde{h}$, e che quindi la metrica di Fubini-Study h_{FS} su $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$ è data dalla proiezione del tensore semi-definito positivo \tilde{h} .

Proposizione 1. *Il gruppo unitario $U(m+1, \mathbb{C})$ agisce transitivamente tramite isometrie olomorfe su $(\mathbb{C}\mathbb{P}^m, h_{FS})$, o detto in altri termini $A^*h_{FS} = h_{FS}$, $A \in U(m+1, \mathbb{C})$.*

Dimostrazione. Dati $A \in U(m+1, \mathbb{C})$, $z \in \mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$ e $\alpha \in \mathbb{C}^*$, dalla linearità di A segue che $A(\alpha z) = \alpha A(z)$, e questo comporta che l'azione di $U(m+1, \mathbb{C})$ su $\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$ può essere trasportata ad un'azione su $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$ nel modo seguente: la mappa

$$\begin{aligned} A &\mapsto \tilde{A}: \mathbb{C}\mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^m \\ [z] &\mapsto \tilde{A}z \equiv [Az] \end{aligned} \quad (2.15)$$

che associa ad $A \in U(m+1, \mathbb{C})$ sposta l'azione di $U(m+1, \mathbb{C})$ su $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$, e ques'azione è ben definita perché \tilde{A} non dipende dalla classe di z .

Proviamo che:

1. \tilde{A} agisce olomorficamente su $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$: difatti dato l'atlante (ϕ_j, U_j) di $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$ risulta che

$$\phi_i \circ \tilde{A} \circ \phi_j^{-1}$$

è una funzione olomorfa su \mathbb{C}^m .

2. $U(m+1, \mathbb{C})$ agisce transitivamente su $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$ perché agisce transitivamente su \mathbb{C}^{m+1} .

3. È un'isometria. Infatti:

$$A^*v(z) = v \circ A(z) = \log |Az|^2 = \log |z|^2 = v(z). \quad (2.16)$$

Da questo segue che

$$\pi^*(\tilde{A}^*(\Omega)) = A^*\pi^*(\Omega) = A^*(i\partial\bar{\partial}v) = i\partial\bar{\partial}A^*v = i\partial\bar{\partial}v = \pi^*(\Omega). \quad (2.17)$$

Dal lemma 2 sappiamo che π_* è suriettiva e quindi π^* è iniettiva. Per cui

$$\tilde{A}^*\Omega = \Omega \quad (2.18)$$

ovvero \tilde{A} preserva la struttura complessa e quindi è un'isometria.

□

2.3 La metrica di Fubini-Study come metrica di Einstein

Adesso vogliamo dimostrare il risultato principale, ovvero che la metrica di Fubini-Study su $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$ è una metrica di Einstein. Dato che per la proposizione 1 esiste un'azione isometrica transitiva del gruppo unitario su $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$, basta verificare l'asserzione in un punto particolare della varietà, ad esempio in $p = [1, 0, \dots, 0]$. Dalla parte precedente del seminario sappiamo che, in p

$$\Omega = i(\phi_0)^*\partial\bar{\partial}u, \quad u = \log(1 + |z|^2)$$

e quindi

$$\begin{aligned}
(\phi_0^*)^{-1}\Omega &= i\partial\bar{\partial}u = i\partial\bar{\partial}\log(1+|z|^2) = \\
&= \frac{i}{1+|z|^2} \sum_{i=1}^m dz_i \wedge d\bar{z}_i - \frac{i}{(1+|z|^2)^2} \left(\sum_{i=1}^m \bar{z}_i dz_i \right) \wedge \left(\sum_{i=1}^m z_i d\bar{z}_i \right),
\end{aligned} \tag{2.19}$$

che calcolata in $q = (r, 0, \dots, 0)$ (q appartiene alla controimmagine di p tramite la proiezione canonica π su $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$) diventa:

$$(\phi_0^*)^{-1}\Omega_q = \frac{i}{(1+r^2)^2} \left(dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + (1+r^2) \sum_{i=2}^m dz_i \wedge d\bar{z}_i \right)_q. \tag{2.20}$$

Lemma 4. Sia dx la forma di volume su \mathbb{C}^m

$$dx \equiv dx_1 \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dx_m \wedge dy_m = \frac{i^m}{2^m} dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_m \wedge d\bar{z}_m.$$

Allora l'espressione locale della 2-forma di Kähler nella carta ϕ_0 soddisfa

$$((\phi_0^*)^{-1})^m = \frac{2^m m!}{(1+|z|^2)^{m+1}} dx.$$

Dimostrazione. Entrambi i membri sono invarianti per l'azione di $U(m, \mathbb{C})$ su \mathbb{C}^m , che è transitiva sulle sfere, perciò basta provare l'asserzione nel punto $q = (r, 0, \dots, 0)$. Difatti

$$\begin{aligned}
((\phi_0^*)^{-1})^m &= \left(\frac{i}{(1+r^2)^2} \left(dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + (1+r^2) \sum_{i=2}^m dz_i \wedge d\bar{z}_i \right) \right)^m = \\
&= \frac{i^m}{(1+r^2)^{2m}} (1+r^2)^{m-1} m! dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_m \wedge d\bar{z}_m = \\
&= \frac{2^m m!}{(1+|r|^2)^{m+1}} dx
\end{aligned} \tag{2.21}$$

□

Se adesso consideriamo una metrica hermitiana h su \mathbb{C}^m con forma fondamentale φ , quest'ultima è legata al determinante di h nel modo seguente:

$$\varphi = i \sum_{\alpha, \beta} h_{\alpha\bar{\beta}} dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta,$$

e quindi

$$\varphi^m = \left(i \sum_{\alpha, \beta} h_{\alpha\bar{\beta}} dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta \right)^m = i^m m! \det(h_{\alpha\bar{\beta}}) dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_m \wedge d\bar{z}_m = 2^m m! \det(h_{\alpha\bar{\beta}}) dx.$$

Utilizzando il risultato del lemma 4, quindi, risulta nel nostro caso che

$$d \equiv \det(h_{\alpha\bar{\beta}}) = \frac{1}{(1+|z|^2)^{m+1}}, \tag{2.22}$$

per cui

$$\log d = -(m+1) \log(1+|z|^2). \quad (2.23)$$

Dall'espressione locale della forma di Ricci definita all'inizio segue che

$$\rho = -i\partial\bar{\partial} \log d = (m+1)i\partial\bar{\partial} \log(1+|z|^2) = (m+1)(\phi_0^*)^{-1}\Omega, \quad (2.24)$$

ed abbiamo quindi provato che la metrica di Fubini-Study su $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$ è una metrica di Einstein con costante $\lambda = m+1$.

2.4 Aspetti fisici

Diamo una giustificazione del perché una metrica proporzionale al tensore di Ricci si chiami di Einstein. Il motivo di questo nome è dato da una motivazione fisica. Per questo motivo introduciamo i concetti che ci servono. La teoria della relatività di Einstein è una teoria della gravitazione che fa largo uso di concetti geometrici. Consideriamo l'equazione di Einstein in relatività generale con costante cosmologica Λ ,

$$R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2}g_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta} \quad (2.25)$$

che è un'equazione differenziale non lineare del secondo ordine dove

- $R_{\alpha\beta}$ è il tensore di Ricci;
- $g_{\alpha\beta}$ è il tensore metrico;
- R è lo scalare di Ricci, $R = \sum_{\alpha} R_{\alpha\alpha} = \sum_{\alpha,\beta} R_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$;
- Λ è la costante cosmologica;
- $T_{\alpha\beta}$ è il tensore energia-impulso.

Nel vuoto ($T_{\alpha\beta} = 0$) l'equazione di Einstein si riduce ad essere

$$R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2}g_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = 0$$

ovvero

$$R_{\alpha\beta} = \left(\frac{R}{2} - \Lambda\right)g_{\alpha\beta}. \quad (2.26)$$

Prendendo la traccia di entrambi i membri si ottiene:

$$R = \frac{2\Lambda n}{n-2}. \quad (2.27)$$

dove n è un'intero che dipende dalla segnatura della metrica (nel caso di metriche $g_{\alpha\beta}$ definite positive è la traccia di $g_{\alpha\beta}$, quindi la dimensione della varietà in considerazione). Quindi alla fine, sostituendo il valore di R , si ottiene

$$R_{\alpha\beta} = \left(\frac{R}{2} - \Lambda\right)g_{\alpha\beta} = \left(\frac{2\Lambda}{n-2}\right)g_{\alpha\beta}, \quad (2.28)$$

per cui la metrica è proporzionale al tensore di Ricci.

Capitolo 3

Metriche di Calabi-Yau come esempio di metriche di Kähler

In questa seconda parte esporremo brevemente alcuni concetti che ci porteranno all'enunciazione della congettura di Calabi, risolta favorevolmente da Yau. Introduciamo le varietà di Calabi-Yau che sono esempi di varietà di Kähler localmente Ricci-piatte. Assumiamo d'ora in avanti che le varietà sotto esame siano connesse.

3.1 Trasporto parallelo e gruppo di ologonia

Sia M una varietà, $E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale su M , ∇^E una connessione su E . Sia $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ una curva C^∞ su M . Il pull-back $\gamma^*(E)$ di E su $[0, 1]$ è un fibrato vettoriale su $[0, 1]$ con fibra $E_{\gamma(t)}$, $t \in [0, 1]$. Esiste un pull-back tramite γ di ∇^E che dà una connessione su $\gamma^*(E)$ sopra $[0, 1]$.

Definizione 6. Sia M una varietà, E un fibrato vettoriale su M e ∇^E una connessione su E . Sia $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ una curva C^∞ (anche a tratti), con $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$, $x, y \in M$. Allora $\forall e \in E_x$ esiste un'unica sezione C^∞ s di $\gamma^*(E)$ che soddisfa la relazione

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)}^E s(t) = 0 \quad \forall t \in [0, 1],$$

con $s(0) = e$. Definiamo

$$P_\gamma(e) = s(1),$$

allora $P_\gamma: E_x \rightarrow E_y$ è una mappa lineare ben definita chiamata trasporto parallelo.

Definizione 7. Sia M una varietà, E un fibrato vettoriale su M e ∇^E una connessione su E . Si fissi un punto $x \in M$. Si dice che γ è un loop con base x se $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ è un cammino C^∞ a tratti tale che $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. Da questo risulta che $P_\gamma: E_x \rightarrow E_x$ è una mappa lineare invertibile, ovvero che

$P_\gamma \in GL(E_x)$. Il gruppo d'olonomia $Hol_x(\nabla^E)$ di ∇^E con base x è quindi definito come

$$Hol_x(\nabla^E) = \{P_\gamma : \gamma \text{ è un loop con base } x\} \subset GL(E_x). \quad (3.1)$$

Il gruppo d'olonomia ha le seguenti proprietà:

1. $Hol_x(\nabla^E)$ è un sottogruppo di Lie di $GL(E_x)$, difatti, se γ e δ sono loop in x definiamo

$$\begin{aligned} \bullet (\gamma\delta)(t) &= \begin{cases} \delta(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \\ \bullet \gamma^{-1}(t) &= \gamma(1-t), \quad t \in [0, 1] \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} P_{\gamma\delta} &= P_\gamma \circ P_\delta, \\ P_{\gamma^{-1}} &= P_\gamma^{-1}. \end{aligned}$$

2. Non dipende dal punto base x nel senso seguente. Siano $x, y \in M$ e $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ un cammino C^∞ da x ad y , allora

$$\begin{aligned} P_\gamma: E_x &\rightarrow E_y \quad \text{e} \\ Hol_y(\nabla^E) &= P_\gamma Hol_x(\nabla^E) P_\gamma^{-1} \end{aligned}$$

Adesso, se E ha fibra isomorfa ad \mathbb{R}^k , risulta che $GL(E_x) \simeq GL(k, \mathbb{R})$. In questo senso possiamo considerare $Hol_x(\nabla^E)$ un sottogruppo di $GL(k, \mathbb{R})$ definito a meno di coniugazione, e con questo si intende l'indipendenza dal punto base x .

3. Se M è semplicemente connessa allora $Hol_x(\nabla^E)$ è connesso. Difatti, preso un loop γ , questo può essere deformato in maniera continua alla mappa costante in x . La corrispondente famiglia di trasporti paralleli P rappresenta un cammino continuo che unisce P_γ con l'identità in $Hol_x(\nabla^E)$.

3.2 Metriche di Kähler e di Calabi-Yau

Teorema 1. *Sia M una varietà connessa e ∇ una connessione su TM . Sia $E = \otimes^k TM \otimes \otimes^l T^*M$. Fissato $x \in M$, sia $H = Hol_x(\nabla)$. H agisce in maniera naturale anche su $E_x = \otimes^k T_x M \otimes \otimes^l T_x^* M$. Supponiamo che $S \in C^\infty(\otimes^k TM \otimes \otimes^l T^*M)$ sia una sezione C^∞ del fibrato tensoriale tale che $\nabla S = 0$ (un tensore di questo tipo viene detto costante). Allora $S|_x$ non varia tramite l'azione di H su $\otimes^k T_x M \otimes \otimes^l T_x^* M$. Viceversa, se $S|_x \in \otimes^k T_x M \otimes \otimes^l T_x^* M$ non varia tramite l'azione di H , esso si estende ad un unico tensore costante $S \in C^\infty(\otimes^k TM \otimes \otimes^l T^*M)$.*

Dimostrazione. Sia γ un loop su M con base x e P_γ il rispettivo operatore in $H = Hol_x(\nabla)$. Visto che $\nabla S = 0$, il pull-back $\gamma^*(S)$ è una sezione parallela di $\gamma^*(E)$ su $[0, 1]$. Per cui $P_\gamma(S|_{\gamma(0)}) = S|_{\gamma(1)}$. Ma $\gamma(0) = \gamma(1) = x$, quindi $P_\gamma(S|_x) = S|_x$. Data l'arbitrarietà di γ segue che $S|_x$ è fissato dall'azione di H su E_x .

Adesso supponiamo invece che $S_x \in E_x$ sia fissato da H . Definiamo una sezione $S \in C^\infty(E)$ nel modo seguente. Sia y un qualsiasi punto di M . Dato che M è connessa, siano $\alpha: [0, 1] \rightarrow M$ e $\beta: [0, 1] \rightarrow M$ due mappe lisce a tratti che collegano x ad y , $\alpha(0) = \beta(0) = x$, $\alpha(1) = \beta(1) = y$. Siano $P_\alpha, P_\beta: E_x \rightarrow E_y$ le mappe di trasporto parallelo. Risulta che $P_{\alpha^{-1}\beta} = P_\alpha^{-1}P_\beta$. Ma $\alpha^{-1}\beta$ è un loop con base x , quindi $P_{\alpha^{-1}\beta} = P_\alpha^{-1}P_\beta = P_\gamma \in H$. Dall'ipotesi, segue che $P_\alpha^{-1}P_\beta(S_x) = S_x$ e quindi che $P_\alpha(S_x) = P_\beta(S_x)$ e quindi l'elemento $P_\alpha(S_x) \in E_y$ non dipende dalla curva scelta α congiungente x ad y . Definiamo S sezione di E tramite la relazione $S_y = P_\alpha(S_x)$, dove α è un cammino liscio a tratti che unisce x ad y . Se γ è un qualsiasi cammino in M allora $\gamma^*(S)$ è parallelo e quindi S è differenziabile, $\nabla S = 0$ ed $S \in C^\infty(E)$. \square

Definizione 8. Definiamo $Hol_x(g)$ con g metrica riemanniana sulla varietà M , come il gruppo d'olonomia della connessione di Levi-Civita ∇ su g :

$$Hol_x(g) \equiv Hol_x(\nabla), \quad \nabla \text{ connessione di Levi-Civita.} \quad (3.2)$$

In base ai differenti gruppi di olonomia si hanno varie classificazioni. Le seguenti sono quelle che ci interessano:

- i) una metrica g con $Hol(g) \subseteq U(m)$ è detta *metrica di Kähler*;
- ii) una metrica g con $Hol(g) \subseteq SU(m)$ è detta *metrica di Calabi-Yau*.

Dato che $SU(m) \subset U(m)$, le metriche di Calabi-Yau sono anche metriche di Kähler. Adesso dimostriamo che la definizione appena data di metrica di Kähler è equivalente a quella già conosciuta.

Proposizione 2. *Una varietà riemanniana (M, g, J) di dimensione $2m$ è di Kähler se e solo se $Hol(g) \subseteq U(m)$.*

Dimostrazione. (M, g, J) è di Kähler se e solo se $\nabla\omega = 0$ (dove ω è la 2-forma fondamentale), ovvero se e solo se ω è un tensore costante. Da questo segue, per il teorema 1, che questo si verifica se e solo se $Hol(g)$ preserva ω_m , $m \in M$. Data la struttura hermitiana $h = g + i\omega$ e $P_\gamma \in Hol(g)$, e ricordando che la connessione ∇ è di Levi-Civita e quindi compatibile con la metrica g , risulta che

$$\begin{aligned} h_m(P_\gamma X, P_\gamma Y) &= g_m(P_\gamma X, P_\gamma Y) + i\omega_m(P_\gamma X, P_\gamma Y) = \\ &= g_m(X, Y) + i\omega_m(X, Y) = h_m(X, Y), \end{aligned} \quad (3.3)$$

ovvero $Hol(g) \subseteq U(m)$. \square

Adesso, ricordando che per una varietà di Kähler risulta che $c_1(M) = c_1(K_M) = \frac{1}{2\pi}[\rho]$, dove $c_1(M)$ è la prima classe di Chern di M , abbiamo il seguente risultato:

Proposizione 3. *Sia (M, g, J) una varietà di Kähler semplicemente connessa. Allora $Hol(g) \subseteq SU(m)$ se e solo se g Ricci-piatta.*

Dimostrazione. (M, g, J) è Ricci-piatta se e solo se $\rho = 0$, ovvero se e solo se $\frac{1}{2\pi}[\rho] = c_1(M) = c_1(K_M) = 0$, il che equivale a dire che $K_M = \bigwedge^{m,0} T^*M$ ammette una famiglia locale di sezioni costanti che possono essere estese globalmente grazie alla semplice connessione di M . Quindi presa $\omega \in K_M: \nabla\omega = 0$, questo equivale a dire, per il teorema 1, che $Hol(g)$ lascia invariata ω_x su $T_x M$,

$x \in M$. Ma il sottogruppo di $U(m)$ che preserva $dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_m$ è $SU(m)$, questo perché $A \in Hol(g)$ agisce su $dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_m$ tramite il prodotto per il determinante:

$$A(dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_m) = \det(A) dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_m. \quad (3.4)$$

□

Abbiamo per cui dimostrato che le varietà di Calabi-Yau semplicemente connesse sono Ricci-piatte e quindi anche varietà di Einstein con costante $\lambda = 0$.

3.3 Teorema di Calabi-Yau

La congettura di Calabi specifica quali (1-1)-forme chiuse su una varietà complessa compatta possono essere la forma di Ricci di una metrica di Kähler. La congettura è stata formulata da Calabi nel 1954 e risolta da Yau nel 1976. Daremo solo l'enunciato di questo teorema perché la dimostrazione è lunga ed andrebbe al di là degli scopi del seminario. Il lettore interessato troverà una dimostrazione in [6].

Teorema 2 (Congettura di Calabi/Teorema di Calabi-Yau). *Sia (M, J) una varietà complessa compatta e g una metrica kähleriana su M con forma di Kähler ω . Supponiamo che ρ' sia una (1-1)-forma reale chiusa su M tale che*

$$[\rho'] = 2\pi_1(M).$$

Allora esiste una unica metrica di Kähler g' su M con forma di Kähler ω' nella stessa classe di equivalenza di ω

$$[\omega'] = [\omega] \in H^2(M, \mathbb{R}),$$

e la forma di Ricci di g' è ρ' .

Il fatto che $[\omega] = [\omega']$ ci dice che g e g' sono nella stessa *classe di Kähler* (se ω è la 2-forma fondamentale di g , $[\omega]$ è detta classe di Kähler di g). Un'importante conseguenza di questo teorema è che quando $c_1(M) = 0$ possiamo prendere $\rho' \equiv 0$ e quindi g' è Ricci-piatta:

Corollario 1. *Sia (M, J) una varietà complessa compatta con $c_1(M) = 0$. Allora ogni classe di Kähler su M contiene un'unica metrica di Kähler g Ricci-piatta.*

Il teorema di Calabi-Yau si iscrive nella più generale serie di tentativi che cercano di definire le condizioni per le quali è possibile che una varietà complessa compatta ammetta una metrica di Kähler-Einstein. Una condizione necessaria affinché questo avvenga è che la varietà in questione abbia prima classe di Chern con segno negativo, positivo, o nullo (nel senso che se φ è un rappresentante della classe di Chern, allora $\varphi(\cdot, \cdot)$ è un tensore simmetrico positivo, negativo o è nullo). In genere difatti una generica varietà complessa compatta non ammette una metrica di Kähler-Einstein. Il corollario al teorema di Calabi-Yau ci dice che la condizione necessaria è anche sufficiente, quindi nel caso di classe di Chern nulla esiste una siffatta metrica. Stessa cosa vale per varietà con classe di Chern positiva, difatti vale il seguente:

Teorema 3 (Teorema di Aubin-Calabi-Yau). *Una qualsiasi varietà complessa compatta con prima classe di Chern negativa ammette una metrica di Kähler-Einstein con curvatura scalare negativa. La metrica è unica a meno di omotetie.*

Bibliografia

- [1] Besse A. *Einstein Manifolds*, Springer, 2007.
- [2] Griffiths P., Harris, J. *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley, 1994.
- [3] Gross M., Huybrechts D., Joyce D. *Calabi-Yau Manifolds and Their Friends*
- [4] Hübsch T. *Calabi-Yau Manifolds. A Bestiary for Physicists*, World Scientific, 1992.
- [5] Huybrechts D. *Complex Geometry*, Springer, 2004.
- [6] Joyce D. *Compact Manifolds With Special Holonomy*, Oxford University Press, 2000.
- [7] Moroianu A. *Lectures on Kähler Geometry*, Cambridge University Press, 2007.