SAPIENZA Università di Roma
Facoltà di Matematica

Seminario per il corso di Geometria Superiore

Anno accademico 2013/14

Forme differenziali e olomorfe

Marta Catalano, Eugenio Clementini, Francesco Allegra

Professore: Paolo Piccinni

Indice

Capitolo 1

Introduzione alle forme differenziali complesse.

Marta Catalano

Nell'ambito delle varietà differenziabili abbiamo chiarito il significato di funzione, sezione e fibrati vettoriali lisci. Allo stesso modo sulle varietà complesse possiamo parlare di funzioni, sezioni e fibrati vettoriali olomorfi. Le forme differenziali complesse vengono introdotte con l'intento di caratterizzare i secondi concetti rispetto ai primi, agevolando notevolmente il calcolo sulle varietà complesse.
La loro costruzione si compie a partire dalle forme differenziali reali, generalizzando la nozione di complessificazione di uno spazio vettoriale reale. Possono essere definite su una qualsiasi varietà differenziabile, sebbene la presenza di una struttura quasi complessa ne consenta un'utile decomposizione, che ci permetterà di caratterizzare le varietà complesse.

1.1 Complessificazioni

Consideriamo $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale reale bidimensionale. Dato uno spazio vettoriale reale V possiamo definire il **complessicato** di V come $V^{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. A priori si tratta di uno spazio vettoriale reale, tuttavia vi si definisce in modo immediato una struttura di spazio vettoriale complesso ponendo $z(v_1 \otimes z_1) := v_1 \otimes (zz_1)$ per ogi $z \in \mathbb{C}$.
È spesso utile ricorrere al seguente isomorfismo canonico tra spazi vettoriali complessi:

$$V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong V \oplus iV \tag{1.1}$$

e osservare che $dim_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}}) = dim_{\mathbb{R}} V$.
Possiamo estendere il procedimento di complessificazione ai fibrati vettoriali, complessifican-

do ciascuna fibra. Sia $E = \sqcup_p E_p$ un fibrato vettoriale di rango n, allora:

$$E^{\mathbb{C}} := \bigsqcup_p (E_p \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \tag{1.2}$$

In questo modo otteniamo un fibrato vettoriale di rango $2n$ che può essere interpretato in termini di **fibrato vettoriale complesso**, ovvero un fibrato vettoriale le cui fibre sono spazi vettoriali complesse, di rango complesso n.

Sia ora M una varietà differenziabile di dimensione n. Dal momento che il duale di un fibrato, la sua k-ima potenza esterna e la somma diretta di fibrati sono essi stessi fibrati, possiamo considerare il fibrato k-ima potenza esterna del fibrato cotangente e il fibrato algebra esterna del fibrato cotangente:

$$\Lambda^k M := \Lambda^k(T^*M) = \bigsqcup_{x \in M} \Lambda^k(T^*_x M) \tag{1.3}$$

$$\Lambda^* M := \Lambda^*(T^*M) = \bigoplus_{k=1}^{n} \Lambda^k M \tag{1.4}$$

Osserviamo che se M ha dimensione n, il fibrato tangente è un fibrato di rango n. Dal momento che il duale di un fibrato di rango n è un fibrato di dimensione n, mentre la sua k-ima potenza esterna è un fibrato di dimensione $\binom{n}{k}$, $\Lambda^k M$ risulta essere un fibrato di rango $\binom{n}{k}$.

Consideriamo il complessificato di $\Lambda^* M$:

$$\Lambda^*_{\mathbb{C}} M := \Lambda^*(T^*M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \tag{1.5}$$

Si tratta di un fibrato vettoriale reale di rango $2n$ le cui sezioni prendono nome di **forme differenziali complesse** e vengono denotate con $\mathbb{C}^\infty(\Lambda^*_{\mathbb{C}} M)$. Osserviamo che l'isomorfismo (1.1) considerato fibra per fibra permette di identificare una forma differenziale complessa $\omega \in \mathbb{C}^\infty(\Lambda^*_{\mathbb{C}} M)$ con $\omega = \sigma + i\theta$, dove σ e θ sono forme differenziali reali.

In analogia con il caso reale chiamamo **k-forme** differenziali complesse le sezioni di $\Lambda^k_{\mathbb{C}} M$. Anche in questo caso l'isomorfismo (1.1) permette di scrivere ogni $\omega \in \mathbb{C}^\infty(\Lambda^k_{\mathbb{C}} M)$ come $\omega = \sigma + i\theta$, dove $\sigma, \theta \in \mathbb{C}^\infty(\Lambda^k M)$.

Osserviamo che $\Lambda^k(T^*M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ eredita un'operazione di **coniugio**: $\omega := \alpha \otimes z \to \bar{\omega} = \alpha \otimes \bar{z}$, che si estende alle sezioni. Si vede immediatamente che se $\sigma, \theta \in (\Lambda^k M)$ sono tali che $\omega = \sigma + i\theta$, allora $\bar{\omega} = \sigma - i\theta$.

Procedendo allo stesso modo chimiamo **campi vettoriali complessi** i complessificati dei campi vettoriali reali. Le scritture che otteniamo generalizzando (1.1) permettono di estendere per linearità le operazioni che conosciamo su campi vettoriali e forme differenziali reali. In particolare ci soffermiamo su due operazioni che ci saranno utili nel seguito, la derivata esterna e la contrazione.

Chiamiamo **derivata esterna** o differenziale l'applicazione lineare

$$d \colon \mathbb{C}^\infty(\Lambda^*_{\mathbb{C}} M) \to \mathbb{C}^\infty(\Lambda^*_{\mathbb{C}} M) \tag{1.6}$$

$$\omega = \sigma + i\tau \mapsto d\omega := d_{\mathbb{R}}\sigma + i d_{\mathbb{R}}\tau \tag{1.7}$$

dove $d_{\mathbb{R}}$ indica il differenziale esterno reale. Vediamo che grazie alla linearità la derivata esterna ne mantiene le proprietà caratterizzzzanti, ovvero:

- Per ogni k, $d : \mathbb{C}^\infty(\Lambda^k_{\mathbb{C}} M) \to \mathbb{C}^\infty(\Lambda^{k+1}_{\mathbb{C}} M)$
- Per $f \in \mathbb{C}^\infty(\Lambda^0_{\mathbb{C}} M) = \mathbb{C}^\infty(M, \mathbb{C})$ vale $d(f) = df$ differenziale usuale
- Se $\omega \in \mathbb{C}^\infty(\Lambda^k_{\mathbb{C}} M)$ e $\rho \in \mathbb{C}^\infty(\Lambda^*_{\mathbb{C}} M)$, allora vale la **regola di Leibniz**:
$$d(\omega \wedge \rho) = d\omega \wedge \rho + (-1)^k \omega \wedge d\rho \tag{1.8}$$
- $d^2 = 0$

Per poter definire l'operazione di contrazione di una k-forma dobbiamo innanzitutto osservare che vale il seguente isomorfismo canonico:

$$\Lambda^k(T^*M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \Lambda^k_{\mathbb{C}}(T^*M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \tag{1.9}$$

Dal momento che

$$\Lambda^k(T^*M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \bigsqcup_{x \in M} \Lambda^k(T^*_x M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \quad , \quad \Lambda^k_{\mathbb{C}}(T^*M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = \bigsqcup_{x \in M} \Lambda^k_{\mathbb{C}}(T^*_x M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \tag{1.10}$$

l'affermazione segue dall'isomorfismo $\Lambda^k_{\mathbb{C}}(V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \cong \Lambda^k(V) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ dove V è uno spazio vettoriale reale.

Data $\omega \in \Lambda^k(T^*M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ e $Z \in TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ possiamo dunque definire la **contrazione** di ω con Z o **prodotto interno** di ω e Z il seguente elemento di $\Lambda^{k-1}(T^*M)$:

$$Z \lrcorner \omega(Z_1, \dots, Z_{k-1}) := \omega(Z, Z_1, \dots, Z_{k-1}) \tag{1.11}$$

L'operazione di contrazione si estende alle sezioni, permettendoci di definire il prodotto interno di una k-forma e di un campo vettoriale complesso.

1.2 Decomposizioni

Da questo momento in poi supponiamo che M abbia una struttura quasi complessa, ovvero che esista un (1-1)-tensore $J \in C^\infty(T^*M \otimes TM) \cong C^\infty(End(TM))$ tale che $J^2 = -id$. M sarà dunque una varietà differenziabile orientabile con $dim_{\mathbb{R}} M = 2m$. Come accennato nell'introduzione, vedremo che la presenza di una struttura complessa permette di decomporre il complessificato dell'algebra esterna del fibrato cotangente e ottenere un'utile scrittura per le k-forme complesse.
Procederemo considerando inizialmente una decomposizione per il complessificato del fibrato

cotangente, che sarà estesa in modo naturale alle 1-forme e infine generalizzata alle k-forme. Nel caso del fibrato tangente TM, abbiamo visto che su ciascuna fibra il tensore J si estende per $\mathbb{C}$-linearità a un endomorfismo lineare diagonalizzabile sul complessificato $TM^{\mathbb{C}}$, da cui si ottiene la scrittura

$$TM^{\mathbb{C}} = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M \tag{1.12}$$

dove $T^{1,0}M$ e $T^{0,1}M$ indicano rispettivamente l'autospazio relativo all'autovalore i e l'autospazio relativo all'autovalore $-i$. Inoltre si è mostrato che

$$T^{1,0}M = \{X - iJX | x \in TM\} \tag{1.13}$$
$$T^{0,1}M = \{X + iJX | x \in TM\} \tag{1.14}$$

Adesso applichiamo un procedimento del tutto analogo a T^*M.
Osserviamo innanzitutto che dato uno spazio vettoriale reale V, la complessificazione di V si comporta bene rispetto al passaggio al duale, ovvero $(V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})^* \cong V^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Estendendo questo isomorfismo canonico fibra per fibra otteniamo in particolare che $T^*M^{\mathbb{C}} \cong (TM^{\mathbb{C}})^*$. La presenza di $J \in C^\infty(End(TM))$ tale che $J^2 = -id$, permette di definire un $J^* \in C^\infty(End(T^*M)) \cong C^\infty(TM \otimes T^*M)$ tale che $(J^*)^2 = -id$. Per ogni $p \in M$ possiamo infatti considerare

$$J_p^* \colon T_p^*M \to T_p^*M \tag{1.15}$$
$$\alpha \mapsto (J_p^*\alpha)(v) := \alpha(J_p(v)) \tag{1.16}$$

J^* si estende a sua volta fibra per fibra a un endomorfismo lineare diagonalizzabile sul complessificato $T^*M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Se denotiamo rispettivamente con $T^*M^{0,1}$ e $T^*M^{1,0}$ gli autospazi relativi agli autovalori i e $-i$, otteniamo la decomposizione:

$$T^*M^{\mathbb{C}} = T^*M^{1,0} \oplus T^*M^{0,1} \tag{1.17}$$

Procedendo esattamente come nel caso del fibrato tangente otteniamo la seguente caratterizzazione:

$$T^*M^{1,0} = \{\omega - iJ^*\omega | \omega \in T^*M\} \tag{1.18}$$
$$T^*M^{0,1} = \{\omega + iJ^*\omega | \omega \in T^*M\} \tag{1.19}$$

L'operazione di coniugio fornisce dunque l'identità $T^*M^{1,0} = \overline{T^*M^{0,1}}$.
$T^*M^{1,0}$ prende nome di **fibrato cotangente olomorfo**, mentre $T^*M^{0,1}$ prende nome di **fibrato cotangente antiolomorfo**. [1]

Concentriamoci ora sulle 1-forme. Dal momento che per ogni spazio vettoriale $\Lambda^1(V) = V$, l'isomorfismo (1.9) permette di scrivere

$$\Lambda^1_{\mathbb{C}}M = \Lambda^1_{\mathbb{C}}(T^*M^{\mathbb{C}}) = T^*M^{\mathbb{C}} = T^*M^{1,0} \oplus T^*M^{0,1} = \Lambda^1_{\mathbb{C}}(T^*M^{1,0}) \oplus \Lambda^1_{\mathbb{C}}(T^*M^{0,1}) \tag{1.20}$$

[1] La motivazione di questa nomenclatura è dovuta all'esistenza di un isomorfismo $\mathbb{C}$-lineare tra (T^*X, J^*) e $T^*M^{1,0}$ che, nel caso J sia una struttura complessa, permette di vedere $T^*M^{1,0}$ come fibrato olomorfo.

Dunque definendo $\Lambda^{1,0}M := \Lambda^1_{\mathbb{C}}(T^*M^{1,0})$ e $\Lambda^{0,1}M := \Lambda^1_{\mathbb{C}}(T^*M^{0,1})$ sottofibrati di rango m, otteniamo la seguente decomposizione:

$$\Lambda^1_{\mathbb{C}}M = \Lambda^{1,0}M \oplus \Lambda^{0,1}M \tag{1.21}$$

che si estende alle 1-forme complesse. In particolare chiameremo **(1,0)-forme** le sezioni di $\Lambda^{1,0}M$ e **(0,1)-forme** le sezioni di $\Lambda^{0,1}M$.
Le identificazioni $\Lambda^1(T^*M^{1,0}) = T^*M^{1,0}$ e $\Lambda^1(T^*M^{0,1}) = T^*M^{0,1}$ ci permettono di scrivere:

$$\Lambda^{1,0}M = \{\omega - iJ^*\omega | \omega \in \Lambda^1 M\} \tag{1.22}$$
$$\Lambda^{0,1}M = \{\omega + iJ^*\omega | \omega \in \Lambda^1 M\} \tag{1.23}$$

da cui l'identità $\Lambda^{1,0}M = \overline{\Lambda^{0,1}M}$.
Possiamo dare un'altra caratterizzazione di $\Lambda^{1,0}M$ e $\Lambda^{0,1}M$ in base a come agiscono sul fibrato tangente complesso. Si ha infatti

$$\Lambda^{1,0}M = \{\xi \in \Lambda^1_{\mathbb{C}}M | \xi(z) = 0 \ \ \forall z \in T^{0,1}M\} \tag{1.24}$$
$$\Lambda^{0,1}M = \{\xi \in \Lambda^1_{\mathbb{C}}M | \xi(z) = 0 \ \ \forall z \in T^{1,0}M\} \tag{1.25}$$

Mostriamo ad esempio la prima uguaglianza ricorrendo all'identità (1.13) e alla definizione (1.15) . La seconda si dimostra in modo del tutto analogo.

$\subseteq$: $\xi \in \Lambda^{1,0}M \quad \Rightarrow \quad \xi = \omega - iJ^*\omega \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \xi(x + iJx) &= (\omega - iJ^*\omega)(x + iJx) = \\ &= \omega(x) + i\omega(Jx) - iJ^*\omega(x) + J^*\omega(Jx) + \\ &= \omega(x) + i\omega(Jx) - i\omega(Jx) + \omega(J^2x) = \\ &= \omega(x) + \omega(-x) = 0 \end{aligned}$$

$\supseteq$: $\xi(z) = 0 \ \ \forall z \in T^{0,1}M \quad \Rightarrow \quad \xi(x + iJx) = 0 \ \ \forall x \in TM \quad \Rightarrow$

$\xi(x) + iJ^*(\xi(x)) = 0 \ \ \forall x \in TM \quad \Rightarrow$ (linearità)

$\xi(z) + iJ^*(\xi(z)) = 0 \ \ \forall z \in TM^{\mathbb{C}} \quad \Rightarrow \quad J^*\xi = i\xi$

ovvero ξ appartiene all'autospazio realtivo all'autovalore i.

Per dedurre una decomposizione delle k-forme a partire da quelle delle 1-forme dobbiamo innanzitutto osservare che dati due spazi vettoriali reali V e W si ha

$$\Lambda^k(V \oplus W) \cong \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^p V \otimes \Lambda^q W \tag{1.26}$$

A questo punto l'isomorfismo (1.9) permette di scrivere

$$\Lambda^k_{\mathbb{C}} M = \Lambda^k_{\mathbb{C}}(\Lambda^{1,0}M \oplus \Lambda^{0,1}M) \cong \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^p_{\mathbb{C}}(\Lambda^{1,0}M) \otimes \Lambda^q_{\mathbb{C}}(\Lambda^{0,1}M) \tag{1.27}$$

Definiamo $\Lambda^{p,0} := \Lambda^p_{\mathbb{C}}(\Lambda^{1,0}M)$, $\Lambda^{0,q} := \Lambda^q_{\mathbb{C}}(\Lambda^{0,1}M)$ e $\Lambda^{p,q} := \Lambda^{p,0} \otimes \Lambda^{0,q}$, ottenendo la formula più concisa

$$\Lambda^k_{\mathbb{C}} M \cong \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q} \tag{1.28}$$

La decomposizione si estende alle k-forme e in particolare chiamiamo **(p,q)-forme** le sezioni del fibrato $\Lambda^{p,q}$.

Cerchiamo una caratterizzazione delle (p,q)-forme utilizzando la nozione di contrazione. A tal fine vediamo come esprimerle in forma locale. Se $\omega_1, \ldots, \omega_m$ è una base locale per $C^\infty(\Lambda^{1,0}M)$ su un aperto U, quanto osservato in precedenza permette di considerare $\overline{\omega_1}, \ldots, \overline{\omega_m}$ come base locale di $\Lambda^{0,1}M$. Ne segue che l'insieme

$$\{\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_p} \wedge \overline{\omega_{j_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{\omega_{j_q}}\} \tag{1.29}$$

al variare di $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq m$ e $1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq m$ costituisce una base locale per $C^\infty(\Lambda^{p,q}M)$.
Utilizzando la notazione del multiindice possiamo dunque esprimere una (p,q)-forma ω localmente come

$$\omega = \sum_{I,J} a_{IJ}\omega_I \wedge \overline{\omega_J} \tag{1.30}$$

dove $I = (i_1, \ldots, i_p)$ e $J = (j_1, \ldots j_q)$ sono multiindici strettamente crescenti e $a_{IJ} \in C^\infty(U, \mathbb{C})$.
Ricordandoci le caratterizzazioni (1.24) e (1.25) possiamo dunque dire che

- Una k-forma ω è una (k,0)-forma se e solo se $Z \lrcorner \omega = 0 \quad \forall Z \in C^\infty(T^{0,1}M)$.
- Una (p+q)-forma ω è una (p,q)-forma se e solo se $\omega(Z_1, \ldots, Z_{p+q}) = 0$ ogniqualvolta sia applicata (q+1) sezioni di $T^{0,1}M$ oppure a (p+1) sezioni di $T^{1,0}M$.

Inoltre la scrittura locale permette di vedere immediatamente che $\overline{C^\infty(\Lambda^{p,q}M)} = C^\infty(\Lambda^{q,p}M)$. In particolare una (p,q)-forma è reale se e solo se p=q.

Nel caso in cui la varietà M sia in possesso di una struttura complessa, la scrittura locale delle (p,q)-forme può essere compiuta sfruttando le coordinate complesse.
Siano $(z_1, \ldots, z_n)$ con $z_j = x_j + iy_j$ un insieme di coordinate locali olomorfe su un aperto U di M. Se $p \in U$ la struttura complessa su T_pM è definita da:

$$J_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right) = \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p \qquad J_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p\right) = -\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p \tag{1.31}$$

L'endomorfismo J^* che ne deriva sul duale sará dunque definita da

$$J^*(dx_j) = -dy_j \qquad\qquad J^*(dy_j) = dx_j \tag{1.32}$$

Ne segue che $\{dz_j = dx_j + idy_j\}$ e $\{d\bar{z}_j = dx_j - idy_j\}$ formano rispettivamente una base locale per $\Lambda^{1,0}M$ e $\Lambda^{0,1}M$. Data una (p,q)-forma ω possiamo dunque scrivere:

$$\sum_{I,J} a_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J \tag{1.33}$$

dove $I = (i_1, \ldots, i_p)$ e $J = (j_1, \ldots j_q)$ sono multiindici strettamente crescenti e $a_{IJ} \in C^\infty(U, \mathbb{C})$.

1.3 Caratterizzazioni delle strutture complesse

Adesso vediamo una prima applicazione delle forme differenziali complesse, che permettono di dare due nuove caratterizzazioni delle strutture complesse a partire dalle strutture quasi-complesse.
Se J è una struttura quasi-complessa e $\omega \in C^\infty(\Lambda^{p,q}M) \subseteq C^\infty(\Lambda^{p+q}_{\mathbb{C}}M)$ è una (p,q) forma, $d\omega$ è una (p+q+1)-forma, e dunque a priori:

$$d\omega \in \bigoplus_{s+t=p+q+1} C^\infty(\Lambda^{s,t}M) \tag{1.34}$$

Tuttavia vale la seguente inclusione.

Proposizione 1.3.1.

$$dC^\infty(\Lambda^{p,q}M) \subseteq C^\infty(\Lambda^{p+2,q-1}M) \oplus C^\infty(\Lambda^{p+1,q}M) \oplus C^\infty(\Lambda^{p,q+1}M) \oplus C^\infty(\Lambda^{p-1,q+2}M) \tag{1.35}$$

Dimostrazione. Per dimostrarlo ricorriamo alla formula di Leibniz (1.8) e alla scrittura di $\omega \in C^\infty(\Lambda^{p,q}M)$ in base locale

$$\omega = \sum_{I,J} a_{IJ} \omega_I \wedge \overline{\omega_J} \tag{1.36}$$

da cui otteniamo

$$d\omega = \sum_{I,J} da_{IJ} \omega_I \wedge \overline{\omega_J} + a_{IJ} d(\omega_I \wedge \overline{\omega_J}) \tag{1.37}$$

Applicando la regola di Leibniz otteniamo

$$d\omega = \sum_{I,J} da_{IJ} \omega_I \wedge \overline{\omega_J} \; + \; \sum_{I,J} \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\omega_{i_k} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_p} \wedge \overline{\omega_J} \; + \tag{1.38}$$

$$\sum_{I,J} \sum_{h=1}^{q} (-1)^{p+h-1} \omega_I \wedge \overline{\omega_{j_1}} \wedge \cdots \wedge d\overline{\omega_{j_h}} \wedge \cdots \wedge \overline{\omega_{j_q}} \tag{1.39}$$

dal momento che $deg(\omega_{i_k}) = deg(\overline{\omega_{j_h}}) = 1$ per ogni indice i_k, j_h.
Essendo il differenziale di una funzione una 1-forma e il differenziale de una 1-forma una 2-forma, abbiamo le seguenti inclusioni:

$$dC^\infty(\Lambda^{0,0}) \subseteq C^\infty(\Lambda^1_{\mathbb{C}}M) = C^\infty(\Lambda^{1,0}M \oplus \Lambda^{0,1}M) \tag{1.40}$$
$$dC^\infty(\Lambda^{1,0}) \subseteq C^\infty(\Lambda^2_{\mathbb{C}}M) = C^\infty(\Lambda^{2,0}M \oplus \Lambda^{1,1}M \oplus \Lambda^{0,2}M) \tag{1.41}$$
$$dC^\infty(\Lambda^{0,1}) \subseteq C^\infty(\Lambda^2_{\mathbb{C}}M) = C^\infty(\Lambda^{2,0}M \oplus \Lambda^{1,1}M \oplus \Lambda^{0,2}M) \tag{1.42}$$

da cui segue che

- Gli addendi di $\sum_{I,J} da_{IJ}\omega_I \wedge \overline{\omega_J}$ sono elementi di $C^\infty(\Lambda^{p+1,q}M \oplus \Lambda^{p,q+1}M)$.
- Gli addendi di $\sum_{I,J}\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\omega_{i_k} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_p} \wedge \overline{\omega_J}$ sono elementi di $C^\infty(\Lambda^{p+1,q}M \oplus \Lambda^{p,q+1}M \oplus \Lambda^{p-1,q+2})$.
- Gli addendi di $\sum_{I,J}\sum_{h=1}^{q}(-1)^{p+h-1}\omega_I \wedge \overline{\omega_{j_1}} \wedge \cdots \wedge d\overline{\omega_{j_h}} \wedge \cdots \wedge \overline{\omega_{j_q}}$ sono elementi di $C^\infty(\Lambda^{p+2,q-1}M \oplus \Lambda^{p+1,q}M \oplus \Lambda^{p,q+1})$.

Mettendo insieme queste informazioni otteniamo che $d\omega \in C^\infty(\Lambda^{p+2,q-1}M \oplus \Lambda^{p+1,q}M \oplus \Lambda^{p,q+1}) \oplus \Lambda^{p-1,q+2})$ □

Tuttavia nel caso delle strutture complesse l'ambiente in cui vive il differenziale di una (p-q)-forma è ancora più ristretto. Tale restrizione fornisce una caratterizzazione delle varietà complesse, come vediamo dal seguente teorema.

Teorema 1.3.2. *Sia J una struttura quasi complessa su una varietà M e sia $2m = dim_{\mathbb{R}}M$. Le seguenti sono equivalenti:*

1. *J è una struttura complessa*
2. $dC^\infty(\Lambda^{1,0}M) \subseteq C^\infty(\Lambda^{2,0}M \oplus \Lambda^{1,1}M)$
3. $dC^\infty(\Lambda^{p,q}M) \subseteq C^\infty(\Lambda^{p+1,q}M \oplus \Lambda^{p,q+1}M) \quad \forall 0 \le p, q \le m$

Dimostrazione. Nello scorso seminario abbiamo visto che J è una struttura complessa se e solo se $T^{0,1}M$ è integrabile, ovvero

$$\forall X, Y \in C^\infty(T^{0,1}M) \quad [X,Y] \in C^\infty(T^{0,1}M) \tag{1.43}$$

Dunque nel resto della dimostrazione siamo autorizzati a considerare questa caratterizzazione.

$1 \Leftrightarrow 2$ Se $\omega \in C^\infty(\Lambda^{1,0}M)$, $d\omega \in C^\infty(\Lambda^{2,0}M \oplus \Lambda^{1,1}M \oplus \Lambda^{0,2}M)$. Considerando le caratterizzazioni che abbiamo dato delle (p,q)-forme, possiamo dire che la componente in $C^\infty(\Lambda^{0,2}M)$ si annulla se e solo se

$$d\omega(X,Y) = 0 \quad \forall X, Y \in C^\infty(T^{0,1}M) \tag{1.44}$$

Il differenziale di una 1-forma $\omega \in C^\infty(\Lambda^1_{\mathbb{C}}M)$ può essere definito senza il passaggio alle coordinate locali come

$$d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]) \qquad \forall X,Y \in C^\infty(TM^{\mathbb{C}}) \tag{1.45}$$

Dal momento che se $\omega \in C^\infty(\Lambda^{1,0}M)$, l'identità (1.24) ci assicura che $\omega(X) = 0 \ \ \forall X \in C^\infty(TM^{0,1})$, abbiamo

$$\begin{aligned}
&d\omega(X,Y) = 0 && \forall X,Y \in C^\infty(T^{0,1}M), \forall \omega \in C^\infty(\Lambda^{1,0}M) && \Leftrightarrow && (1.46)\\
&\omega([X,Y]) = 0 && \forall X,Y \in C^\infty(T^{0,1}M), \forall \omega \in C^\infty(\Lambda^{1,0}M) && \Leftrightarrow && (1.47)\\
&[X,Y] \in T^{0,1}M && \forall X,Y \in C^\infty(T^{0,1}M), \forall \omega \in C^\infty(\Lambda^{1,0}M) && && (1.48)
\end{aligned}$$

ovvero se e solo se $T^{0,1}$ è integrabile.

$3 \Leftarrow 4$ Immediata.

$4 \Leftarrow 3$ L'operazione di coniugio ci permette di dire che

$$dC^\infty(\Lambda^{0,1}M) \subseteq C^\infty(\Lambda^{0,2}M \oplus \Lambda^{1,1}M) \tag{1.49}$$

A questo punto riprendiamo la dimostrazione della proposizione (1.3.1) e osserviamo che in queste ipotesi nella scrittura (1.38) si ha che

- Gli addendi di $\sum_{I,J} da_{IJ}\omega_I \wedge \overline{\omega_J}$ sono elementi di $C^\infty(\Lambda^{p+1,q}M \oplus \Lambda^{p,q+1}M)$.
- Gli addendi di $\sum_{I,J}\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\omega_{i_k} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_p} \wedge \overline{\omega_J}$ sono elementi di $C^\infty(\Lambda^{p+1,q}M \oplus \Lambda^{p,q+1}M)$.
- Gli addendi di $\sum_{I,J}\sum_{h=1}^{q}(-1)^{p+h-1}\omega_I \wedge \overline{\omega_{j_1}} \wedge \cdots \wedge d\overline{\omega_{j_h}} \wedge \cdots \wedge \overline{\omega_{j_q}}$ sono elementi di $C^\infty(\Lambda^{p+1,q}M \oplus \Lambda^{p,q+1})$.

Questo mi dice che $d\omega \in C^\infty(\Lambda^{p+1,q}M \oplus \Lambda^{p,q+1})$.

□

Capitolo 2

Funzioni, Forme e campi olomorfi

Eugenio Clementini

Consideriamo il caso di una varietà complessa (M, J)

2.1 Operatori ∂ e $\bar{\partial}$

Possiamo considerare l'operatore $\mathrm{d} : C^\infty(\Lambda^{p,q}M) \to C^\infty(\Lambda^{p+1,q}M \oplus \Lambda^{p,q+1}M)$. Chiameremo ∂ e $\bar{\partial}$ le due componenti dell operatore di differenzazione dove:

$$\partial : C^\infty(\Lambda^{p,q}M) \to C^\infty(\Lambda^{p+1,q}M); \tag{2.1}$$

$$\bar{\partial} : C^\infty(\Lambda^{p,q}M) \to C^\infty(\Lambda^{p,q+1}M). \tag{2.2}$$

Quest'ultime sono legate dalla relazione $\mathrm{d} = \partial + \bar{\partial}$. Andiamo ora a vedere come agiscono i due operatori appena definiti. Data una funzione differenziabile $f : M \to \mathbb{C}$(ovvero una $0-forma$), scelto un sistema di coordinate olomorfe locale $z_1, ..., z_n$, possiamo sempre definire una $1 - forma$, $\mathrm{d}f$ nella seguente forma:

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_i} \mathrm{d}z_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} \mathrm{d}\bar{z}_i. \tag{2.3}$$

La decomposizione di $\mathrm{d}f$ come somma di una $(1, 0) - forma$ ed una $(0, 1) - forma$ è la seguente:

$$\partial f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_i} \mathrm{d}z_i \qquad \bar{\partial} f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} \mathrm{d}\bar{z}_i. \tag{2.4}$$

Se α è una $(p, q) - forma$ allora possiamo scrivere:

$$\alpha = \sum_{I,J} \alpha_{I,J} \, \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\bar{z}_J, \tag{2.5}$$

dove $I = (i_1, ..., i_p)$ e $J = (j_1, ..., j_q)$ sono multi-indici e $\mathrm{d}z_I = \mathrm{d}z_{i_1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}z_{i_p}$, $\mathrm{d}\bar{z_J} = \mathrm{d}\bar{z_{j_1}} \wedge ... \wedge \mathrm{d}\bar{z_{j_p}}$.
Si avrà quindi

$$\mathrm{d}\alpha = \sum_{I,J} \mathrm{d}\alpha_{I,J}\, \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\bar{z_J} \tag{2.6}$$

e risulterà chiaro che

$$\partial\alpha = \sum_{I,J} \partial\alpha_{I,J}\, \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\bar{z_J} = \sum_{I,J} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\alpha}{\partial z_i}\, \mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\bar{z_J}, \tag{2.7}$$

$$\bar{\partial}\alpha = \sum_{I,J} \bar{\partial}\alpha_{I,J}\, \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\bar{z_J} = \sum_{I,J} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\alpha}{\partial \bar{z}_i}\, \mathrm{d}\bar{z_i} \wedge \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\bar{z_J}. \tag{2.8}$$

2.2 Funzioni Olomorfe

Sia $f : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ una funzione olomorfa. Andiamo a caratterizzare le funzioni olomorfe in base a come agisce l'operatore differenziale.

Osservazione 1 (Criterio di compatibilità). Una funzione $f : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ è olomorfa se e solo se è differenziabile e soddisfa

$$j_m \circ (f_*)_p = (F_*)_p \circ j_n \ , \ \forall p \in U \tag{2.9}$$

avendo indicato con j l'operatore corrispondente alla moltiplicazione per i in $\mathbb{C}$ e con f_* il differenziale di f. La nozione di funzione olomorfa si può estendere in maniera molto immediata al contesto delle varietà complesse.

Definizione 2.1. Una funzione $f : M \to \mathbb{C}$ si dice olomorfa se e solo se per ogni varta (U, φ_U) di M risulta che $f \circ \varphi_U^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ è olomorfa.

Vediamo ora alcune condizioni equivalenti all'olomorfia di una funzione.

Proposizione 2.2.1. *Sia $f : M \to \mathbb{C}$ una funzione differenziabile, (M, J) una varietà complessa. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *f è olomorfa;*
2. *$f_* \circ J = i f_*$;*
3. *$\mathrm{d}f \in C^\infty(\Lambda^{(1,0)}M)$;*
4. *$Z(f) = 0$, $\forall Z \in T^{(0,1)}M$.*

Dimostrazione. (3) $\Leftrightarrow$ (4): $\mathrm{d}f \in \Lambda^{(1,0)}M$ vuol dire, per definizione, $\mathrm{d}f(Z) = Z(f) = 0$, $\forall Z \in T^{(0,1)}M$.
(1) $\Leftrightarrow$ (2): Per definizione, f è olomorfa se lo è $f \circ \varphi_U^{-1}$, per ogni carta (U, φ_U) di M, cioè se $i \circ (f_* \circ (\varphi_U^{-1})_*) = (f_* \circ (\varphi_U^{-1})_*) \circ j_m$, $\forall p \in U$, ovvero ricordando $J|_M = (\varphi_U^{-1})_* \circ j_m \circ (\varphi_U)_*$, risulta $f_* \circ J = if_*$.
(2) $\Leftrightarrow$ (3): $f_* \circ J = if_*$ è equivante a dire che $\forall X \in TM$ vale $\mathrm{d}f(JX) = i\,\mathrm{d}f(x)$, ovvero $i\,\mathrm{d}f(X + iJX) = 0$ da cui deduciamo che $\mathrm{d}f \in \Lambda^{(1,0)}M$. $\square$

Definizione 2.2. Siano (M, I) e (N, J) varietà complesse. Diremo che un'applicazione $g : M \to N$ è olomorfa se vale $J \circ g_* = I \circ g_*$.

È facile mostrare che, anche in questo caso, una funzione $g : M \to N$ è olomorfa se e solo se è olomorfa in coordinate locali (per ogni carta locale (U, φ) di M e per ogni carta locale (V, ψ) di N, la funzione $\psi \circ g \circ \varphi^{-1}$ è olomorfa nell'aperto in cui è definita).

2.3 Forme olomorfe

Osserviamo che la condizione (3) della Proposizione 2.2.1 è equivalente a richiedere $\bar{\partial} f = 0$. A questo punto sorge spontanea questa definizione.

Definizione 2.3. Una $(p,0)-forma$ ω è olomorfa se $\bar{\partial}\omega = 0$.

La definizione è stata data solo per $(p,0)-forme$ perché la condizione $\bar{\partial}\omega = 0$ in generale è piuttosto debole. Infatti per tutte le $(p,m)-forme$ (dove $m = dim(M)$) si ha che $\bar{\partial}\omega = 0$. Se scriviamo localmente ω come $\omega = \sum_I f_I\,\mathrm{d}z_I$ notiamo inoltre che ω è olomorfa se e solo se tutte le f_I sono funzioni olomorfe. Infatti risulta che

$$\bar{\partial}\omega = \sum_{I,j} \frac{\partial f_I}{\partial \bar{z}_j}\,\mathrm{d}\bar{z}_j \wedge \mathrm{d}z_I \tag{2.10}$$

e, dato che gli elementi $\mathrm{d}\bar{z}_j \wedge \mathrm{d}z_I$ sono linearmente indipendenti (qui stiamo usando che ω è una $(p,0)-forma$) deve essere, per ogni I e per ogni j

$$\frac{\partial f_I}{\partial \bar{z}_j} = 0 \tag{2.11}$$

o in maniera equivalente $\bar{\partial} f_I = 0$ per ogni I.

2.4 Campi olomorfi

Passiamo ora a definire quando un campo vettoriale è olomorfo.

Definizione 2.4. Un campo vettoriale $Z \in C^\infty(T^{(1,0)}M)$ è olomorfo, se per ogni funzione olomorfa $f : U \subset M \to \mathbb{C}$ definita su un aperto U di M, $Z(f) : U \to \mathbb{C}$ è olomorfa.

Definizione 2.5. Un campo vettoriale reale $X \in C^\infty(TM)$ è detto reale olomorfo se $X - iJX$ è olomorfo.

Queste definizioni sono giustificate dalla Proposizione 2.4.1 che non dimostreremo. Per chi fosse interessato la dimostrazione pu'o essere trovata sul libro [3].

Proposizione 2.4.1. *Sia X un campo vettoriale reale sulla varietà complessa (M, J). Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- *X è reale olomorfo;*
- *Il flusso di X consiste di trasformazioni olomorfe di M.*

Capitolo 3

Conseguenze e generalizzazione della decomposizione di d

Francesco Allegra

Nella sezione precedente abbiamo visto come su una varietà complessa M sia possibile scomporre l'operatore di differenziazione d nella somma dei due operatori ∂ e $\bar{\partial}$. La condizione $d^2 = 0$, unita a questa decomposizione, si legge $(\partial + \bar{\partial})^2 = 0$, ovvero $\partial^2 + \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial + \bar{\partial}^2 = 0$. Ma avendo immagine in spazi diversi

$$\partial^2 : \Lambda^{p,q}(M) \to \Lambda^{p+2,q}(M)$$

$$\bar{\partial}^2 : \Lambda^{p,q}(M) \to \Lambda^{p,q+2}(M)$$

$$\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial : \Lambda^{p,q}(M) \to \Lambda^{p+1,q+1}(M)$$

ciò implica che devono fare zero separatamente, cioè

$$\partial^2 = 0$$

$$\bar{\partial}^2 = 0$$

$$\partial\bar{\partial} = -\bar{\partial}\partial$$

.

3.1 La coomologia di Dolbeault

Questo ci consente su una varietà complessa di considerare oltre alla coomologia di De Rham altre due coomologie, quelle indotte da ∂ e da $\bar{\partial}$. Nella fattispecie siamo interessati a quella indotta da $\bar{\partial}$

$$H^{p,q}_{\bar{\partial}} = \frac{Ker\{\bar{\partial}_q : \Lambda^{p,q}(M) \to \Lambda^{p,q+1}(M)\}}{Im\{\bar{\partial}_{q-1} : \Lambda^{p,q-1}(M) \to \Lambda^{p,q}(M)\}}$$

che prende il nome di *coomologia di Dolbeault*.

La domanda sorge quindi spontanea: che collegamenti ci sono tra la coomologia di De Rham e la coomologia di Dolbeault su una varietà complessa M? La risposta viene altrettanto spontanea: a priori nessuno. Infatti, come è noto, la prima è un invariante topologico (per diffeomorfismi ad essere precisi) che ci fornisce informazioni di carattere topologico e dipende solo dalla struttura di varietà topologica (reale) di M; in altre parole non tiene conto della struttura di varietà complessa al contrario della seconda, che pertanto non può essere nemmeno invariante per diffeomorfismi (in realtà dimostrare quest'ultima affermazione, cioè trovare un controesempio di due varietà diffeomorfe con coomologie di Dolbeault differenti, non è banale, è un risultato di Gang Xiao del 1986).

Un esempio per sottolineare la loro differenza non potrebbe essere più semplice.

Esempio 1. Sia $M = \mathbb{C}$. $H^{0,0}(\mathbb{C})$ per definizione è l'insieme delle $f \in \Lambda^{0,0}(\mathbb{C})$ tali che $\bar{\partial} f = 0$, ovvero l'insieme delle funzioni olomorfe su tutto $\mathbb{C}$ (Proposizione 2.2.2.) che sono uno spazio di dimensione infinita mentre ricordiamo che la dimensione di $H^0_{dR}(\mathbb{C})$ è uguale a 1 essendo $\mathbb{C}$ connesso.

Tuttavia consideriamo il seguente esempio.

Esempio 2. Sia stavolta $M = S^2$. Allora le uniche funzioni olomorfe (è vero per ogni varietà compatta) sono le costanti poiché per Weierstrass esiste un $p \in S^2$ tale che $|f(p)|$ è massimo, ma allora f è costante in un intorno U di p per il principio del massimo e dunque costante su tutto S^2 per continuazione analitica. Quindi $dim H^{0,0}(S^2) = dim H^0_{dR}(S^2) = 1$. Proviamo a guardare ad $H^{1,0}(S^2)$

Osservazione 2. $H^{p,0}(M) = \{\omega \in \Lambda^{p,0}$ t.c. ω è una p-forma olomorfa su M$\}$ (segue direttamente dalle definizioni).

Quindi ci chiediamo come sono fatte le 1-forme olomorfe sulla sfera.

S^2 ammette un atlante con due carte U e V, $U \simeq V \simeq \mathbb{C}$, con cambio di coordinate $z = \frac{1}{w}$. Ma allora $dz = -dw/w^2$ ha un polo di ordine 2. Per eliminarlo dobbiamo moltiplicare dz per un polinomio in w di grado almeno 2 ma $w^2 = \frac{1}{z^2}$ e quindi ogni tentativo di cancellare il polo produce nuovi poli. Ne segue che l'unica 1-forma olomorfa sulla sfera è 0.

Un altro modo per vederlo è pensare a 1-forma olomorfa ψ in carte, ovvero $\psi|_U = f dz$ e $\psi|_V = g dw$ con f e g olomorfe su $\mathbb{C}$. In $U \cap V \simeq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ deve valere $f(z)dz = g(\frac{1}{z})(-1/z^2)dz$, ma sviluppando in serie di Laurent (sono olomorfe su tutto $\mathbb{C}$) ci si accorge che quest'uguaglianza è assurda se $g \neq 0$.

E se consideriamo un toro T? Una 1-forma olomorfa su $T \simeq \mathbb{C}/\Gamma$ è una 1-forma olomorfa su $\mathbb{C}$ che passa al quoziente, rispetta cioè la relazione di equivalenza indotta dal reticolo Γ. Ma una 1-forma olomorfa su $\mathbb{C}$ ammette una scrittura globale $f dz$ con f intera (olomorfa su tutto $\mathbb{C}$). Per Liouville le funzioni intere o divergono o sono costanti e le uniche che passano al quoziente sono le costanti, pertanto $dim H^{1,0}(T) = 1$. Per convincersi basta ricordarsi che $\mathbb{C}$ riveste il toro, quindi una 1-forma olomorfa sul toro può essere vista come 1-forma olomorfa su $\mathbb{C}$ tramite il pullback del rivestimento (il resto del ragionamento segue dalla definizione di pullback).

Nessuno, a questo punto, si sorprenderà nel sapere che $H^{q,p} \simeq \overline{H^{p,q}}$ e in particolare hanno la stessa dimensione. Questo risultato prende il nome di *Dualità di Serre* ma la dimostrazione non verrà riportata perché utilizza tecniche (decomposizione di Hodge) che vedremo nei seminari successivi.

Definizione 3.1. $dimH^{p,q} = h^{p,q}$ vengono detti numeri di Hodge.

Quello che abbiamo scoperto per la sfera e per il toro è che $b^k = \sum_{p+q=k} h^{p,q}$ per $k = 0, 1$ dove con $b^k = dimH^k_{dR}$ indichiamo i *numeri di Betti*. Ebbene questo è solo un caso particolare di un fatto generale (ancora conseguenza del teorema di Hodge).

Teorema 3.1.1. *Sia M una varietà Kahleriana compatta. Allora*

$$b^k = \sum_{p+q=k} h^{p,q}$$

.

3.2 Il potenziale Kahleriano

Un'altra utile conseguenza della decomposizione di d è la seguente

Proposizione 3.2.1. *($i\partial\bar{\partial}$-lemma) Sia M una varietà complessa e*

$$\omega \in \Lambda^{1,1}(M) \cap \Lambda^2_{\mathbb{R}}(M)$$

una (1,1)-forma reale. Allora ω è chiusa se e solo se per ogni $p \in M$ esiste un intorno aperto U di p e una funzione $\rho : U \to \mathbb{R}$ tali che

$$\omega|_U = i\partial\bar{\partial}\rho$$

Osservazione 3. La funzione reale ρ viene anche detta potenziale Kahleriano poiché, per definizione di varietà Kahleriana, la 2-forma fondamentale indotta dalla metrica Kahleriana soddisfa le ipotesi della proposizione.

Osservazione 4. Ricordiamo che a lezione abbiamo ottenuto la metrica di Fubini-Study per la varietà complessa (Kahleriana) $\mathbb{C}P^n$, ω_{FS}, proiettando la funzione

$$\varphi(z) = i\partial\bar{\partial}\frac{\log|z|^2}{2}$$

definita su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Dimostrazione. Se ω ammette una scrittura locale siffatta allora è banalmente chiusa poiché ricordando che $\partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0$ e che $\partial\bar{\partial} = -\bar{\partial}\partial$, abbiamo

$$d\omega = (\partial + \bar{\partial})\omega = i\partial^2\bar{\partial}\rho + \bar{\partial}\partial\bar{\partial}\rho = 0$$

Viceversa supponiamo che ω sia una 2-forma reale chiusa. Allora per il lemma di Poincaré, esiste localmente una 1-forma reale τ tale che $d\tau = \omega$. Grazie a quanto visto in precedenza, sappiamo che $\tau = \tau^{1,0} + \tau^{0,1}$ dove $\tau^{1,0}$ è di tipo (1,0) e $\tau^{0,1}$ è di tipo (0,1). Quindi

$$\omega = d\tau = (\partial + \bar{\partial})\tau = \partial\tau^{1,0} + (\partial\tau^{0,1} + \bar{\partial}\tau^{1,0}) + \bar{\partial}\tau^{0,1}$$

da cui, dato che ω è una (1,1)-forma per ipotesi, $\partial\tau^{1,0} = \bar{\partial}\tau^{0,1} = 0$ A questo punto interviene l'equivalente del lemma di Poincaré per l'operatore $\bar{\partial}$:

Proposizione 3.2.2. *Ogni forma di tipo (0,1) $\bar{\partial}$-chiusa è localmente $\bar{\partial}$-esatta.*

(omettiamo la dimostrazione perché abbastanza lunga, si può trovare su [GH94]). Questo ci dice che esiste una funzione f tale che localmente $\tau^{0,1} = \bar{\partial}f$ da cui, per coniugio, $\tau^{1,0} = \partial\bar{f}$.

Osservazione 5. $\overline{\partial\alpha} = \bar{\partial}\bar{\alpha}$ (segue direttamente dalle definizioni).

Ma allora, localmente,

$$\omega = \partial\tau^{0,1} + \bar{\partial}\tau^{1,0} = \partial\bar{\partial}f + \bar{\partial}\partial f = \partial\bar{\partial}f + \overline{\partial\bar{\partial}f} = i\partial\bar{\partial}(2Im(f))$$

da cui segue la tesi, essendo $2Im(f)$ una funzione a valori reali. □

3.3 Generalizzazione al caso quasi complesso

Per finire ricordiamo che in una varietà quasi complessa

$$dC^\infty(\Lambda^{p,q}M) \subseteq C^\infty(\Lambda^{p+2,q-1}M) \oplus C^\infty(\Lambda^{p+1,q}M) \oplus C^\infty(\Lambda^{p,q+1}M) \oplus C^\infty(\Lambda^{p-1,q+2}M)$$

(Proposizione 1.3.1.).

Componendo con le proiezioni sui fattori abbiamo quindi una nuova decomposizione per d:

$$d = \bar{N} + \partial + \bar{\partial} + N$$

La parte N viene così denotata perché si può identificare con il tensore di Nijenhuis incontrato nello scorso seminario.

Osservazione 6. Quando abbiamo definito la coomologia di Dolbeault abbiamo sfruttato il fatto che $d^2 = 0$ implicava $\bar{\partial}^2 = 0$ essendo l'unico operatore con immagine in $\Lambda^{p,q+2}(M)$. Ora però, tale ragionamento ci porta a dire che

$$\bar{\partial}^2 + \partial N + N\partial = 0$$

e quindi non possiamo definire in caso quasi complesso la coomologia di Dolbeault.

Bibliografia

[1] Philip Griffiths and Joseph Harris. (1994), *Principles of Algebraic Geometry*

[2] Daniele Angella. (2013), *Cohomological aspects of non-Kahler manifolds*

[3] Andrei Moroianu. (2007), *Lectures on Kähler Geometry*

[4] Kobayashi & Nomizu. (1969), *Foundations of Differential Geometry Volume II*

[5] Raimond O. Wells, Jr. (2008), *Differential Analysis on Complex Manifolds*

[6] Albert Boggess. (1991), *CR Manifolds and the Tangential Cauchy-Riemann Complex*