DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "GUIDO CASTELNUOVO"
Seminarî del corso di Geometria Superiore
Prof. Paolo Piccinni

OPERATORI NATURALI SU VARIETÀ DI KÄHLER

A cura di Livia CAMPO, Michela FIASCHETTI, Riccardo GIANNI

A.A. 2013/2014, Università La Sapienza, Roma

Indice

Capitolo 1

Operatori differenziali su varietà Riemanniane

A cura di Michela Fiaschetti

In questo seminario si andranno a definire alcuni operatori su varietà Riemanniane che serviranno poi nei teoremi di decomposizione di Lefschetz e nello sviluppo della teoria di Hodge.

Nella prima sezione verrà definita in astratto la nozione di aggiunto formale di un operatore differenziale e vedremo un metodo utile per calcolarlo; nella seconda sezione sarà introdotto l'operatore $*$ di Hodge,ne vedremo alcune proprietà e introdurremo l'aggiunto formale dell'operatore di derivazione esterna.

Infine nella terza sezione definiremo l'operatore di Laplace e dimostreremo che tale operatore è ellittico.

1.1 L'aggiunto formale di un operatore differenziale lineare

Sia (M, g) una varietà Riemanniana orientata di dimensione reale n dotata di una forma di volume che indichiamo con $dv = \epsilon(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, dove ϵ è una funzione C^∞. Siano $\xi = (E, \pi, M)$ ed $\xi' = (F, \pi', M)$ due fibrati vettoriali, rispettivamente di dimensione r ed s, dotati di strutture hermitiane che indicheremo nel seguente modo : $\langle\cdot|\cdot\rangle_E$, $\langle\cdot|\cdot\rangle_F$.

Parlando di fibrati vettoriali hermitiani ha senso considerare lo spazio di Hilbert $L^2(M, E)$ delle sezioni globali u di E a coefficienti misurabili tali che soddisfino la stima

$$\|u\|^2 = \int_M |u(x)|^2 \, dv(x) < +\infty.$$

Indicheremo con

$$(u, v)_{L^2(M,E)} = \int_M \langle u(x)|v(x)\rangle_E \, dv(x) \quad \forall u, v \in L^2(M, E)$$

il prodotto hermitiano su $L^2(M, E)$.

Definizione 1. L'operatore $P \colon \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ è un operatore differenziale lineare di ordine k se su ogni insieme aperto $U \subset M$, con coordinate $(x_1, \ldots, x_n)$, che banalizza i due fibrati, cioè $E_{|U} \simeq U \times \mathbb{K}^r$ e $F_{|U} \simeq U \times \mathbb{K}^s$, si ha

$$P(\alpha)(x) = \sum_{|I|=k} P_I(x) D^I \alpha(x),$$

dove P_I è una matrice $s \times r$ con coefficienti C^∞, e
$D^I \alpha(x) = \big(\frac{\partial \alpha}{\partial x_{i_1}}\big)^{i_1} \ldots \big(\frac{\partial \alpha}{\partial x_{i_n}}\big)^{i_n}$.

Definizione 2. Siano $P \colon \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ e $Q \colon \Gamma(F) \to \Gamma(E)$ due operatori differenziali lineari, Q si dice l'aggiunto formale di P se vale

$$\int_M \langle P\alpha(x)|\beta(x)\rangle_F \, dv(x) = \int_M \langle \alpha(x)|Q\beta(x)\rangle_E \, dv(x) \quad \forall \alpha \in C_0^\infty(E), \beta \in C_0^\infty(F).$$

Proposizione 1.1. *Sia $P \colon \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ un operatore differenziale lineare, allora esiste un unico $Q \colon \Gamma(F) \to \Gamma(E)$ aggiunto formale di P e si indica con P^*.*

Dimostrazione. Iniziamo con la dimostrazione dell'unicità: supponiamo per assurdo che esistano due diversi aggiunti formali di P, Q e Q'. Definiamo $R := Q - Q' \colon \Gamma(F) \to \Gamma(E)$; per ipotesi R deve verificare la seguente uguaglianza:

$$\int_M \langle \alpha(x)|R\beta(x)\rangle_E \, dv(x) = 0 \quad \forall \alpha \in C_0^\infty(E), \beta \in C_0^\infty(F). \tag{1.1}$$

Poiché abbiamo supposto che $Q \neq Q'$ allora deve esistere $\sigma \in \Gamma(F)$ e $x \in M$ tali che $R(\sigma)(x) \neq 0$. Siano $U \subset K \subset M$ dove U è un insieme aperto e K compatto e consideriamo la bump function $f \in C^\infty$, ovvero

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in U \\ 0 & x \in M \setminus K \end{cases} .$$

Essendo un operatore differenziale, il valore di R in x dipende solo dal germe di σ in x, perciò $R(f\sigma)$ ha supporto compatto e vale che $R(f\sigma)(x) = R(\sigma)(x) \neq 0$. Applicando la formula 1.1 con le sezioni a sopporto compatto di E ed F $\alpha := R(f\sigma)$ e $\beta := f\sigma$ otteniamo:

$$0 = \int_M \langle R(f\sigma)(x) | R(f\sigma)(x) \rangle_E \, dv(x) = \int_M |R(f\sigma)|^2 \, dv(x).$$

Questa uguaglianza implica che la funzione positiva $|R(f\sigma)|^2$ si annulli su M, contraddicendo l'esistenza di almeno un punto in M su cui $R(\sigma) \neq$.

Passiamo ora a dimostrare l'esistenza locale dell'operatore aggiunto formale. Sia $P(\alpha) = \sum_{|I|=k} P_I D^I \alpha(x)$ l'espansione di P rispetto alle banalizzazioni di E, F data dagli insiemi ortonormali su alcune coordinate dell'insieme aperto $U \subset M$. Assumiamo che l'intersezione tra supporto di α e il supporto di β sia compattamente contenuta in M, allora si ha:

$$\int_U \langle P\alpha(x) | \beta(x) \rangle_F \, dv(x) = \int_U \left\langle \sum_{|I|} P_I D^I \alpha(x) | \beta(x) \right\rangle_F \epsilon(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n =$$

$$\int_U \sum_{|I|=k,t,s} P_I^{t,s} D^I \alpha_t(x) \overline{\beta_s(x)} \epsilon(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n =$$

integrando per parti e ricordandoci che l'intersezione del supporto di α e del supporto di β è strettamente contenuta in U, si ha:

$$\int_U \sum_{|I|=k,t,s} (-1)^{|I|} \alpha_t(x) D^I \left(\epsilon(x) P_I^{t,s} \overline{\beta_s(x)} \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n =$$

grazie al fatto che $\epsilon(x)$ assume valori reali possiamo scrivere:

$$\int_U \sum_{|I|=k,t,s} (-1)^{|I|} \alpha_t(x) D^I \overline{\left(\epsilon(x) \overline{P_I^{t,s}} \beta_s(x) \right)} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Indicando con P^T la trasposta di P otteniamo:

$$\int_U \left\langle \alpha(x) | \sum_{|I|=k} (-1)^{|I|} \epsilon(x)^{-1} D^I \big(\epsilon(x) \overline{P_I^T} \beta(x)\big) \right\rangle_E dv(x)$$

Quindi $P^*(\beta)(x) = \sum_{|I|=k} (-1)^{|I|} \epsilon(x)^{-1} D^{|I|} \big(\epsilon(x) \overline{P_I^T} \beta(x)\big)$. $\square$

Corollario 1.2. *Se $P\colon \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ e $Q\colon \Gamma(F) \to \Gamma(E)$ sono operatori differenziali lineari e, rispettivamente, P^* e Q^* i loro aggiunti, allora*
$(P \circ Q)^* = Q^* \circ P^*$.

La seguente proposizione ci fornisce un utile metodo per calcolare l'aggiunto formale di un operatore:

Proposizione 1.3. *Siano $P\colon \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ e $Q\colon \Gamma(F) \to \Gamma(E)$ operatori differenziali lineari. Se esiste un'applicazione $\omega\colon \Gamma(E \otimes F) \to \Lambda^{n-1}M$ tale che*

$$(\langle P\alpha|\beta\rangle_F - \langle \alpha|Q\beta\rangle_E) dv = d(\omega(\alpha,\beta)), \quad \forall \alpha \in C_0^\infty(E), \beta \in C_0^\infty(F), \tag{1.2}$$

allora $Q = P^*$.

Dimostrazione. Dal momento che α e β sono sezioni a supporto compatto, rispettivamente di E ed F, allora $\omega(\alpha,\beta)$ è una $(n-1)-$forma a supporto compatto. Per l'ipotesi 1.3 si ha che:

$$\int_M \big(\langle P\alpha(x)|\beta(x)\rangle_F - \langle \alpha(x)|Q\beta(x)\rangle_E\big) dv(x) = \int_M d(\omega(\alpha,\beta)(x)) =$$

usiamo il teorema di Stokes:

$$= \int_{\partial M} \omega(\alpha,\beta)(x) = 0.$$

Ovvero

$$\int_M \langle P\alpha(x)|\beta(x)\rangle_F \, dv(x) = \int_M \langle \alpha(x)|Q\beta(x)\rangle_E \, dv(x).$$

$\square$

1.2 L'operatore $*$ di Hodge e l'aggiunto formale di d

Consideriamo una varietà Riemanniana orientata (M, g) di dimensione n con una forma di volume dv. Indichiamo con $\{e_1, \dots, e_n\}$ una struttura ortonormale locale in ogni punto di M e identifichiamo i vettori e le 1-forme tramite la metrica g; tale metrica g induce un prodotto scalare euclideo su M. In questo modo possiamo scrivere $dv = e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$.

Definizione 3. Definiamo l'operatore $*\colon \Lambda^k M \to \Lambda^{n-k} M$, detto $*$ di Hodge, nel seguente modo:

$$\omega \wedge *\tau := \langle \omega | \tau \rangle \, dv, \quad \forall \omega, \tau \in \Lambda^k M.$$

In realtà, poiché l'accoppiamente

$$\Lambda^k M \times \Lambda^{n-k} M \to \mathbb{R}$$

$$(\alpha, \beta) \mapsto \langle \alpha \wedge \beta | dv \rangle$$

è non degenere, lo $*$ di Hodge è un isomorfismo tra $\Lambda^k M$ e $\Lambda^{n-k} M$. Su una base locale si dimostra che

$$*1 = dv, \quad *dv = 1, \quad \langle *\omega | *\tau \rangle = \langle \omega | \tau \rangle .$$

Proposizione 1.4. *Valgono le seguenti proprietà:*

1. *$*$ è involutivo a meno del segno :*
   $* * \alpha = (-1)^{k(n-k)} \alpha \quad \forall \alpha \in \Lambda^k M,$
2. *$*$ è auto-aggiunto a meno del segno:*

$$\langle \alpha | *\beta \rangle \, dv = (-1)^{k(n-k)} \langle *\alpha | \beta \rangle \, dv, \quad \forall \alpha \in \Lambda^k M, \beta \in \Lambda^{n-k} M,$$

Dimostrazione. 1. lo dimostriamo localmente: sia $p \in M$, $\alpha_p, \beta_p \in \Omega^k_p M$. Sappiamo che $*_p\colon \Omega^k_p M \to \Omega^{n-k}_p M$ preserva la metrica, dunque:

$$\alpha_p \wedge *\beta_p = \langle \alpha_p | \beta_p \rangle \, dv = \langle *\alpha_p | *\beta_p \rangle \, dv = \langle *\beta_p | *\alpha_p \rangle \, dv$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato che il prodotto scalare è euclideo,

$$= *\beta_p \wedge * * \alpha_p = (-1)^{k(n-k)} * *\alpha_p \wedge *\beta_p, \quad \forall \beta_p \in \Omega^k_p M.$$

Ma allora $\alpha_p = (-1)^{k(n-k)} * *\alpha_p$.

2. segue facilmente dalla definizione ricordando che il prodotto scalare è euclideo; date $\alpha \in \Lambda^k M$ e $\beta \in \Lambda^{n-k} M$ si ha:

$$\langle \alpha | * \beta \rangle \, dv = \langle *\beta | \alpha \rangle \, dv = *\beta \wedge *\alpha = (-1)^{k(n-k)} * \alpha \wedge *\beta = (-1)^{k(n-k)} \langle *\alpha | \beta \rangle \, dv$$

□

Passiamo ora a definire un altro operatore sulle (k+1)-forme:

Proposizione 1.5. *L'operatore delta definito nel seguente modo:*

$$\delta\colon \Omega^{k+1} M \to \Omega^k M \quad \delta := (-1)^{nk+1} * d*,$$

è l'aggiunto formale dell'operatore di derivazione esterna $d\colon \Omega^k M \to \Omega^{k+1} M$.

Dimostrazione. Siano $\alpha \in \Omega^k M$ e $\beta \in \Omega^{k+1} M$ si ha

$$\langle d\alpha | \beta \rangle \, dv = d\alpha \wedge *\beta = d(\alpha \wedge *\beta) - (-1)^k \alpha \wedge d * \beta = d(\alpha \wedge *\beta) - (-1)^{k+k(n-k)} \alpha \wedge * * d * \beta$$

osserviamo che $k(n-k) \equiv k(n-1) \bmod(2)$, allora:

$$= d(\alpha \wedge *\beta) - (-1)^{nk} \alpha \wedge * * d * \beta = d(\alpha \wedge *\beta) - (-1)^{nk} \langle \alpha | * d * \beta \rangle \, dv = d(\alpha \wedge *\beta) + \langle \alpha | \delta\beta \rangle \, dv.$$

Quindi abbiamo ottenuto che

$$(\langle d\alpha | \beta \rangle - \langle \alpha | \delta\beta \rangle) dv = d(\alpha \wedge *\beta)$$

e per il lemma 1.3 si ha la conclusione. □

Utilizzando questo nuovo operatore, che è detto codifferenziale, possiamo riformulare la proposizione 1.3:

Proposizione 1.6. *Siano $P\colon \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ e $Q\colon \Gamma(F) \to \Gamma(E)$ operatori differenziali lineari. Se esiste un'applicazione $\tau\colon \Gamma(E \otimes F) \to \Lambda^1 M$ tale che*

$$(\langle P\alpha|\beta\rangle_F - \langle \alpha|Q\beta\rangle_E) = \delta(\tau(\alpha,\beta)), \quad \forall \alpha \in C_0^\infty(E), \beta \in C_0^\infty(F), \tag{1.3}$$

allora $Q = P^*$ e inoltre

$$\delta(\tau(\alpha,\beta)) = -d(*\tau(\alpha,\beta))$$

è una n-forma esatta.

1.3 L'operatore di Laplace

Siamo pronti ora per definire l'operatore di Laplace:

Definizione 4. L'operatore

$$\Delta\colon \Omega^k M \to \Omega^k M$$

definito come $\Delta := d\delta + \delta d$ si dice operatore di Laplace ed è un operatore differenziale di ordine 2.

Osservazione 1. L'operatore di Laplace è auto-aggiunto.

Dimostrazione. Siano α, $\beta \in \Omega^k M$, si ha:

$$\langle \Delta\alpha|\beta\rangle = \langle d\delta\alpha|\beta\rangle + \langle \delta d\alpha|\beta\rangle = \langle \delta\alpha|\delta\beta\rangle + \langle d\alpha|d\beta\rangle = \langle \alpha|d\delta\beta\rangle + \langle \alpha|\delta d\beta\rangle = \langle \alpha|\Delta\beta\rangle\,.$$

□

Vogliamo arrivare a dimostrare che l'operatore di laplace è un operatore ellittico, prima di poterlo fare ci servono alcune definizioni:

Definizione 5. Sia $P\colon \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ un operatore differenziale lineare tale che sugli aperti che banalizzano entrambi i fibrati si scrive $P(\alpha)(x) = \sum_{|I|=k} P_I(x) D^I \alpha(x)$, allora definiamo il simbolo principale dell'operatore P come un'applicazione

$$\sigma_{P,x}\colon T_x^* M \to Hom(E_x, F_x), \quad \sigma_{P,x}(\xi) := \sum_{|I|=k} P_I \xi^I.$$

Osservazione 2. Siano $\xi = (E, \pi, M)$, $\xi' = (F, \pi', M)$, $\xi'' = (G, \pi'', M)$ tre fibrati su M e siano $P \colon \Gamma(E) \to \Gamma(F)$, $G \colon \Gamma(F) \to \Gamma(G)$ due operatori differenziali lineari di ordine rispettivamente k e l; allora $Q \circ P \colon \Gamma(E) \to \Gamma(G)$ è di ordine $k + l$ e si ha che

$\sigma_{Q \circ P,x}(\psi) = \sigma_{Q,x}(\psi) \sigma_{P,x}(\psi)$.

Osservazione 3.

$$\sigma_{P^*,x}(\psi) = (-1)^k \sigma_{P,x}(\psi)^*,$$

dove $\sigma_{P,x}(\psi)^*$ è la matrice aggiunta di $\sigma_{P,x}(\psi)$.

Definizione 6. Dato $P \colon \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ operatore differenziale lineare di grado k si dice ellittico se $\forall \xi \in T_x^* M \setminus \{0\}$ e $\forall x \in M$ il simbolo principale è un'applicazione iniettiva.

Lemma 1.7. *Il simbolo principale dell'operatore di Laplace è descritto da*

$$\sigma_{\Delta,x}(\xi)(\phi) = -\|\xi\|^2 \phi, \quad \xi \in T_x^* M, \phi \in \Omega^k M.$$

Osservazione 4. Prima della dimostrazione abbiamo bisogno di alcuni richiami sul prodotto interno.

Siano $X \in TM$, $\psi \in \Lambda^k M$ allora definiamo il prodotto interno nel seguente modo:

$$(X \lrcorner \psi)(v_1, \ldots, v_{k-1}) = \psi(X, v_1, \ldots, v_{k-1}).$$

Inoltre valgono le seguenti proprietà: $\forall \phi, \psi \in \Lambda^k M$

$$\langle \psi | dx_i \wedge \phi \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \lrcorner \psi | \phi \right\rangle,$$

$$X \lrcorner (\phi \wedge \psi) = (X \lrcorner \phi) \wedge \psi + (-1)^k \phi \wedge (X \lrcorner \psi).$$

Dimostrazione. Dimostreremo il lemma solo nel caso in cui $M \subset \mathbb{R}^n$ aperto e g sia la metrica standard $\sum_i {dx_i}^2$.

Consideriamo le forme $\omega \in \Omega^k M$ e $\tau \in \Omega^{k-1} M$ entrambe a supporto compatto; localmente possiamo scrivere $\omega = \sum_{|I|=k} f_I dx_I$ e $\tau = \sum_{|J|=k-1} \rho_J dx_J$.

Calcoliamo il differenziale di τ:

$d\tau = \sum_{|J|=k-1,\mu} \frac{\partial \rho_J}{\partial x_\mu} dx_\mu \wedge dx_J$;

indichiamo

$\frac{\partial \tau}{\partial x_\mu} = \sum_{|J|=k-1} \frac{\partial \rho_J}{\partial x_\mu} dx_J$

allora il differenziale diventa

$d\tau = \sum_\mu dx_\mu \wedge \frac{\partial \tau}{\partial x_\mu}$.
Andiamo a calcolare il codifferenziale di ω:

$$\int_M \langle \delta\omega(x)|\tau(x)\rangle \, dv(x) = \int_M \langle \omega(x)|d\tau(x)\rangle \, dv(x)$$

$$= \int_M \sum_\mu \left\langle \omega(x)|dx_\mu \wedge \frac{\partial \tau(x)}{\partial x_\mu} \right\rangle dv(x)$$

utilizzando la prima proprietà dell'osservazione si ha:

$$= \int_M \sum_\mu \left\langle \frac{\partial}{\partial x_\mu} \lrcorner \omega(x)| \frac{\partial \tau(x)}{\partial x_\mu} \right\rangle dv(x)$$

integrando per parti e ricordando che tutte le forme sono a supporto compatto otteniamo:

$$= -\int_M \sum_\mu \left\langle \frac{\partial}{\partial x_\mu} \lrcorner \frac{\partial}{\partial x_\mu} \omega(x)|\tau(x) \right\rangle dv(x).$$

Poiché la scelta di τ è arbitraria allora abbiamo ottenuto:

$$\delta\omega(x) = -\sum_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} \lrcorner \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \omega(x) = -\sum_{|I|=k,\mu} \frac{\partial f_I}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \lrcorner dx_I.$$

Allora

$$d\delta\omega(x) = -\sum_{|I|=k,\mu,\lambda} \frac{\partial^2 f_I}{\partial x_\mu \partial x_\lambda} dx_\lambda \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} \lrcorner dx_I \right).$$

Con calcoli analoghi si ottiene che

$$\delta d\omega(x) = -\sum_{|I|=k,\mu,\lambda} \frac{\partial^2 f_I}{\partial x_\mu \partial x_\lambda} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \lrcorner (dx_\mu \wedge dx_I).$$

Dunque

$$\Delta\omega(x) = -\sum_{|I|=k,\mu,\lambda} \frac{\partial^2 f_I}{\partial x_\mu \partial x_\lambda} \left[dx_\lambda \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} \lrcorner dx_I \right) + \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \lrcorner (dx_\mu \wedge dx_I) \right].$$

Utilizziamo ora la seconda proprietà dell'osservazione e otteniamo che se $\lambda \neq \mu$ allora il secondo membro si annulla mentre se $\lambda = \mu$ si ha

$$\left[dx_\lambda \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} \lrcorner dx_I \right) + \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \lrcorner (dx_\mu \wedge dx_I) \right] = dx_I.$$

Otteniamo perciò

$$\Delta\omega(x) = -\sum_{|I|=k}(\sum_{\lambda}\frac{\partial^2 f_I}{\partial x_\lambda^2})dx_I.$$

Ci rimane solo da verificare che

$$\sum_{\lambda}\frac{\partial^2 f_I}{\partial x_\lambda^2}$$

sia una norma:consideriamo la forma bilineare $A\colon T_pM \otimes T_pM \to \mathbb{R}$ definita come $A := \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right)_i^T Id\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p\right)_j$. A è un'applicazione bilineare, simmetrica (perché la matrice Id, che è proprio la matrice indotta dalla metrica g, è simmetrica) e non degenere, dato che $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right)_i$ è una base, e quindi induce una norma:

$$A(f,f) = \|f\|^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right)^T\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right)(f) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2},$$

e questo conclude la dimostrazione. □

Corollario 1.8. *Il laplaciano è un operatore ellittico.*

Dimostrazione. L'applicazione $\xi \mapsto -\|\xi\|^2$ è chiaramente iniettiva $\forall\xi \in T_p^*M \setminus \{0\}$. □

Capitolo 2

Operatori di Lefschetz

A cura di Livia Campo

Sia (M, g) una varietà Kähleriana di dimensione complessa n e sia Ω la sua 2-forma di Kähler. Definiamo i seguenti operatori, detti *operatori di Lefschetz*

$$\begin{aligned} L \,:\, \Omega^k_{M,\mathbb{R}} &\longrightarrow \Omega^{k+2}_{M,\mathbb{R}} \qquad L(\omega) := \Omega \wedge \omega \\ \Lambda \,:\, \Omega^{k+2}_{M,\mathbb{R}} &\longrightarrow \Omega^{k}_{M,\mathbb{R}} \qquad \Lambda(\omega) := *^{-1} L * \omega \,. \end{aligned}$$

Notiamo che Λ è l'aggiunto formale di L, poiché

$$\begin{aligned} \langle \omega, \Lambda\varphi \rangle &= \langle \omega, *^{-1} L * \varphi \rangle = \omega \wedge * \left(*^{-1} L * \varphi \right) \\ &= \omega \wedge L * \varphi = \omega \wedge \Omega \wedge (*\varphi) = (-1)^{2k} \, (L\omega) \wedge (*\varphi) \\ &= \langle L\omega, \varphi \rangle \,. \end{aligned}$$

Osserviamo che gli operatori di Lefschetz sono $\mathbb{R}$-lineari, in quanto il prodotto wedge $\wedge$ è $\mathbb{R}$-bilineare.

L'obiettivo che ci proponiamo di perseguire in questa sezione del seminario è di mostrare come l'operatore di Lefschetz L applicato $(n-k)$ volte ad una k-forma sia un isomorfismo tra il fibrato delle k- forme su M e quello delle $(2n-k)$-forme su M, e di come questo isomorfismo ci permetta di trovare una decomposizione delle k-forme in termini di immagini, tramite operatori di Lefschetz, di particolari forme dette *primitive.* Inoltre vedremo come l'isomorfismo e la decomposizione indurranno analoghi isomorfismo e decomposizione in coomologia. L'esistenza di quest'ultima decomposizione prende il nome di *Teorema difficile di Lefschetz.*

2.1 Decomposizione di Lefschetz per le forme

Enunciamo ora il seguente teorema:

Teorema 2.1.1. *Il morfismo di fibrati vettoriali*

$$L^{n-k} \,:\, \Omega^k_{M,\mathbb{R}} \longrightarrow \Omega^{2n-k}_{M,\mathbb{R}}$$

è un isomorfismo.

Osservazione 1. È possibile, riscalando gli indici, riscrivere L^{n-k} nel seguente modo:

$$L^k \,:\, \Omega^{n-k}_{M,\mathbb{R}} \longrightarrow \Omega^{n+k}_{M,\mathbb{R}} \,.$$

Per dimostrare il teorema 2.1.1 necessitiamo di una *relazione di commutazione.*

Lemma 2.1.2. *Vale la seguente identità:*

$$[L, \Lambda] = (k-n)Id \qquad in\, \Omega^k_{M,\mathbb{R}} \,. \tag{2.1}$$

Non proveremo il lemma 2.1.2 in quanto la dimostrazione risulta essere piuttosto laboriosa e non fondamentale nell'ottica del presente elaborato. Tuttavia enunciamo e dimostriamo nel seguente lemma una naturale generalizzazione della precedente relazione di commutazione.

Lemma 2.1.3. *Vale la seguente identità:*

$$[L^r, \Lambda] = r(k-n+r-1)L^{r-1} \qquad in\, \Omega^k_{M,\mathbb{R}} \,. \tag{2.2}$$

Dimostrazione del lemma 2.1.3. Per induzione su r. La base dell'induzione è costituita dal lemma 2.1.2. Allora, per definizione di commutatore e per $\mathbb{R}$-linearità di L,

$$\begin{aligned}
[L^r, \Lambda] &= L^r\Lambda - \Lambda L^r = L^r\Lambda - L\Lambda L^{r-1} + L\Lambda L^{r-1} - \Lambda L^r \\
&= L\left(L^{r-1}\Lambda - \Lambda L^{r-1}\right) + \left(L\Lambda - \Lambda L\right) L^{r-1} = \\
&= L\left[L^{r-1}, \Lambda\right] + [L, \Lambda]\, L^{r-1}
\end{aligned}$$

L'ipotesi induttiva è $\left[L^{r-1}, \Lambda\right] = (r-1)(k-n+(r-1)-1)L^{r-2}$. Inoltre, poiché L^{r-1} manda k-forme in $(k+2r-2)$-forme e riconoscendo nel secondo addendo la base dell'induzione, otteniamo che l'ultimo membro dell'uguaglianza è uguale a

$$(r-1)(k-n+(r-1)-1)L^{r-1} + (k+2r-2-n)L^{r-1} = r(k-n+r-1)L^{r-1}\ .$$

□

A questo punto ci è possibile dimostrare il teorema 2.1.1.

Dimostrazione del teorema 2.1.1. Osserviamo innanzitutto che $\Omega^k_{M,\mathbb{R}}$ e $\Omega^{2n-k}_{M,\mathbb{R}}$ sono fibrati vettoriali dello stesso rango, perché, per ogni $x \in M$, l'operatore $*$ di Hodge, che è un isomorfismo, manda k-forme in $(2n-k)$-forme, fibra per fibra. Allora ci basta provare solamente l'iniettività di L^{n-k}, dal momento che la suriettività segue dal fatto che i due fibrati hanno lo stesso rango. Supponiamo quindi che $\alpha \in \Omega^k_{M,\mathbb{R}}$ sia tale che $L^r\alpha = 0$, e vogliamo dimostrare che $\alpha = 0$. Allora, sfruttando l'identità di commutazione generalizzata contenuta nel lemma 2.1.3, otteniamo che

$$L^r\Lambda\alpha - r(k-n+r-1)L^{r-1}\alpha = 0\ ;$$
$$L^{r-1}\left(L\Lambda - r(k-n+r-1)Id\right)(\alpha) = 0\ .$$

Procedendo per induzione su $r \leq n-k$, assumiamo che L^{r-1} sia iniettiva (la base dell'induzione è costituita da $r = 0$, ovvero da $L^0 = Id$). Di conseguenza si deve per forza avere $\left(L\Lambda - r(k-n+r-1)Id\right)(\alpha) = 0$. Dal momento che per $r \leq n-k$ la quantità $k-n+r-1 \neq 0$, per iniettività di L abbiamo che $\alpha = L\beta$ con $\beta \in \Omega^{k-2}_{M,\mathbb{R}}$ tale che $L^{r+1}\beta = 0$. Procedendo ora per induzione su k concludiamo che $\beta = 0$, cioè, per la base dell'induzione fatta per r, $\alpha = 0$. Ciò implica che L^{n-k} è iniettiva, quindi è un isomorfismo. □

Introduciamo il concetto di *forma primitiva*.

Definizione 2.1. Una k-forma $\alpha \in \Omega^k_{M,\mathbb{R}}$ con $k \leq n$ si dice *primitiva* se $\Lambda\alpha = 0$.

Forniamo ora un'utile caratterizzazione per le forme primitive in termini dell'operatore di Lefschetz L.

Lemma 2.1.4. *Una forma $\alpha \in \Omega^k_{M,\mathbb{R}}$ è primitiva se e solo se $L^{n-k+1}\alpha = 0$.*

Dimostrazione. Supponiamo $\alpha \neq 0$ primitiva (se $\alpha = 0$ è primitiva la tesi segue dall'iniettività di L^{n-k+1}). Chiamiamo $r > 0$ l'esponente minimo per cui $L^r\alpha = 0$. Allora, per il lemma 2.1.3 abbiamo che

$$0 = [L^r, \Lambda] = r(k - n + r - 1)L^{r-1}\alpha \,.$$

Dal momento che r era l'esponente minimo per cui $L^r\alpha$ si annullava, allora $L^{r-1}\alpha \neq 0$; quindi, l'ultima uguaglianza è vera se e solo se $k - n + r - 1 = 0$, cioè se $n - k = r - 1$. Di conseguenza $L^{n-k}\alpha \neq 0$, che implica $L^{n-k+1}\alpha = 0$ per minimalità di $n - k + 1$.

Viceversa, supponiamo che α sia tale che $L^{n-k+1}\alpha = 0$. Allora, per definizione di commutatore e per il lemma 2.1.3

$$\begin{aligned} 0 &= (k - n + (n - k + 2) - 1)(n - k + 2)L^{n-k+1}\alpha = \left[L^{n-k+2}, \Lambda\right](\alpha) \\ &= L^{n-k+2}\Lambda\alpha - \Lambda L^{n-k+2}\alpha = L^{n-k+2}\Lambda\alpha \,. \end{aligned}$$

Quindi, dal momento che L^{n-k+2} è un isomorfismo, abbiamo che l'uguaglianza $L^{n-k+2}\Lambda\alpha = 0$ è verificata se e solo se $\Lambda\alpha = 0$, cioè la tesi. $\square$

Abbiamo ora tutti gli strumenti che ci servono per dimostrare il seguente teorema di decomposizione.

Teorema 2.1.5 (Decomposizione di Lefschetz)**.** *Ogni $\alpha \in \Omega^k_{M,x,\mathbb{R}}$ ammette un'unica decomposizione $\alpha = \sum_{r\geq 0} L^r\alpha_r$, dove ogni α_r è una $(k - 2r)$-forma, e con $\Omega^k_{M,x,\mathbb{R}}$ indichiamo la fibra corrispondente a $x \in M$ nel fibrato $\Omega^k_{M,\mathbb{R}}$.*

Osservazione 2. Definendo $P^{n-k} := \{\beta \in \Omega^{n-k}_{M,\mathbb{R}} \mid \Lambda\beta = 0\}$ è possibile scrivere il teorema precedente come

$$\Omega^k_{M,\mathbb{R}} = \bigoplus_{r\geq 0} L^r P^{k-2r} \,.$$

Osservazione 3. Osserviamo che la somma presente nella decomposizione non è una serie, ma una somma effettiva. Infatti, il grado delle α_r diminuisce con l'aumentare di r, ma non può diventare strettamente minore di zero; quindi, da un certo passo in poi tutti gli addendi successivi saranno uguali a zero.

Dimostrazione. Esistenza. Consideriamo $L^{n-k+1}\alpha \in \Omega^{2n-k+2}_{M,x,\mathbb{R}}$. Allora, per il teorema 2.1.1, esiste $\beta \in \Omega^{k-2}_{M,x,\mathbb{R}}$ tale che $L^{n-k+2}\beta = L^{n-k+1}\alpha$; ciò implica che $\alpha_0 := \alpha - L\beta$ è primitivo, e $\alpha = \alpha_0 + L\beta$. Quindi, procedendo per induzione sul grado di β, cioè scrivendo $\beta = \beta_0 + L\beta'$, otteniamo $\alpha_1 = \beta_0$, $\alpha_2 = \beta_1$ e analogamente deduciamo tutte le α_r. Il grado delle α_r segue facilmente dall'induzione.

Unicità. Vogliamo dimostrare che l'applicazione

$$(\alpha_0, \dots, \alpha_{\overline{r}}) \longmapsto \sum_{r \geq 0} L^r \alpha_r$$

è iniettiva, cioè, se supponiamo $\sum_{r\geq 0} L^r \alpha_r = 0$, allora il vettore $(\alpha_0, \dots, \alpha_{\overline{r}})$ è il vettore nullo. Dal momento che $\sum_{r\geq 0} L^r \alpha_r = \alpha_0 + \sum_{r>0} L^r \alpha_r$ distinguiamo due casi, quello per $\alpha_0 = 0$ e quello per $\alpha_0 \neq 0$. Supponiamo che $\alpha_0 = 0$: allora, per linearità di L, $L\left(\sum_{r>0} L^{r-1}\alpha_r\right) = 0$, e ciò implica che, per il teorema 2.1.1, $\sum_{r>0} L^{r-1}\alpha_r = 0$. Quindi, reiterando questo argomento, sempre sfruttando l'iniettività degli operatori di Lefschetz, e ripercorrendolo poi a ritroso otteniamo che $\alpha_r = 0$ per ogni $r \geq 0$.

Supponiamo ora che $\alpha_0 \neq 0$. Allora α_0 è una forma primitiva di grado k, cioè, grazie al lemma 2.1.4, $L^{n-k+1}\alpha_0 = 0$. Di conseguenza, per linearità di L e delle sue potenze,

$$L^{n-k+1}\left(\sum_{r>0} L^r \alpha_r\right) = 0 = L^{n-k+2}\left(\sum_{r>0} L^{r-1}\alpha_r\right) .$$

Quindi, per iniettività di L^{n-k+2}, otteniamo che $\sum_{r>0} L^{r-1}\alpha_r = 0$. A questo punto ci siamo ricondotti al caso di $\alpha_0 = 0$, ovvero abbiamo provato che $\alpha_r = 0$ per ogni $r > 0$. Di conseguenza abbiamo ottenuto che

$$0 = \sum_{r\geq 0} L^r \alpha_r = \alpha_0 + \sum_{r>0} L^r \alpha_r = \alpha_0 ,$$

che è assurdo poiché avevamo supposto $\alpha_0 \neq 0$. Allora dobbiamo avere per forza $\alpha_0 = 0$. □

2.2 Decomposizione di Lefschetz in coomologia

Sia (M, g) una varietà Kähleriana di dimensione complessa n e Ω la sua 2-forma di Kähler. Dal momento che Ω è chiusa, essa appartiene ad una classe di de Rham $[\Omega]$. Allora l'operatore di Lefschetz L induce in coomologia un operatore

$$L \,:\, H^k(M, \mathbb{R}) \longrightarrow H^{k+2}(M, \mathbb{R}) ,$$

che chiameremo ancora L con un piccolo abuso di notazione. Osserviamo che L è un operatore ben definito, nel senso che manda forme chiuse in forme chiuse. Ciò è vero perché, se $\omega \in H^k(M,\mathbb{R})$ è una forma chiusa, allora $d(\Omega \wedge \omega) = d\Omega \wedge \omega + \Omega \wedge d\omega = 0$, ovvero $L(\omega)$ è una forma chiusa. Se aggiungiamo l'ipotesi che M sia compatta otteniamo in coomologia un risultato analogo al teorema 2.1.1.

Teorema 2.2.1. *Sia M una superficie di Kähler compatta di dimensione complessa n. Allora per ogni $k \leq n$ il morfismo*

$$L^{n-k} \,:\, H^k(M,\mathbb{R}) \longrightarrow H^{2n-k}(M,\mathbb{R})$$

è un isomorfismo.

Dimostrazione. Per dimostrare questo teorema ci avvarremo di varie affermazioni alcune delle quali saranno dimostrate successivamente in altre sezioni del presente elaborato oppure in altri seminari:

1. $[\Delta, L] = 0$, cioè il laplaciano commuta con L;

2. se (M,g) è una varietà riemanniana compatta orientata allora l'applicazione

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^k(M) &\longrightarrow H^k(M,\mathbb{R}) \\ \alpha &\longmapsto [\alpha] \end{aligned}$$

   è un isomorfismo, dove $\mathcal{H}^k(M) := \{\omega \in \Omega^k_{M,\mathbb{R}} \mid \Delta\omega = 0\}$ sono le forme armoniche;

3. $H^k(M,\mathbb{R}) \cong H^{2n-k}(M,\mathbb{R})^*$.

Dal punto 1 sappiamo che il laplaciano commuta con L, quindi commuta con tutte le potenze di L; allora L^{n-k} manda forme armoniche in forme armoniche, cioè

$$L^{n-k} \,:\, \mathcal{H}^k(M) \longrightarrow \mathcal{H}^{2n-k}(M)\,. \tag{2.3}$$

Inoltre, essendo M compatta per ipotesi, il punto 2 ci dice che $\mathcal{H}^k(M) \cong H^k(M,\mathbb{R})$ e che $\mathcal{H}^{2n-k}(M) \cong H^{2n-k}(M,\mathbb{R})$. Invece il punto 3 ci assicura che $H^k(M,\mathbb{R})$ e $H^{2n-k}(M,\mathbb{R})$ hanno la stessa dimensione. Allora l'iniettività di L^{n-k}, garantita dal teorema 2.1.1, basta per concludere la tesi, in quanto l'applicazione (2.3) è iniettiva tra spazî di uguale dimensione. $\square$

Enunciamo ora il Teorema difficile di Lefschetz.

Teorema 2.2.2 (Teorema difficile di Lefschetz)**.** *Ogni classe di coomologia* $\alpha \in H^k(M,\mathbb{R})$ *ammette un'unica decomposizione* $\alpha = \sum_{r\geq 0} L^r \alpha_r$*, dove le* α_r *sono* $(k-2r)$*-forme primitive, cioè* $L^{n-k+2r+1}\alpha_r = 0$*.*

La dimostrazione del Teorema difficile di Lefschetz è analoga a quella utilizzata per il caso relativo alle forme del teorema 2.1.5.

Osservazione 4. Definendo $P^{n-k}(M) := \ker L^{k+1} \cap H^{n-k}(M,\mathbb{R}) = \ker \Lambda \cap H^{n-k}(M,\mathbb{R})$, detta *coomologia primitiva*, possiamo scrivere la precedente decomposizione come

$$H^k(M,\mathbb{R}) = \bigoplus_{r\geq 0} L^r P^{k-2r}(M)\,.$$

2.3 Interpretazione geometrica del teorema difficile di Lefschetz

Concludiamo questa sezione del seminario proponendo un'interpretazione della decomposizione di Lefschetz nel caso in cui M è una varietà di Kähler compatta di dimensione complessa n embedded in $\mathbb{CP}^N =: \mathbb{P}^N$.

Consideriamo la forma di Fubini-Study su $\mathbb{P}^N$

$$\omega_{FS} = \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log|Z|^2\,.$$

Sappiamo che ω_{FS} è chiusa ma non esatta in $\mathbb{P}^N$, quindi individua una classe $[0] \neq [\omega_{FS}] \in H^2(\mathbb{P}^N)$.

Ricordiamo che la dualità di Poincaré e l'isomorfismo di de Rham combinati tra loro danno, per ogni k, un isomorfismo tra il $(2n-k)$-esimo gruppo di coomologia di una varietà compatta, orientabile e senza bordo M e il k-esimo gruppo di omologia. Osserviamo allora che questa affermazione asserisce equivalentemente che, per ogni k-ciclo A (rappresentante della classe $[A]$) su M esiste una $(2n-k)$-forma chiusa φ (rappresentante della classe $[\varphi]$) tale che, per ogni $(2n-k)$-ciclo B (rappresentante della classe $[B]$) su M è vera l'uguaglianza

$$\int_B \varphi = {}^\sharp(A\cdot B)\,, \tag{2.4}$$

dove con ${}^\sharp(A\cdot B)$ indichiamo il *numero di intersezione* tra i cicli A e B, cioè la somma sui punti $p \in A\cap B$ degli *indici di intersezione* $\iota_p(A\cdot B)$, uguali a $+1$ se i vettori tangenti ad A e a B formano una base orientata per T_pM con la stessa orientazione di quella assegnata, e -1 altrimenti. Se vale l'uguaglianza (2.4) diremo che A è *Poincaré-duale* a φ. In questa definizione abbiamo supposto per ipotesi che A e B siano cammini lisci, e che l'insieme $A \cap B$ dei punti di intersezione trasversale tra A e B sia finito.

La definizione di numero di intersezione è data in modo tale che due punti di intersezione che hanno indici opposti si semplifichino, eliminando così i problemi che nascono dal fatto che cammini in diverse classi possano avere un numero indeterminato di intersezioni.

Quindi notiamo che la definizione di numero di intersezione dipende solo dalle classi di omologia rappresentate da A e da B, cioè $^\sharp(A' \cdot B) = {}^\sharp(A \cdot B)$ per $[A] = [A']$ (basta dimostrare che $[A] = [0]$ implica che $^\sharp(A \cdot B) = 0$).

Osserviamo infine che le ipotesi fatte su A e B non sono restrittive. Infatti, per tutte le coppie di classi di omologia $\tilde{A} \in H_k(M, \mathbb{R})$ e $\tilde{B} \in H_{2n-k}(M, \mathbb{R})$ esistono dei rappresentanti lisci A e B che si intersecano trasversalmente.

Tornando quindi alla forma di Fubini-Study, notiamo che, essendo una $(1,1)$-forma, ω_{FS} è Poicaré-duale ad un iperpiano $H \cong \mathbb{P}^{N-1}$ in $\mathbb{P}^N$; infatti, per ogni $l \cong \mathbb{P}^1$ retta proiettiva in $\mathbb{P}^N$,

$$\int_{\mathbb{P}^1} \omega_{FS} = \int_l \omega_{FS} = 1 = {}^\sharp(H \cdot l)\,.$$

Dal momento che la forma di Fubini-Study è una forma globale su $\mathbb{P}^N$ ed individua su di esso una metrica di Kähler, possiamo restringerla ad una varietà $M \subset \mathbb{P}^N$ nelle ipotesi elencate all'inizio del paragrafo, ottenendo così la forma di Kähler $\Omega := \omega_{FS} \mid_M$ associata ad M; ad Ω corrisponde quindi, tramite la dualità di Poincaré, a $V := M \cap H$.

Allora, poiché l'operatore di Lefschetz L è, per definizione, il prodotto wedge di una forma per Ω (i.e. $\Omega \wedge \bullet$), esso è Poincaré-duale in omologia all'operazione di intersezione del ciclo corrispondente per un iperpiano $\mathbb{P}^{N-1}$ (i.e. $\bullet \cap \mathbb{P}^{N-1}$). Generalizzando, applicare L^k ad una $(n-k)$-forma significa, in omologia, intersecare l'$(n+k)$-ciclo associato k volte con un $\mathbb{P}^{N-1}$, ovvero intersecare il ciclo con un $\mathbb{P}^{N-k}$. Abbiamo quindi il seguente diagramma commutativo.

$$\begin{array}{ccc}
H^{n-k}(M) & \xrightarrow{L^k} & H^{n+k}(M) \\
{\scriptstyle PD}\big\downarrow & & {\scriptstyle PD}\big\downarrow \\
H_{n+k}(M) & \xrightarrow[\cap \mathbb{P}^{N-k}]{} & H_{n-k}(M)
\end{array}$$

Rimane solo da capire qual è il comportamento in omologia delle forme primitive, ovvero dove la coomologia primitiva P^{n-k} viene mappata dagli isomorfismi del diagramma.

Ricordiamo che, nella notazione adottata in questo paragrafo, α è una $(n-k)$-forma primitiva se e solo se $L^{k+1}\alpha = 0$ (lemma 2.1.4) e, facendo esplicito riferimento alla dimostrazione di questa caratterizzazione, sappiamo che $k+1$ è il minimo esponente per cui ciò accade. Allora vuol dire che se intersechiamo il ciclo Poincaré-duale ad α, che chiameremo C, con un $\mathbb{P}^{N-k}$ otteniamo un ciclo diverso da zero, ovvero $C \in M \cap \mathbb{P}^{N-k}$. Ma non appena intersechiamo quanto ottenuto per un $\mathbb{P}^{N-1}$, cioè non appena applichiamo L a $L^k\alpha$, per via del lemma 2.1.4, $C \cap \mathbb{P}^{N-(k+1)} = \varnothing$. Quindi, in conclusione, la coomologia primitiva P^{n-k} corrisponde al sottogruppo costituito da tutti gli $(n-k)$-cicli che non intersecano un iperpiano.

Quest'interpretazione geometrica rappresenta una connessione tra il Teorema difficile di Lefschetz e il Teorema della sezione iperpiana di Lefschetz.

Capitolo 3

Le Identità di Kähler

A cura di Riccardo Gianni

Nelle sezioni precedenti abbiamo introdotto alcuni concetti generali riguardanti gli operatori su varietà Riemanniane qualsiasi, abbiamo definito alcuni operatori fondamentali come l'*operatore* $*$ *di Hodge*, il *differenziale di de Rham* d (che su varietà complesse ha componenti ∂ e $\bar{\partial}$), il suo aggiunto δ e quindi il *Laplaciano* Δ. Abbiamo in seguito introdotto l'operatore L di Lefschetz ed il suo aggiunto Λ e quindi abbiamo trattato la teoria di Lefschetz, in particolare enunciando e dimostrando il *teorema di decomposizione primitiva di Lefschetz*, che ci sarà utile in seguito.
Da ora in avanti, dunque, la struttura di cui parleremo sarà sempre quella di *varietà complessa* M *dotata di una struttura di Kähler*, e ci occuperemo prima di tutto di fare alcune importanti considerazioni che ci permetteranno di acquisire una maggiore familiarità con gli operatori ∂ e $\bar{\partial}$ e che torneranno particolarmente utili in seguito, per dimostrare il risultato che sarà il nucleo e punto di arrivo di questa ultima sezione del seminario, ovvero il teorema sulle *Identità di commutazione di Kähler*.

3.1 Alcune considerazioni su ∂ e $\bar{\partial}$

Incominciamo ricordando sommariamente le definizioni di ∂ e $\bar{\partial}$:

$$\begin{aligned}\partial : \Omega^{p,q}(M) &\longrightarrow \Omega^{p+1,q}(M)\\ \bar{\partial} : \Omega^{p,q}(M) &\longrightarrow \Omega^{p,q+1}(M)\end{aligned}$$

con $d = \partial + \bar{\partial}$.

Lemma 3.1.1. *Valgono le seguenti relazioni:*

$$\partial^2 = 0, \quad \bar{\partial}^2 = 0, \quad \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0. \tag{3.1}$$

ed in più ∂ e $\bar{\partial}$ rispettano la regola di derivazione di Leibniz.

Dimostrazione. La dimostrazione delle tre relazioni in (3.1) segue direttamente da $d^2 = 0$. Infatti abbiamo che

$$0 = d^2 = (\partial + \bar{\partial})^2 = \partial^2 + \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial + \bar{\partial}^2$$

e, essendo ∂ e $\bar{\partial}$ operatori a valori in sottofibrati di $\bigwedge^*_{\mathbb{C}}(M)$ differenti tra loro, l'unica possibilità affinché la somma si annulli è che valgano le (3.1).

La validità della regola di Leibniz si dimostra considerando il differenziale d ed utilizzando la regola di Leibniz già nota per d rispetto al prodotto wedge. Si ha infatti:

$$\begin{aligned} \partial(\alpha \wedge \beta) + \bar{\partial}(\alpha \wedge \beta) &= d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{p+q}\alpha \wedge d\beta \\ &= \partial\alpha \wedge \beta + \bar{\partial}\alpha \wedge \beta + (-1)^{p+q}\alpha \wedge \partial\beta + (-1)^{p+q}\alpha \wedge \bar{\partial}\beta \end{aligned}$$

che è esattamente l'espressione della regola cercata.

□

Procediamo ora ad introdurre gli aggiunti formali ∂^* e $\bar{\partial}^*$ degli operatori ∂ e $\bar{\partial}$, con il seguente

Lemma 3.1.2. *$\partial^* = - * \bar{\partial} *$ e $\bar{\partial}^* = - * \partial *$ sono gli aggiunti formali degli operatori ∂ e $\bar{\partial}$, rispettivamente.*

Dimostrazione. Stiamo considerando il caso complesso, in cui sappiamo valere, per il prodotto scalare considerato, $\langle \alpha, \beta \rangle dV = \alpha \wedge *\bar{\beta}$; aggiungiamo inoltre, senza perdere di generalità, l'ipotesi che le forme che considereremo siano tutte quante a supporto compatto, affinché gli integrali siano tutti ben definiti.

Osserviamo quindi che per ogni ϕ $(2n-1)$-forma (dove sia n la dimensione complessa della varietà M considerata e dunque $2n$ la sua dimensione reale) si ha che

$$\int_M \bar{\partial}\phi = 0. \tag{3.2}$$

Cominciamo verificando l'identità per $\bar{\partial}^*$:

$$\langle \bar{\partial}\alpha, \beta \rangle dV = \bar{\partial}\alpha \wedge *\bar{\beta} = \bar{\partial}(\alpha \wedge *\bar{\beta}) - (-1)^{p+q}\alpha \wedge \bar{\partial} * \bar{\beta}$$

da cui, calcolando l'integrale, troviamo:

$$\int_M \langle \bar{\partial}\alpha, \beta \rangle dV = \int_M \bar{\partial}(\alpha \wedge *\bar{\beta}) - \int_M (-1)^{p+q}\alpha \wedge \bar{\partial} * \bar{\beta},$$

in cui il primo addendo del membro di destra è nullo, per la (3.2), e quindi

$$\int_M \langle \bar{\partial}\alpha, \beta \rangle dV = -\int_M (-1)^{p+q}\alpha \wedge \overline{\partial * \beta} = -\int_M (-1)^{p+q}\alpha \wedge \overline{* *^{-1} \partial * \beta}$$

da cui, usando il fatto che $*^{-1} = (-1)^{p+q}*$

$$= -\int_M \alpha \wedge \overline{* * \partial * \beta} = \int_M \alpha \wedge \overline{*\bar{\partial}^* \beta} = \int_M \langle \alpha, \bar{\partial}^* \beta \rangle dV,$$

che è esattamente la relazione cercata per $\bar{\partial}$.

Per dimostrare la stessa relazione per l'aggiunto dell'operatore ∂ i conti sono assolutamente analoghi.

$\square$

Concludiamo questa sezione dando le definizioni di altri due operatori Laplaciani, il cui legame con Δ sarà chiaro in seguito e che saranno utili in particolare per le loro applicazioni nelle *teorie di Hodge e Dolbeault*.

Definizione 3.1. Definiamo gli operatori Laplaciani associati a ∂ e $\bar{\partial}$, rispettivamente, come

$$\begin{aligned} \Delta^{\partial} &= \partial\partial^* + \partial^*\partial \\ \Delta^{\bar{\partial}} &= \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}. \end{aligned}$$

3.2 Identità di commutazione di Kähler

In questa sezione enunceremo e discuteremo il teorema centrale di questa terza parte del seminario, cioè quello sulle identià di Kähler, importanti risultati di commutazione tra alcuni degli operatori definiti finora, validi nel caso di varietà Kähleriane.
Divideremo il teorema in due parti, sia perché le identità possono essere concettualmente raggruppate in questo modo, sia perchè le prime saranno massicciamente impiegate nella dimostrazione delle altre.
Procediamo dunque ad enunciare il teorema.

Teorema 3.2.1. *(Kähler) Sia M una varietà complessa dotata di una struttura di Kähler, con forma fondamentale Ω. Valgono le seguenti identità:*

1. $[\bar{\partial}, L] = [\partial, L] = 0$ *e* $[\bar{\partial}^*, \Lambda] = [\bar{\partial}^*, \Lambda] = 0$*;*

2. $[\bar{\partial}^*, L] = i\partial, \quad [\partial^*, L] = -i\bar{\partial}, \quad [\Lambda, \bar{\partial}] = -i\partial^*, \quad [\Lambda, \partial] = i\bar{\partial}^*.$

Per facilitare la dimostrazione del punto 2. del teorema, introduciamo un nuovo operatore, che faciliti i calcoli.

Definizione 3.2. Sia J la struttura quasi-complessa integrabile associata alla varietà M, definiamo il cosiddetto *differenziale twisted* $d^c := J^{-1}dJ$.

Ci tornerà tuttavia più utile una differente caratterizzazione di questo nuovo operatore, infatti se consideriamo una qualsiasi (p, q)-forma α, abbiamo che J agisce su α come moltiplicazione per i^{p-q} e quindi ovviamente J^{-1} agisce come moltiplicazione per i^{q-p}, e da ciò troviamo che

$$\begin{aligned} d^c(\alpha) &= J^{-1}dJ(\alpha) = i^{p-q}J^{-1}(d(\alpha)) = i^{p-q}J^{-1}(\partial + \bar{\partial})(\alpha) = \\ &= i^{p-q}(i^{q-p-1}\partial + i^{q+1-p}\bar{\partial})(\alpha) = i^{p-q} \cdot i^{q-1-p}(\partial - \bar{\partial})(\alpha) \end{aligned}$$

e dunque, semplificando, abbiamo la caratterizzazione che volevamo:

$$d^c = -i(\partial - \bar{\partial}). \tag{3.3}$$

Inoltre, possiamo facilmente calcolare l'aggiunto formale di d^c:

$$(d^c)^* = - * d^c * = i * (\partial - \bar{\partial}) * . \tag{3.4}$$

L'introduzione di questo nuovo operatore, come accennato, è giustificata dal punto *2.* del teorema.
Infatti, per bilinearità del bracket, la *2.* implica che

$$[\Lambda, d] = i(\bar{\partial}^* - \partial^*) = -i * (\partial - \bar{\partial}) * = -(d^c)^*.$$

Questa implicazione è in realtà una equivalenza, dal momento che, come già detto prima, gli operatori ∂ e $\bar{\partial}$ non interferiscono tra loro, formando componenti separate dell'operatore differenziale di de Rham d.
In poche parole, dimostrare il punto *2.* si riduce ad un problema equivalente con l'operatore d^c.
Ci accingiamo quindi a dare una esauriente dimostrazione del teorema di Kähler.

Dimostrazione. (Kähler) Cominciamo mostrando la validità del punto *1.*
Nel seguito prenderemo α (p,q)-forma.
Usando la definizione dell'operatore di Lefschetz L e la regola di Leibniz per ∂ e $\bar{\partial}$, abbiamo

$$[\bar{\partial}, L](\alpha) = \bar{\partial}L(\alpha) - L\bar{\partial}(\alpha) = \bar{\partial}(\Omega \wedge \alpha) - \Omega \wedge \bar{\partial}(\alpha) = \bar{\partial}(\Omega) \wedge \alpha = 0$$

L'uguaglianza a 0 è data dalla definizione stessa di differenziale: $\bar{\partial}(\Omega)$ è la parte (1,2) della forma $d\Omega$, che su di una varietà di Kähler è uguale a 0.
Allo stesso modo

$$[\partial, L](\alpha) = \partial(\Omega \wedge \alpha) - \Omega \wedge \partial(\alpha) = \partial(\Omega) \wedge \alpha = 0.$$

Dimostriamo quindi che $[\bar{\partial}^*, \Lambda](\alpha) = 0 \ \forall \alpha \in \Omega^{p,q}(M)$.
Ricordiamo le espressioni degli aggiunti formali:

$$\bar{\partial}^* = - * \partial *, \qquad \Lambda = L^* = *^{-1} L * .$$

Facciamo quindi i calcoli ed otteniamo:

$$\begin{aligned}
[\bar{\partial}^*, \Lambda](\alpha) &= \bar{\partial}^*\Lambda(\alpha) - \Lambda\bar{\partial}^*(\alpha) = - * \partial * \Lambda(\alpha) + \Lambda * \partial * (\alpha) \\
&= - * \partial * *^{-1} L * (\alpha) + *^{-1} L * * \partial * (\alpha) \\
&= - * \partial L * (\alpha) + (-1)^k *^{-1} L\partial * (\alpha) \\
&= - * \partial L * (\alpha) + * L\partial * (\alpha)
\end{aligned}$$

In particolare nell'ultima uguaglianza abbiamo sfruttato il fatto che, su k-forme, vale $*^2 = (-1)^k$ e $*^{-1} = (-1)^k *$.
Nell'ultima espressione trovata, in particolare, possiamo individuare facilmente il commutatore $[\partial, L]$ e quindi otteniamo $- * [\partial, L]\partial(\alpha)$, che, per quanto visto, è uguale a 0.
In maniera assolutamente analoga vale

$$\begin{aligned}
[\partial^*, \Lambda](\alpha) &= \partial^*\Lambda(\alpha) - \Lambda\partial^*(\alpha) = - * \bar{\partial} L * (\alpha) + * L\bar{\partial} * (\alpha) \\
&= - * [\bar{\partial}, L] * (\alpha) = 0.
\end{aligned}$$

Passiamo quindi a dimostrare il punto *2.* del teorema.
Come detto, in particolare vogliamo mostrare che $[\Lambda, d] = -(d^c)^*$, e, per bilinearità del *bracket* [,], lo facciamo sfruttando il teorema di decomposizione primitiva di Lefschetz,

visto nella seconda parte del seminario, e quindi dimostrando l'identità separatamente per forme del tipo $L^j(\alpha)$, con α primitivo, vale a dire $\alpha \in P^k = \ker(\Lambda) \cap \Omega^k(M)$.
Osserviamo innanzi tutto che, visto che $\alpha \in \Omega^k(M)$, allora $d\alpha \in \Omega^{k+1}(M)$ e dunque vale la decomposizione primitiva

$$d\alpha = \alpha_0 + L\alpha_1 + L^2\alpha_2 + \dots \ , \qquad \alpha_j \in P^{k+1-2j} \tag{3.5}$$

ed abbiamo inoltre visto, nella precedente parte del seminario, la caratterizzazione secondo cui una k-forma primitiva α è tale che $L^{n-k+1}(\alpha) = 0$, e quindi applichiamo L^{n-k+1} all'identità di decomposizione appena vista:

$$L^{n-k+1}d\alpha = L^{n-k+1}\alpha_0 + L^{n-k+2}\alpha_1 + L^{n-k+3}\alpha_2 + \dots \ ,$$

in cui per il primo membro, per quanto visto sulla commutazione di L e d e sulla caratterizzazione delle k-forme primitive, vale

$$L^{n-k+1}d\alpha = dL^{n-k+1}\alpha = 0$$

Visto che la decomposizione primitiva di Lefschetz che abbiamo usato è una decomposizione in somma diretta, questo fatto implica che ogni singolo addendo della decomposizione risulta nullo.
Ricordiamo inoltre che L^r è iniettiva su $\Omega^i_{M,\mathbb{R}}$ per $r \leq n - i$.
In questo caso dobbiamo considerare nuovamente il fatto che $\alpha_j \in P^{k+1-2j}$, quindi in particolare $\alpha_j \in \Omega^{k+1-2j}(M)$, cioè $i = k + 1 - 2j$.
La condizione da verificare sarà quindi

$$n - k + j + 1 = r \leq n - i = n - k - 1 + 2j,$$

da cui, sfruttando l'iniettività di cui sopra, si ottiene che $\alpha_j = 0$ per ogni $j \geq 2$, e quindi in realtà la decomposizione, per α primitiva, è

$$d\alpha = \alpha_0 + L\alpha_1 \tag{3.6}$$

con α_0 e α_1 primitive, cioè $\Lambda\alpha_0 = \Lambda\alpha_1 = 0$.
Quindi ora calcoliamo $[\Lambda, d](L^j\alpha)$ per $\alpha \in P^k$, e lo facciamo calcolando le due parti del commutatore separatamente; infatti abbiamo che, dal momento che $[d, L] = 0$ e $\Lambda\alpha_i = 0$, vale

$$\begin{aligned} \Lambda dL^j\alpha &= \Lambda L^j d\alpha = \Lambda L^j\alpha_0 + \Lambda L^{j+1}\alpha_1 \\ &= -j(k - n + j)L^{j-1}\alpha_0 - (j + 1)(k - 1 - n + j)L^j\alpha_1 \end{aligned} \tag{3.7}$$

e

$$\begin{aligned} d\Lambda L^j\alpha &= -j(k-n+j-1)L^{j-1}d\alpha \\ &= -j(k-n+j-1)(L^{j-1}\alpha_0 + L^j\alpha_1), \end{aligned} \tag{3.8}$$

dove per ricavare entrambe le relazioni ci siamo serviti dell'identità di commutazione, vista nella seconda parte del seminario, che dice che per una k-forma α vale $[L^j, \Lambda](\alpha) = j(k-n+j-1)L^{j-1}\alpha$.
In definitiva, poi, mettendo insieme la (3.7) e la (3.8), otteniamo

$$[\Lambda, d](L^j\alpha) = -jL^{j-1}\alpha_0 - (k-n+j-1)L^j\alpha_1 \tag{3.9}$$

Prima di calcolare l'altro membro della relazione cercata (sarebbe a dire $-(d^c)^*L^j\alpha$) , citiamo un'altra utile identità, su cui non ci soffermiamo, ma la cui dimostrazione dettagliata può essere vista sul libro di Huybrechts:

$$*L^j\alpha = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \frac{j!}{(n-k-j)!} L^{n-k-j}J(\alpha), \tag{3.10}$$

sempre con $\alpha \in \Omega^k(M)$.

Quindi, con i dovuti accorgimenti sull'azione della struttura quasi-complessa J ed applicando più volte la (3.10), otteniamo:

$$\begin{aligned} -(d^c)^*L^j\alpha &= *J^{-1}dJ * L^j\alpha \\ &= *J^{-1}dJ\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \frac{j!}{(n-k-j)!} L^{n-k-j}J(\alpha)\right) \\ &= (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}+p-q} \frac{j!}{(n-k-j)!} J^{-1} * L^{n-k-j}d\alpha \\ &= -jL^{j-1}\alpha_0 - (k-n+j-1)L^j\alpha_1 \end{aligned} \tag{3.11}$$

di cui osserviamo l'uguaglianza con il secondo membro della (3.9) e quindi la tesi.
La parte di *2.* riguardante l'operatore L si dimostra in maniera assolutamente analoga.

□

Concludiamo ora il seminario con un corollario del teorema di Kähler, riguardo i Laplaciani.

Corollario 3.2.2. *Per i tre Laplaciani valgono le seguenti identità:*

$$\Delta^{\partial} = \Delta^{\bar{\partial}} = \frac{1}{2}\Delta$$

ed inoltre Δ commuta con tutti gli operatori introdotti precedentemente.

Dimostrazione. La dimostrazione dell'identità si ottiene semplicemente applicando le definizioni degli operatori con i giusti accorgimenti nell'utilizzare le identità di Kähler:

$$\begin{aligned} \Delta^{\partial} &= \partial^*\partial + \partial\partial^* = i([\Lambda,\bar{\partial}]\partial + \partial[\Lambda,\bar{\partial}]) = i(\Lambda\bar{\partial}\partial - \bar{\partial}\Lambda\partial + \partial\Lambda\bar{\partial} - \partial\bar{\partial}\Lambda) \\ &= i(\Lambda\bar{\partial}\partial - i\bar{\partial}\bar{\partial}^* - \bar{\partial}\partial\Lambda - i\bar{\partial}^*\bar{\partial} + \Lambda\partial\bar{\partial} - \partial\bar{\partial}\Lambda) = \Delta^{\bar{\partial}}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

in cui in particolare ci siamo serviti delle identità di Kähler per sostituire $-\bar{\partial}\Lambda\partial$ e $-\partial\Lambda\bar{\partial}$, rispettivamente, con $\bar{\partial}[\Lambda,\partial] + \bar{\partial}\partial\Lambda$ e $[\partial,\Lambda]\bar{\partial} + \Lambda\partial\bar{\partial}$.

Abbiamo così dimostrato la prima parte dell'identità; per la seconda parte basta, a questo punto, notare che

$$\begin{aligned} \Delta &= (\partial + \bar{\partial})(\partial^* + \bar{\partial}^*) + (\partial^* + \partial^*)(\partial + \bar{\partial}) \\ &= \Delta^{\partial} + \Delta^{\bar{\partial}} + (\partial\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\partial) + \overline{(\partial\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\partial)}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

dove però si ha che gli ultimi due addendi sono uguali a 0, in quanto il punto *2.* del teorema implica che

$$\partial\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\partial = \partial[\Lambda,\partial] + [\Lambda,\partial]\partial = \partial\Lambda\partial - \partial\Lambda\partial = 0,$$

e dunque abbiamo dimostrato che $\Delta = \Delta^{\partial} + \Delta^{\bar{\partial}} = 2\Delta^{\partial} = 2\Delta^{\bar{\partial}}$.

Per quanto riguarda la commutazione del Laplaciano Δ con gli altri operatori, in questa sede svolgiamo esplicitamente, a titolo di esempio, i conti per far vedere che $[\Lambda,\Delta] = 0$:

$$\Lambda\Delta = \Lambda d\delta + \Lambda\delta d = d\Lambda\delta - (d^c)^*\delta + \delta\Lambda d = d\delta\Lambda + \delta d\Lambda - \delta(d^c)^* = \Delta\Lambda.$$

La verifica della commutazione del Laplaciano Δ con gli altri operatori è banale (ad esempio nel caso di $*, d, \delta$ e rispettive componenti), mentre negli altri casi, come l'operatore L di Lefschetz, i conti sono analoghi al caso visto.

□

Bibliografia

[1] Jean-Pierre Demailly. *Complex Analytic and Differential Geometry.* 2009.

[2] Phillip Griffiths, Joseph Harris. *Principles of Algebraic Geometry.* John Wiley & Sons, New York, 1978.

[3] Daniel Huybrechts. *Complex Geometry. An Introduction.* Springer, 2004.

[4] Andrei Moroianu. *Lectures on Kähler Geometry.* London Mathematical Society, Cambridge University Press, 2007.

[5] Claire Voisin. *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry I.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics 76, Cambridge University Press, 2002.