Seminari di Geometria superiore

a.a. 2013-2014

METRICHE HERMITIANE E KÄHLERIANE

A cura di:

Maria Chiara Bertini, Simone Giovannini, Chiara Graziani

Indice

Capitolo 1

Definizione di metriche hermitiane e kähleriane

di Chiara Graziani

1.1 Metriche hermitiane

Definizione 1. Sia (M, J) una varietà quasi complessa. Su di essa, si definisce metrica hermitiana una metrica riemanniana h tale che

$$h(X, Y) = h(JX, JY), \qquad \forall X, Y \in TM,$$

condizione che equivale a richiedere che J sia un'isometria rispetto a h.
Una varietà complessa che ammette una metrica hermitiana si dice varietà hermitiana.

Osservazione 1.1. *Ogni varietà quasi complessa ammette una metrica hermitiana: infatti, data un'arbitraria metrica riemanniana g, basta porre*

$$h(X, Y) := g(X, Y) + g(JX, JY).$$

Infatti, secondo tale definizione, poiché $J^2 = -Id$,

$$h(JX, JY) = g(JX, JY) + g(J^2X, J^2Y) = g(JX, JY) + g(X, Y).$$

Osservazione 1.2. *Grazie alle stesse proprietà, e al fatto che h è hermitiana,*

$$h(JX,Y) = h(-X,JY) = -h(X,JY) - h(JY,X).$$

Ponendo

$$\Omega(X,Y) := h(JX,Y),$$

risulta quindi

$$\Omega(X,Y) = -\Omega(Y,X),$$

dunque $\Omega(X,Y)$ è una 2-forma, chiamata la 2-forma (o seconda forma) fondamentale di h.

Tramite estensione per $\mathbb{C}$-linearità al fibrato tangente complessificato $TM^{\mathbb{C}} = TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T^{1,0} \oplus T^{0,1}$, è possibile definire una metrica hermitiana $h_{\mathbb{C}}$, da noi indicata sempre con h, che risulta soddisfare le seguenti proprietà:

$$\begin{array}{lllll} (i) & h(\overline{Z},\overline{W}) = \overline{h(Z,W)}, & \forall Z,W \in TM^{\mathbb{C}}; & & \\ (ii) & h(Z,\overline{Z}) > 0, & \forall Z \in TM^{\mathbb{C}}; & & \\ (iii) & h(Z,Z) = 0, & \forall Z,W \in T^{1,0}M, & e & \forall Z,W \in T^{0,1}M. \end{array}$$

Infatti:
(i) Considerando $Z = X_1 + iY_1$ e $W = X_2 + iY_2$ in $TM^{\mathbb{C}}$, e sfruttando la $\mathbb{C}$-linearità, si ottiene:

$$h(\overline{Z},\overline{W}) = h(X_1 - iY_1, X_2 - iY_2) = h(X_1,X_2) - h(Y_1,Y_2) - i[h(X_1,Y_2) + h(Y_1,X_2)]$$

$$h(Z,W) = h(X_1 + iY_1, X_2 + iY_2) = h(X_1,X_2) - h(Y_1,Y_2) + i[h(X_1,Y_2) + h(Y_1,X_2)].$$

(ii) Se $Z = X + iY$, allora

$$\begin{aligned} h(Z,\overline{Z}) = h(X+iY, X-iY) &= h(X,X) + h(Y,Y) - ih(X,Y) + ih(Y,X)] \\ &= h(X,X) + h(Y,Y) > 0, \end{aligned}$$

poiché h è una metrica riemanniana.

(iii) Prendendo $Z = X - iJX$ e $W = Y - iJY$, entrambi in $T^{1,0}M$, si ha

$$\begin{aligned} h(X - iJX, Y - iJY) &= h(X,Y) - h(JX,JY) - i(X,JY) - ih(JX,Y) \\ &= h(X,Y) - h(X,Y) - i(X,JY) + ih(X,JY) = 0 \end{aligned}$$

per definizioni di h e J.
Analogamente, per $Z = X - iJX$ e $W = Y - iJY$ in $T^{0,1}M$, si ha

$$\begin{aligned} h(X + iJX, Y + iJY) &= h(X,Y) - h(JX,JY) + i(X,JY) + ih(JX,Y) \\ &= h(X,Y) - h(X,Y) + i(X,JY) - ih(X,JY) = 0. \end{aligned}$$

Viceversa, un tensore simmetrico su $TM^{\mathbb{C}}$ che soddisfi tali proprietà definisce una metrica hermitiana per restrizione al fibrato TM. Infatti, grazie alla proprietà (iii) applicata prima a $Z, W \in T^{1,0}M$ poi a $Z, W \in T^{0,1}M$ si ottiene

$$\begin{aligned} h(X,Y) - h(JX,JY) - i(X,JY) - ih(JX,Y) &= 0, \\ h(X,Y) - h(JX,JY) + i(X,JY) + ih(JX,Y) &= 0. \end{aligned}$$

Sommando ambo i membri

$$2[h(X,Y) - h(JX,JY)] = 0,$$

da cui

$$h(X,Y) = h(JX,JY).$$

Data una metrica hermitiana h è possibile costruire, sul fibrato complesso (TM, J), una struttura hermitiana

$$H(X,Y) := h(X,Y) - ih(JX,Y) = (h - i\Omega)(X,Y).$$

Difatti:
1) $H(X,Y)$ è $\mathbb{C}$-lineare in X $\forall Y \in T_pM$.
Se $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda = \alpha + i\beta$, tramite la definizione,

$$H((\alpha + i\beta)X, Y) = H(\alpha X + J\beta X, Y);$$

si vuole mostrare che

$$H(\lambda X, Y) = \lambda H(X,Y).$$

Risulta:

$$\begin{aligned}
H(\alpha X + J\beta X, Y) &= h(\alpha X + J\beta X, Y) - ih(\alpha JX + J^2\beta X, Y)\\
&= \alpha h(X,Y) + \beta h(JX,Y) - i\alpha h(JX,Y) + i\beta h(X,Y)\\
&= \alpha[h(X,Y) - ih(JX,Y)] + i\beta[h(X,Y) - ih(JX,Y)]\\
&= (\alpha + i\beta)[h(X,Y) - ih(JX,Y)]\\
&= (\alpha + i\beta)H(X,Y).
\end{aligned}$$

2) $H(X,Y) = \overline{H(Y,X)}$ $\forall X, Y \in T_pM$.
Infatti:

$$H(X,Y) = h(X,Y) - i\Omega(X,Y) = h(X,Y) + i\Omega(Y,X) = \overline{H(Y,X)}.$$

3) $H(X,X) > 0$, $\forall X \in T_pM, \quad X \neq 0$.

$$H(X,X) = h(X,X) - ih(JX,X) = h(X,X) - i\Omega(X,X) = h(X,X) > 0,$$

essendo Ω antisimmetrica e h hermitiana.
Inoltre, $H(X,X)$ è una funzione di classe C^∞ sulla varietà, $\forall X, Y$ coppia di sezioni liscie di T_pM.

Viceversa, ogni struttura hermitiana H su (TM, J) definisce una metrica hermitiana, ponendo $h := \Re(H)$. Volendo vederlo in coordinate, se

$$H = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} H_{\alpha,\beta} dz_\alpha \otimes dz_\beta$$

allora, se $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$, si ha

$$\begin{aligned}
H &= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} H_{\alpha,\beta}[dx_\alpha + idy_\alpha \otimes dx_\beta - idy_\beta] =\\
&= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} H_{\alpha,\beta}[(dx_\alpha \otimes dx_\beta + dy_\alpha \otimes dy_\beta) - 2i(dx_\alpha \wedge dx_\beta)],
\end{aligned}$$

vale a dire H è decomponibile nella sua parte simmetrica e nella sua parte alternante, rappresentate rispettivamente dai blocchi

$$dx_\alpha \otimes dx_\beta + dy_\alpha \otimes dy_\beta, \qquad\qquad dx_\alpha \wedge dx_\beta.$$

Quindi, di fatto,

$$h = \Re(H), \qquad\qquad \Omega = \Im(H).$$

Su una varietà complessa hermitiana, è garantita l'esistenza, almeno localmente, di un sistema di coordinate olomorfe per il fibrato tangente complessificato $TM^{\mathbb{C}}$, sopra cui si consideri già l'estensione per $\mathbb{C}$-linearità della nostra metrica, con coefficienti definiti così:

$$h_{\alpha,\bar{\beta}} := h\left(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta}\right).$$

È possibile avere un'espressione di Ω in coordinate, come si deduce dal seguente

Lemma 1. $\Omega = i \sum_{\alpha,\beta}^{n} h_{\alpha,\bar{\beta}} dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta.$

Dimostrazione. Una volta verificato che Ω è una $(1,1)$-forma, basta valutare quest'ultima nella coppia di campi $\left(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta}\right)$. Infatti,

$$\Omega\left(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta}\right) = h\left(J\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta}\right) = h\left(i\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta}\right) = ih\left(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta}\right) = ih_{\alpha,\beta},$$

dove si è usata la definizione di Ω, l'estensione di h per $\mathbb{C}$-linearità a $TM^{\mathbb{C}}$ e l'identificazione di J con i, essendo $T^{1,0}M$, di cui $\frac{\partial}{\partial z_\alpha}$ è una base, l'autospazio relativo all'autovalore i.

Vediamo perché Ω è una $(1,1)$-forma.
Da un esercizio del libro "Lectures on Kähler Geometry" di A. Moroianu, in particolare il 5, sappiamo che una 2-forma ω è una $(1,1)$-forma se e solo se $\forall X, Y \in TM^{\mathbb{C}}$, $\omega(X,Y) = \omega(JX, JY)$. In effetti,

$$\Omega(JX, JY) = -h(X, JY) = -h(JY, X) = -\Omega(Y, X) = \Omega(X, Y),$$

per definizioni e solite proprietà di J, h e Ω.

1.2 Metriche kähleriane

Sia (M^{2n}, h, J) una varietà complessa hermitiana. Supponendo che la 2-forma fondamentale Ω sia chiusa, la proposizione nota come *$i\partial\bar{\partial}$-lemma locale* assicura l'esistenza, in qualche intorno di ciascun punto della varietà, di una funzione reale u, chiamata *potenziale di Kähler (o kähleriano) di h* tale che $\Omega = i\partial\bar{\partial}u$.

In coordinate locali si ha, confrontando questa informazione col contenuto del precedente lemma,

$$h_{\alpha,\bar{\beta}} = \frac{\partial^2 u}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta}$$

Definizione 2. Una metrica hermitiana h su una varietà quasi complessa (M, J) è chiamata metrica di Kähler se J è una struttura complessa e la forma fondamentale Ω è chiusa, ossia:

$$N^J \equiv 0 d\Omega = 0.$$

Una varietà complessa con una metrica di Kähler è detta varietà kähleriana.

Esempi di varietà kähleriane sono:

- $(\mathbb{C}^n, <,>)$ con $<,>$ il prodotto hermitiano standard;
- $(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$ con ω_{FS} la metrica di Fubini-Study;
- le superfici di Riemann, per le quali, se

  $$\Omega = f dz \wedge d\bar{z},$$

  allora, banalmente

  $$d\Omega = \frac{\partial f}{\partial z} dz \wedge dz \wedge d\bar{z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz \wedge d\bar{z} = 0$$

- sottovarietà di varietà di Kähler.

1.3 Una proprietà delle varietà di Kähler compatte

Un importante risultato che fornisce informazioni dal punto di vista topologico è il seguente.

Teorema 1. Sia (M, J) una varietà di Kähler compatta, con $dim_{\mathbb{C}} = n$ ($dim_{\mathbb{R}} = 2n$). Allora

$$b_{2i} \neq 0 \ \forall i = 1, ..., n$$

dove $b_k = dim_{\mathbb{R}} H^k_{dR}(M)$ è il k-esimo numero di Betti della varietà M.

Dimostrazione. Rispetto a un riferimento ortonormale $z_1, ..., z_n$ la forma fondamentale $\Omega = i \sum_{\alpha,\beta} h_{\alpha,\bar{\beta}} dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta$ è esprimibile in un dato punto della varietà, a meno di termini di ordine superiore al secondo, come

$$\Omega = i \sum_{\alpha,\beta} dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\alpha = 2 \sum_{\alpha,\beta} dx_\alpha \wedge dy_\alpha,$$

se $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$. Calcolando la potenza Ω^n, risulta

$$\Omega^n = 2^n n! dx_1 \wedge dy_1 \wedge ... \wedge dx_n \wedge dy_n,$$

da cui risulta che $\frac{\Omega^n}{2^n n!}$ è la forma di volume di M. Pertanto, in particolare,

$$\int_M \Omega^n > 0.$$

Per ipotesi, $d\Omega = 0$, dunque $d\Omega^i = 0$, $\forall i = 1, ...n$. $[\Omega^i]$ è perciò un elemento della coomologia di de Rham $\forall i = 1, ...n$, diverso inoltre dall'identità. Infatti, se Ω^i fosse esatta, allora, per il teorema di dualità di Poincaré, alla coppia $([\Omega^i], [\Omega^{n-i}])$ verrebbe associato l'integrale

$$\int_M \Omega^i \wedge \Omega^{n-i} = \int_M \Omega^n \neq 0,$$

assurdo, avendo supposto $[\Omega^i] = 0$. $[\Omega^i]$ risulta così essere una forma chiusa non esatta, e poiché $[\Omega] \in H^2_{dR}(M)$, $[\Omega^i] \in H^{2i}_{dR}(M)$, essendo Ω una 2-forma. Ne segue la tesi.

Un interessante corollario di questo teorema prevede che la sfera S^n è una varietà di Kähler se e solo se $n = 0, 2$. Se $n = 0$ non c' è nulla da mostrare. Per $n = 2$, poiché $S^2 \approx \mathbb{C}P^1$, che ammette una metrica kähleriana come ogni spazio proiettivo complesso.
Viceversa, n dev'essere pari affinchè M possa ammettere almeno una struttura quasi complessa; inoltre $n \leq 2$, poiché $H^2_{dR}(S^n) = 0$ se $n > 2$.

Capitolo 2

Due caratterizzazioni per le metriche kähleriane

di Simone Giovannini

Nel seminario precedente abbiamo dato la definizione di metrica hermitiana per una varietà quasi complessa (M, J) e abbiamo sottolineato l'importanza del caso in cui la 2-forma fondamentale associata alla metrica sia chiusa e J sia una struttura complessa: se si verificano queste due condizioni allora la metrica è detta di Kähler. Il nostro scopo sarà ora quello di dare condizioni necessarie e sufficienti affinchè una metrica hermitiana sia di Kähler. A questo proposito premettiamo alcuni fatti.

In generale, date due connessioni ∇_1, ∇_2 rispettivamente sui fibrati vettoriali ξ_1, ξ_2, esse inducono in modo naturale una connessione ∇ sul fibrato $\xi_1 \otimes \xi_2$ nel seguente modo:

$$\nabla(s_1 \otimes s_2) = \nabla_1(s_1) \otimes s_2 + s_1 \otimes \nabla_2(s_2)$$

per ogni $s_1 \in C^\infty(\xi_1)$, $s_2 \in C^\infty(\xi_2)$. Inoltre, data ∇ connessione su un fibrato ξ, possiamo definire sul fibrato duale ξ^* una connessione (che denotiamo sempre con ∇) ponendo

$$(\nabla_X s^*)(s) = X(s^*(s)) - s^*(\nabla_X s)$$

per ogni $s^* \in C^\infty(\xi^*)$, $s \in C^\infty(\xi)$, $X \in \mathcal{X}(M)$.

È facile verificare che i due operatori appena definiti sono effettivamente delle connessioni sui rispettivi fibrati.

Se abbiamo una connessione lineare ∇ su una varietà M (ovvero una connessione sul fibrato tangente), allora possiamo estenderla nel modo appena descritto a tutti i tensori di tipo (k,l). In particolare, nel contesto di una varietà hermitiana (M,J,h), possiamo estenderla a J e h, che sono rispettivamente un (1,1)-tensore e uno (0,2)-tensore. Dalle definizioni date sopra si deducono le seguenti formule per ∇ esteso rispettivamente a J e h:

$$(\nabla_X J)(Y) = \nabla_X JY - J\nabla_X Y, \tag{2.1}$$

$$(\nabla_X h)(Y,Z) = X(h(Y,Z)) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z), \tag{2.2}$$

dove $X,Y,Z \in \mathcal{X}(M)$. Osserviamo che la (2.2) vale anche per le 2-forme su M. Se $\nabla J = 0$ diremo che J è *parallelo rispetto alla connessione* ∇. Se $\nabla h = 0$ diremo che ∇ è *compatibile con la metrica* h.

Ricordiamo che esiste un'unica connessione lineare compatibile con la metrica h tale che la sua torsione sia nulla, ovvero tale che per ogni $X,Y \in \mathcal{X}(M)$ vale

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X. \tag{2.3}$$

Tale connessione è detta *connessione di Levi-Civita di* h.

(Osserviamo che ciò che abbiamo detto a proposito di h vale in generale per tutte le metriche riemanniane, di cui quelle hermitiane sono un caso particolare).

Lemma 2.1. *Sia (M,J,h) una varietà hermitiana e sia ∇ la connessione di Levi-Civita di h. Allora per ogni $X,Y,Z \in \mathcal{X}(M)$ valgono le seguenti uguaglianze:*

1. $N^J(X,Y) = (J(\nabla_X J)Y - (\nabla_{JX} J)Y) - (J(\nabla_Y J)X - (\nabla_{JY} J)X)$;
2. $(\nabla_X J)J = -J(\nabla_X J)$;
3. $h((\nabla_X J)Y, Z) = -h(Y, (\nabla_X J)Z)$.

Dimostrazione. 1. Per la (2.3) abbiamo che

$$\begin{aligned} N^J(X,Y) &= [X,Y] + J[JX,Y] + J[X,JY] - [JX,JY] = \\ &= \nabla_X Y - \nabla_Y X + J\nabla_{JX} Y - J\nabla_Y JX + J\nabla_X JY - \\ &- J\nabla_{JY} X - \nabla_{JX} JY + \nabla_{JY} JX. \end{aligned}$$

Applicando $-J^2 = Id$ ai termini $\nabla_X Y$ e $\nabla_Y X$ dell'ultimo membro, mettendo in evidenza e usando la (2.1) otteniamo l'uguaglianza cercata.

2.

$$(\nabla_X J)JY + J(\nabla_X J)Y = -\nabla_X Y - J\nabla_X JY + J\nabla_X JY + \nabla_X Y = 0.$$

3. Utilizzando la (2.2) abbiamo che

$$h((\nabla_X J)Y, Z) = h(Y, \nabla_X JZ) - h(J\nabla_X Y, JZ) =$$

$$= X(h(JY, Z)) - h(JY, \nabla_X Z) + X(h(Y, JZ)) - h(Y, \nabla_X JZ) =$$

$$= h(Y, J\nabla_X Z - \nabla_X JZ) = -h(Y, (\nabla_X J)Z)$$

□

Osservazione 2.2. *Le uguaglianze (ii) e (iii) del Lemma precedente, insieme al fatto che h è compatibile con J, ci dicono che $(\nabla_X J)$ e J sono operatori antisimmetrici rispetto ad h che anticommutano.*

Lemma 2.3. *Sia (M, J) una varietà quasi complessa con metrica hermitiana h e sia ∇ la connessione di Levi-Civita di h. Allora $N^J = 0$ se e solo se per ogni $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ si ha*

$$(\nabla_{JX} J)Y = J(\nabla_X J)Y. \tag{2.4}$$

Dimostrazione. Se vale la (2.4) allora dalla (i) del Lemma precedente segue che $N^J = 0$.

Viceversa, supponiamo che $N^J = 0$. Per ogni $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ poniamo $A(X, Y, Z) = h(J(\nabla_X J)Y - (\nabla_{JX} J)Y, Z))$. Dall'annullarsi della (i) del Lemma precedente deduciamo che $A(X, Y, Z) = A(Y, X, Z)$, ovvero A è simmetrico nelle prime due variabili. Inoltre, utilizzando il fatto che J e $\nabla_X J$ sono operatori antisimmetrici che anticommutano, abbiamo che

$$\begin{aligned} A(X, Y, Z) &= h(J(\nabla_X J)Y, Z) - h((\nabla_{JX} J)Y, Z) = \\ &= -h((\nabla_X J)JY, Z) + h(Y, (\nabla_{JX} J)Z) = \\ &= -h(Y, J(\nabla_X J)Z) + h(Y, (\nabla_{JX} J)Z) = -A(X, Z, Y) \end{aligned}$$

quindi A è antisimmetrico nelle ultime due variabili. Permutando ciclicamente otteniamo

$$\begin{aligned} A(X, Y, Z) &= A(Y, X, Z) = -A(Y, Z, X) = -A(Z, Y, X) = \\ &= A(Z, X, Y) = A(X, Z, Y) = -A(X, Y, Z), \end{aligned}$$

da cui ricaviamo $A(X, Y, Z) = 0$. Possiamo perciò dedurre la (2.4) dal fatto che h è non degenere.

□

Teorema 2.4. *Una metrica hermitiana h su una varietà quasi complessa (M, J) è di Kähler se e solo se J è parallelo rispetto alla connessione di Levi-Civita ∇.*

Dimostrazione. Sia Ω la 2-forma fondamentale della metrica h. Poniamo $B(X, Y, Z) = h((\nabla_X J)Y, Z)$; poichè h è parallelo rispetto a ∇, abbiamo che

$$\begin{aligned}(\nabla_X \Omega)(Y, Z) &= X(\Omega(Y, Z)) - \Omega(\nabla_X Y, Z) - \Omega(Y, \nabla_X Z) = \\ &= X(h(JY, Z)) - h(J\nabla_X Y, Z) - h(JY, \nabla_X Z) = \\ &= (\nabla_X h)(JY, Z) + h(\nabla_X JY, Z) - h(J\nabla_X Y, Z) = \\ &= h((\nabla_X J)Y, Z) = B(X, Y, Z). \qquad (2.5)\end{aligned}$$

In particolare B è antisimmetrico nelle ultime due variabili.

Se J è parallelo rispetto a ∇, allora $B(X, Y, Z) = 0$ e quindi $\nabla\Omega = 0$. Inoltre $N^J = 0$ per la (i) del Lemma 2.1. Possiamo concludere che $d\Omega = 0$ grazie alla seguente uguaglianza, che non dimostriamo (si può dedurre facilmente dalla formula di Cartan):

$$d\Omega(X, Y, Z) = (\nabla_X \Omega)(Y, Z) + (\nabla_Y \Omega)(Z, X) + (\nabla_Z \Omega)(X, Y). \qquad (2.6)$$

Viceversa, supponiamo che h sia di Kähler. Usando la compatibilità di h con J e il fatto che $\nabla_X J$ e J anticommutano, abbiamo che

$$\begin{aligned}B(X, Y, JZ) &= h((\nabla_X J)Y, JZ) = -h(J(\nabla_X J)Y, Z) = \\ &= h((\nabla_X J)JY, Z) = B(X, JY, Z).\end{aligned}$$

Dalla (2.4) deduciamo che

$$B(X, JY, Z) + B(JX, Y, Z) = 0.$$

Per ipotesi abbiamo che $d\Omega(X, Y, JZ) = d\Omega(X, JY, Z) = 0$, che possiamo riscrivere, usando la (2.6) e la (2.5), nel seguente modo:

$$B(X, Y, JZ) + B(Y, JZ, X) + B(JZ, X, Y) = 0,$$

$$B(X, JY, Z) + B(JY, Z, X) + B(Z, X, JY) = 0.$$

Sommando e utilizzando le proprietà di B mostrate precedentemente otteniamo che $B(X, Y, JZ) = 0$, ovvero $\nabla J = 0$. $\square$

Diamo ora un'ulteriore caratterizzazione delle metriche di Kähler: ciò che vedremo sarà che localmente una metrica di Kähler coincide con la metrica euclidea standard a meno di termini abbastanza piccoli. A questo proposito premettiamo la seguente definizione.

Definizione 2.5. Una metrica h su una varietà complessa (M, J) *oscula all'ordine k* la metrica hermitiana standard su $\mathbb{C}^n$ se intorno a ogni punto $p \in M$ possiamo trovare un sistema di coordinate locali olomorfe $\{z_\alpha\}$ tali che

$$h = \sum_{\alpha,\beta} (\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta} + r_{\alpha\beta}) dz_\alpha \otimes d\bar{z}_\beta, \tag{2.7}$$

dove le $r_{\alpha\beta}$ sono funzioni C^∞ su M le cui derivate di ordine inferiore a k si annullano in p.

Teorema 2.6. *Una metrica hermitiana h su una varietà complessa (M, J) è di Kähler se e solo se h oscula al secondo ordine la metrica hermitiana standard.*

Dimostrazione. Supponiamo che, per ogni punto $p \in M$, h sia nella forma (2.7), dove

$$r_{\alpha\beta}(p) = \frac{\partial r_{\alpha\beta}}{\partial z_\gamma}(p) = \frac{\partial r_{\alpha\beta}}{\partial \bar{z}_\gamma}(p) = 0.$$

Ricordando la formula che esprime Ω in coordinate locali, abbiamo che

$$\Omega = i \sum_{\alpha\beta} (\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta} + r_{\alpha\beta}) dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta$$

e perciò

$$d\Omega = i \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \left(\frac{\partial r_{\alpha\beta}}{\partial z_\gamma} dz_\gamma + \frac{\partial r_{\alpha\beta}}{\partial \bar{z}_\gamma} d\bar{z}_\gamma \right) \wedge dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta = 0$$

e per arbitrarietà di $p \in M$ si ha che $d\Omega = 0$.

Viceversa, supponiamo che h sia di Kähler. Dato un punto $p \in M$, possiamo sempre trovare una base ortonormale di T_pM nella forma $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n} \right\}$, dove $\frac{\partial}{\partial y_\alpha} = J\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right)$. Date coordinate olomorfe $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$, poniamo $h_{\alpha\bar{\beta}} = h\left(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta}\right)$. Le $h_{\alpha\bar{\beta}}$ sono funzioni C^∞ intorno a p, quindi possiamo farne lo sviluppo di Taylor, ottenendo la seguente scrittura per Ω:

$$\Omega = i \sum_{\alpha,\beta} \left(\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta} + \sum_\gamma a_{\alpha\beta\gamma} z_\gamma + \sum_\gamma a_{\alpha\beta\bar{\gamma}} \bar{z}_\gamma + o(|z|) \right) dz_\alpha \wedge dz_\beta,$$

dove $a_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial h_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial z_\alpha}(p)$, $a_{\alpha\beta\bar{\gamma}} = \frac{\partial h_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial \bar{z}_\alpha}(p)$ e $o(|z|)$ indica una generica funzione che si annulla in p e le cui derivate prime si annullano in p. Per hermitianità di h abbiamo che $h_{\alpha\bar{\beta}} = \overline{h_{\beta\bar{\alpha}}}$; ciò implica che

$$a_{\alpha\beta\bar{\gamma}} = \overline{a_{\beta\alpha\gamma}}. \tag{2.8}$$

Poichè h è di Kähler, si ha che

$$\begin{aligned} d\Omega &= i \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \left(\frac{\partial h_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial z_\gamma} dz_\gamma + \frac{\partial h_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial \bar{z}_\gamma} d\bar{z}_\gamma \right) \wedge dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta \\ &= i \sum_{\alpha,\beta,\gamma} (a_{\alpha\beta\gamma} dz_\gamma \wedge dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta + a_{\alpha\beta\bar{\gamma}} d\bar{z}_\gamma \wedge dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta) = 0. \end{aligned}$$

Quindi, per α, β, γ fissati, deve annullarsi il coefficiente di $dz_\gamma \wedge dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta$, che è $a_{\alpha\beta\gamma} - a_{\gamma\beta\alpha}$. Perciò abbiamo che

$$a_{\alpha\beta\gamma} = a_{\gamma\beta\alpha}. \tag{2.9}$$

Cerchiamo ora delle nuove coordinate intorno a p per cui si annullino i termini del primo ordine di Ω. Poniamo

$$z_\alpha = w_\alpha + \frac{1}{2}\sum_{\beta,\gamma} b_{\alpha\beta\gamma} w_\beta w_\gamma,$$

dove $b_{\alpha\beta\gamma}$ sono numeri complessi tali che $b_{\alpha\beta\gamma} = b_{\alpha\gamma\beta}$. Questo cambio di coordinate è ben definito per la versione olomorfa del teorema della funzione inversa: infatti calcolando lo jacobiano in p si ottiene la matrice identica. Si ha quindi

$$dz_\alpha = dw_\alpha + \sum_{\beta,\gamma} b_{\alpha\beta\gamma} w_\beta dw_\gamma.$$

Riscriviamo tutto in termini delle nuove coordinate:

$$\begin{aligned}
\Omega &= i\sum_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta} + \sum_\gamma a_{\alpha\beta\gamma} z_\gamma + \sum_\gamma a_{\alpha\beta\bar{\gamma}}\bar{z}_\gamma + o(|z|)\right) dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta = \\
&= i\sum_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta} + \sum_\gamma a_{\alpha\beta\gamma} w_\gamma + \sum_\gamma a_{\alpha\beta\bar{\gamma}}\bar{w}_\gamma + o(|w|)\right)\cdot \\
&\cdot \left(dw_\alpha + \sum_{\epsilon,\tau} b_{\alpha\epsilon\tau} w_\epsilon dw_\tau\right) \wedge \left(d\bar{w}_\beta + \sum_{\epsilon,\tau}\overline{b_{\beta\epsilon\tau}}\bar{w}_\epsilon d\bar{w}_\tau\right) = \\
&= \frac{1}{2} i \sum_\alpha \left(dw_\alpha + \sum_{\epsilon,\tau} b_{\alpha\epsilon\tau} w_\epsilon dw_\tau\right) \wedge \left(d\bar{w}_\alpha + \sum_{\epsilon,\tau}\overline{b_{\alpha\epsilon\tau}}\bar{w}_\epsilon d\bar{w}_\tau\right) + \\
&+ i\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\left(a_{\alpha\beta\gamma} w_\gamma + a_{\alpha\beta\bar{\gamma}}\bar{w}_\gamma + o(|w|)\right) dw_\alpha \wedge d\bar{w}_\beta = \\
&= \frac{1}{2} i\left(\sum_\alpha dw_\alpha \wedge d\bar{w}_\alpha + \sum_{\alpha,\epsilon,\tau} b_{\alpha\epsilon\tau} w_\epsilon dw_\tau \wedge d\bar{w}_\alpha + \sum_{\alpha,\epsilon,\tau}\overline{b_{\alpha\epsilon\tau}}\bar{w}_\epsilon dw_\alpha \wedge d\bar{w}_\tau\right) + \\
&+ i\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\left(a_{\alpha\beta\gamma} w_\gamma + a_{\alpha\beta\bar{\gamma}}\bar{w}_\gamma + o(|w|)\right) dw_\alpha \wedge d\bar{w}_\beta = \\
&= i\sum_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta} + \sum_\gamma\left(\frac{1}{2} b_{\beta\gamma\alpha} w_\gamma + \frac{1}{2}\overline{b_{\alpha\gamma\beta}}\bar{w}_\gamma + a_{\alpha\beta\gamma} w_\gamma + a_{\alpha\beta\bar{\gamma}}\bar{w}_\gamma\right) + o(|w|)\right) dw_\alpha \wedge d\bar{w}_\beta.
\end{aligned}$$

Possiamo scegliere $\frac{1}{2} b_{\beta\gamma\alpha} = -a_{\alpha\beta\gamma}$: la condizione di simmetria $b_{\alpha\beta\gamma} = b_{\alpha\gamma\beta}$ è garantita dalla (2.9). Inoltre dalla (2.8) deduciamo che $\frac{1}{2}\overline{b_{\alpha\gamma\beta}} = -\overline{a_{\beta\alpha\gamma}} = -a_{\alpha\beta\bar{\gamma}}$, perciò abbiamo che

$$\Omega = i\sum_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta} + o(|w|)\right) dw_\alpha \wedge d\bar{w}_\beta$$

e il teorema è dimostrato. $\square$

Capitolo 3

Confronto tra connessione di Levi-Civita e connessione di Chern

di Maria Chiara Bertini

In questo capitolo vedremo un'ulteriore caratterizzazione delle varietà kähleriane in termini di connessioni.
Ricordiamo il fatto che, data una varietà quasicomplessa (M, J), il fibrato vettoriale TM è un fibrato vettoriale complesso grazie alla struttura complessa J. Ovvero, l'azione di J "simula" la moltiplicazione per i. Ciò induce l' isomorfismo di fibrati complessi:

$$\begin{array}{ccc} TM & \longrightarrow & T^{1,0}M \\ X & \longmapsto & \frac{1}{2}(X - iJX) \end{array}$$

dove, ricordiamo, $T^{1,0}M$ è il sottofibrato complesso di $TM^{\mathbb{C}}$ corrispondente all'autovalore i di J, e dove dunque agire tramite J corrisponde esattamente a moltipicare per i.
Con questa premessa, penseremo sempre ad un campo vettoriale in TM come ad una sezione di $TM^{\mathbb{C}}$ generata localmente da $\{\frac{\partial}{\partial z^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z^n}\}$

D'ora in avanti ci metteremo nel contesto (M, J) varietà complessa. Richiamiamo brevemente che (TM, J) possiede una naturale connessione, dovuta alla struttura complessa.

Connessione di Chern:

Sia $E \to M$ un fibrato complesso su M.
Consideriamo le proiezioni

$$\pi^{1,0} : \Omega^1(E) \to \Omega^{1,0}(E), \quad \pi^{0,1} : \Omega^1(E) \to \Omega^{0,1}(E)$$

Per ogni connessione ∇ su E, possiamo considerare le sue componenti $(1,0)$ e $(0,1)$-esima

$$\nabla^{1,0} := \pi^{1,0} \circ \nabla$$

$$\nabla^{1,0} := \pi^{1,0} \circ \nabla$$

Possiamo estendere questi operatori a

$$\nabla^{1,0} : \Omega^{p,q}(E) \to \Omega^{p+1,q}(E)$$

$$\nabla^{0,1} : \Omega^{p,q}(E) \to \Omega^{p,q+1}(E)$$

tramite

$$\nabla^{1,0}(\omega \otimes \sigma) := \partial\omega \otimes \sigma + (-1)^{p+q}\omega \wedge \nabla^{1,0}\sigma$$

$$\nabla^{0,1}(\omega \otimes \sigma) := \bar{\partial}\omega \otimes \sigma + (-1)^{p+q}\omega \wedge \nabla^{0,1}\sigma$$

Definizione 3.1. Data una struttura hermitiana H su E, diciamo che ∇ è una *H-connessione* se H, vista come un campo di di forme bilineari reali a valori in $\mathbb{C}$, è parallela rispetto a ∇.

Abbiamo il seguente teorema:

Teorema 3.2. *Per ogni struttura hermitiana H in un fibrato olomorfo E con struttura olomorfa $\bar{\partial}$, esiste un'unica H-connessione $\bar{\nabla}$ tale che $\bar{\nabla}^{0,1} = \bar{\partial}$. Questa connessione è detta* connessione di Chern.

Per essere in grado di dimostrare il teorema di caratterizzazione, abbiamo bisogno di esprimere $\bar{\partial}$ in funzione della connessione di Levi-Civita. Prima di tutto, dobbiamo ricordare che per ogni campo vettoriale Y in $TM^{\mathbb{C}}$, $\bar{\partial}Y$ può essere dato come una $(0,1)-$forma a valori in $TM^{\mathbb{C}}$. Infatti, se nella base locale

$\{\frac{\partial}{\partial z^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z^n}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^n}\}$ Y si scrive nella forma $Y = (f_1, \ldots, f_{2n})$, allora localmente

$$\bar{\partial} Y := (\bar{\partial} f_1, \ldots, \bar{\partial} f_{2n})$$

agisce su un campo vettoriale X tramite

$$\bar{\partial} Y(X) := (\bar{\partial} f_1(X), \ldots, \bar{\partial} f_{2n}(X)),$$

restituendo dunque una $2n$-upla di coordinate locali di un nuovo campo vettoriale in $TM^{\mathbb{C}}$.

Notiamo che , banalmente, se X è un campo vettoriale in $T^{1,0}M$, allora $\bar{\partial} X$ sarà una $(0,1)$-forma a valori in $T^{1,0}M$. Dunque ha senso considerare $\bar{\partial}$ nel contesto del fibrato tangente $TM \cong T^{1,0}M$.

Fatte queste considerazioni, siamo in grado di dare senso al seguente lemma:

Lemma 3.3. *Sia (M, h, J) una varietà hermitiana. Per ogni sezione Y del fibrato vettoriale complesso (TM, J), l'operatore $\bar{\partial} Y$, visto come $(0,1)$-forma a valori in TM è dato da*

$$\bar{\partial}^{\nabla} Y(X) := \frac{1}{2}(\nabla_X Y + J\nabla_{JX} Y - J(\nabla_Y J)X)$$

dove ∇ denota la connessione di Levi-Civita della metrica hermitiana h su M.

Dimostrazione. Per ogni campo vettoriale X in $TM^{\mathbb{C}}$, e per ogni funzione f in $C^\infty(M)$, si ha $(\bar{\partial} f)X = \frac{1}{2}(X + iJX) \cdot f$. Infatti, se $X = \alpha_k \frac{\partial}{\partial z^k} + \beta_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}$, allora

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(X + iJX) \cdot f =& \frac{1}{2}\left(\alpha_k \frac{\partial}{\partial z^k} + \beta_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} + iJ\left(\alpha_k \frac{\partial}{\partial z^k}\right) + iJ\left(\beta_k \frac{\partial}{\partial z^k}\right)\right) \cdot f = \\
=& \frac{1}{2}\left(\alpha_k \frac{\partial}{\partial z^k} + \beta_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} - \alpha_k \frac{\partial}{\partial z^k} + \beta_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}\right) \cdot f = \\
=& \left(\beta_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}\right) \cdot f = (\bar{\partial} f)X
\end{aligned}$$

Dunque, per X, Y campi vettoriali in TM, e per f in $C^\infty(M)$,

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}^{\nabla}(fY)(X) =& f\frac{1}{2}(\nabla_X Y + J\nabla_{JX} Y - J(\nabla_Y J)X) + \frac{1}{2}((X \cdot f)Y + J((JX \cdot f)Y)) = \\
=& f\frac{1}{2}(\nabla_X Y + J\nabla_{JX} Y - J(\nabla_Y J)X) + \frac{1}{2}((X + iJX) \cdot f)(Y) = \\
=& f\bar{\partial}^{\nabla} Y(X) + \bar{\partial} f(X) Y
\end{aligned}$$

ovvero $\bar{\partial}^{\nabla}$ soddisfa la stessa regola di Leibniz di $\bar{\partial}$. In virtù dell'isomorfismo $TM \cong T^{1,0}M$, un campo vettoriale Y è una sezione olomorfa di TM se e solo se è reale olomorfa. Per un risultato visto precedentemente, Y è reale olomorfo se e solo se $\mathcal{L}_Y J = 0$, dove con questa scrittura indichiamo la derivata di Lie del tensore J rispetto a Y. Dunque, per Y olomorfo si ha

$$\begin{aligned}0 =&(\mathcal{L}_Y J)X = \mathcal{L}_Y(JX) - J\mathcal{L}_Y X = [Y, JX] - J[Y, X] = \\ =&\nabla_Y JX - \nabla_{JX} Y - J\nabla_Y X + J\nabla_X Y = \\ =&(\nabla_Y J)X - \nabla_{JX} Y + J\nabla_X Y = \\ =&J(\nabla_X Y + J\nabla_{JX} Y - J(\nabla_Y J)X) = \\ =&2J\bar{\partial}^{\nabla} Y(X)\end{aligned}$$

per ogni campo vettoriale X. Dunque $\bar{\partial}^{\nabla} Y \equiv 0$ per ogni sezione olomorfa Y. Poichè $\{\frac{\partial}{\partial z^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z^n}\}$ sono campi vettoriali olomorfi che forniscono una base locale di TM, e inoltre $\bar{\partial}^{\nabla}$ soddisfa la stessa regola di Leibniz di $\bar{\partial}$, concludiamo $\bar{\partial}^{\nabla} = \bar{\partial}$. □

A questo punto siamo in grado di dimostrare il teorema di caratterizzazione:

Teorema 3.4. *Su una varietà hermitiana (M, h, J) la connessione di Chern coincide con la connessione di Levi-Civita se e solo se (M, h, J) è di Kähler.*

Dimostrazione. Sia $H := h - i\Omega$ la struttura hermiriana di TM dove, ricordiamo, $\Omega(\cdot, \cdot) = h(J\cdot, \cdot)$. Poiché la connessione di Chern $\bar{\nabla}$ è una connessione complessa, allora J è parallela rispetto ad essa. Infatti, Per ogni campo vettoriale X in TM si deve avere

$$J\bar{\nabla}X = \bar{\nabla}(JX) = (\bar{\nabla}J)X + J\bar{\nabla}X$$

dove nel primo passaggio abbiamo utilizzato l'identificazione $i \leftrightarrow J$ e il fatto che $\bar{\nabla}$, essendo una connessione complessa, è $\mathbb{C}$-lineare.

($\Rightarrow$) Supponiamo $\bar{\nabla} = \nabla$. Allora, per quanto detto sopra, J è parallela rispetto a ∇, e questa condizione è equivalente a che h sia di Kähler, per un teorema visto nel precedente capitolo.

($\Leftarrow$) Supponiamo, viceversa, che h sia di Kähler. Per mostrare $\bar{\nabla} = \nabla$, prima di tutto dobbiamo vedere che ∇ si estende ad una connessione lineare complessa. Ma questo è vero, perchè la condizione $\nabla J = 0$ assicura la $\mathbb{C}$-linearità di ∇.
Ora mostriamo che ∇ soddisfa le condizioni che caratterizzano unicamente la connessione di Chern $\bar{\nabla}$.

- ∇ è una H- connessione: poiché $H = h - i\Omega$, e $\nabla h = 0$, basta mostrare $\nabla\Omega = 0$. Si ha:

$$\begin{aligned}\nabla_X\Omega(Y, Z) =&X \cdot h(JY, Z) - h(J\nabla_X Y, Z) - h(JY, \nabla_X Z) = \\ =&X \cdot h(JY, Z) + h((\nabla_X J)Y, Z) + \\ &- h(\nabla_X JY, Z) - h(JY, \nabla_X Z) = \qquad (\textit{uso } \nabla_X J = 0) \\ =&\nabla_X h(JY, Z) = 0\end{aligned}$$

- Per il lemma 3.3, dati X, Y campi vettoriali in TM, si ha

$$\begin{aligned}\nabla^{0,1}_X Y =& \frac{1}{2}(\nabla_X + i\nabla_{JX})Y = \frac{1}{2}(\nabla_X + J\nabla_{JX})Y = \qquad (\textit{uso } \nabla_Y J = 0)\\ =& \frac{1}{2}(\nabla_X + J\nabla_{JX})Y - \frac{1}{2}J(\nabla_Y J)X = \\ =& \bar{\partial}^{\nabla} Y(X) = \bar{\partial} Y(X)\end{aligned}$$

Dunque ∇ coincide con la connessione di Chern $\bar{\nabla}$.

$\square$

Bibliografia

[1] A. MOROIANU, *Lectures on Kähler Geometry* London Mathematical Society, Student Texts 69, 2007.

[2] D. HUYBRECHTS, *Complex Geometry: an Introduction* Springer, Universitext, 2005

[3] P. GRIFFITHS, J. HARRIS *Principles of Algebraic Geometry* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994