

Dipartimento di Matematica “Guido Castelnuovo”

Seminari di Geometria Superiore

COOMOLOGIA, CLASSI CARATTERISTICHE E FIBRATI
PRINCIPALI UNIVERSALI

Prof.
Paolo Piccinni

Daniele Dimonte
Emiliano Inguscio
Alessandro Maria Masullo
Stefania Mele

4 Giugno 2013

Indice

Indice	1
1 Coomologia e classi caratteristiche	2
1.1 $H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$	2
1.1.1 Preliminari	2
1.1.2 Omologia di $\mathbb{R}P^n$ a coefficienti in un anello \mathbb{A}	3
1.1.3 $\mathbb{A} = \mathbb{R}$	5
1.1.4 Coomologia di $\mathbb{R}P^n$ a coefficienti in \mathbb{Z}_2	6
1.1.5 Struttura algebrica di $H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$	7
1.2 Classi di Stiefel-Whitney	8
1.3 Classi di Chern	9
1.3.1 Alcune proprietà	10
2 Classi di Stiefel-Whitney e di Chern di $\mathbb{R}P^n$ e $\mathbb{C}P^n$	11
2.1 Primi risultati	11
2.2 Calcolo delle classi di Chern e di SW di $\tau_{\mathbb{C}P^n}$ e di $\tau_{\mathbb{R}P^n}$	13
2.3 Considerazione su $w(\mathbb{R}P^n)$	14
3 Esistenza e unicità delle classi di Stiefel-Whitney	18
3.1 Coomologia relativa	18
3.2 Quadrati di Steenrod	21
3.3 Isomorfismo di Thom e Teorema di esistenza	27
3.4 Teorema di unicità	33
4 Introduzione agli spazi classificanti per G-fibrati principali	34
4.1 Costruzione esplicita di mappe e spazi classificanti	37
4.2 Generalizzazione degli spazi classificanti	39
4.3 Equivalenza fra riduzione del gruppo strutturale e sollevamento della mappa classificante	40
4.4 Sollevamento delle mappe classificanti per il fibrato tangente	41
4.5 Ulteriori riduzioni	43
Bibliografia	45

Capitolo 1

Coomologia e classi caratteristiche

DANIELE DIMONTE

1.1 $H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$

1.1.1 Preliminari

Per approssciare la coomologia di $\mathbb{R}P^n$ dobbiamo innanzitutto descriverne la struttura di CW-complesso, e quindi dare una descrizione esplicita del suo scheletro. Cominciamo dalla definizione; $\mathbb{R}P^n$ è definito come

$$\mathbb{R}P^n := S^n / \sim$$

dove \sim è la classica relazione di equivalenza antipodale (cioè $x \sim y \Leftrightarrow x = \lambda y, \lambda = \pm 1$).

A questo punto per ogni elemento che abbia la prima coordinata non nulla possiamo scegliere un rappresentante con la stessa positiva, e così si avrà:

$$\mathbb{R}P^n = \{x \in S^n \text{ con } x_0 \geq 0\} / \sim \cong \overline{e^n} / \sim$$

dove a questo punto l'ultima relazione d'equivalenza è quella antipodale ma solo sul bordo di $\overline{e^n}$ che non è altro che S^{n-1} , dunque scriveremo

$$\mathbb{R}P^n \cong \overline{e^n} / \mathbb{R}P^{n-1}$$

La struttura di CW-complesso a questo punto sorge naturalmente; consideriamo infatti le $\pi_k : \partial e^k = S^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{k-1}$, si avrà che

$$\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}P^{n-1} \cup_{\pi_n} e^n = e^0 \cup_{\pi_1} e^1 \cup_{\pi_2} \dots \cup_{\pi_n} e^n$$

ricordando che $\mathbb{R}P^0$ è un punto.

1.1.2 Omologia di $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ a coefficienti in un anello \mathbb{A}

Cominciamo a studiare quello che è il complesso di catene di $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$. Definiamo

$$C_k(X) := \left\{ \sum_i a_i (e^k)_i, a_i \in \mathbb{A} \right\}$$

Dove le serie sono serie formali e le celle indicizzate sono le celle del CW-complesso di X . Nel nostro caso per ogni grado si ha

$$C_k = C_k(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) = \{ae^k, a \in \mathbb{A}\} \simeq \mathbb{A}$$

Con delle naturali mappe di bordo $\partial_k : C_k \rightarrow C_{k-1}$ date da $\partial_k := \pi_k \circ \partial$.

Studiamo dunque il complesso dato da

$$0 \xleftarrow{0} C_0 \xleftarrow{\partial_1} C_1 \xleftarrow{\partial_2} \dots \xleftarrow{\partial_{n-1}} C_{n-1} \xleftarrow{\partial_n} C_n \xleftarrow{0} 0$$

Per poter passare in omologia abbiamo bisogno di capire chi sono le mappe ∂_k al variare di k .

Cominciamo dunque da ∂_1 : questo va da C_1 in C_0 . In particolare per capire come funziona l'applicazione ci basterà vedere come si comporta la mappa di bordo su e^1 .

e^1 è un segmento, e chiaramente ∂ di un segmento è la differenza tra i suoi due punti estremali (per capire, $v_1 - v_2$). Ma a questo punto i punti estremali sono identificati da π nello stesso punto, e quindi $\partial_1(e^1) = \pi \circ \partial(e^0) = \pi(v_1 - v_2) = 0$ [Figura 1.1], dunque $\partial_1 = 0$.

Studiamo ora come funziona la mappa ∂_2 . Chiaramente il bordo di e^2 è una S^1 percorsa in un certo senso, perciò bisogna chiedersi che cosa significhi fare l'immagine di questo percorso attraverso π in e^1 . Ricordandoci però che sul bordo di e^2 (e dunque su S^1) si ha la relazione antipodale ci si rende subito conto che percorrere completamente la S^1 bordo di e^2 corrisponde a percorrere completamente la e^1 per due volte (basti pensare al fatto che un punto di S^1 e il suo opposto vengono proiettati nello stesso punto due volte)[Figura 1.2]. Quindi in pratica si ha che $\partial_2 e^2 = 2e^1$, e dunque la mappa di bordo agisce come la moltiplicazione per due (pensata da \mathbb{A} in \mathbb{A}).

Si vede che in pratica questa alternanza fra moltiplicazione per 0 e per 2 si mantiene in dimensioni superiori, in quanto sostanzialmente dipende dall'orientabilità di volta in volta di $\mathbb{R}\mathbb{P}^k$. Quello che otteniamo alla fine è il seguente complesso:

$$\begin{aligned} 0 \xleftarrow{0} C_0 \xleftarrow{0} C_1 \xleftarrow{2} \dots \xleftarrow{0} C_{n-1} \xleftarrow{2} C_n \xleftarrow{0} 0 & \text{ per } n \text{ pari} \\ 0 \xleftarrow{0} C_0 \xleftarrow{0} C_1 \xleftarrow{2} \dots \xleftarrow{2} C_{n-1} \xleftarrow{0} C_n \xleftarrow{0} 0 & \text{ per } n \text{ dispari} \end{aligned}$$

Abbiamo dunque gli strumenti per calcolare l'omologia di $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$, e lo faremo nei casi in cui l'anello di riferimento sia \mathbb{R} , \mathbb{Z} e \mathbb{Z}_2 .

Ricordiamo che si definisce il k -esimo gruppo di omologia come

$$H_k(X; \mathbb{A}) = \ker\{\partial : C_k(X) \rightarrow C_{k-1}\} / \text{im}\{\partial : C_{k+1} \rightarrow C_k\}$$

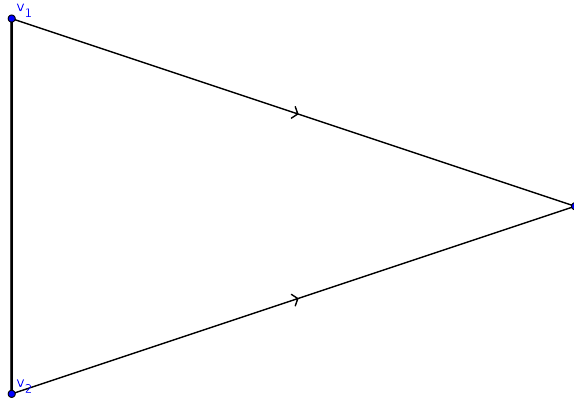


Figura 1.1: ∂_1 da e^1 in $\mathbb{R}P^0$

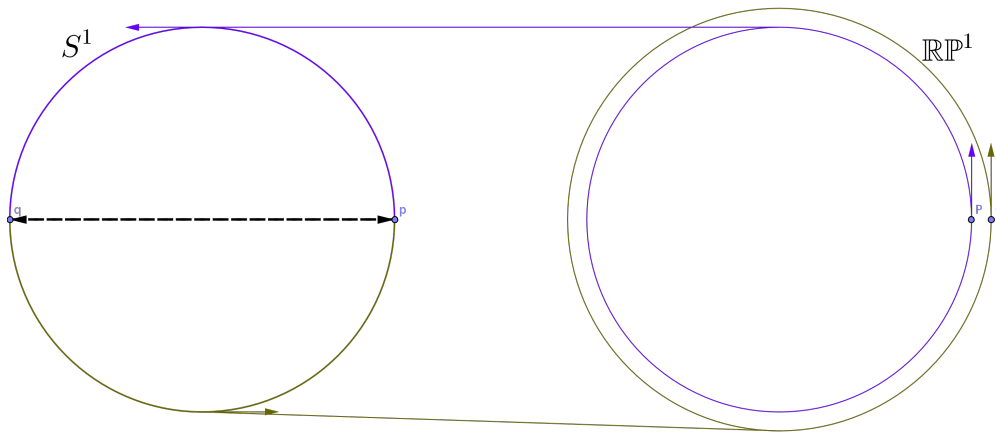


Figura 1.2: ∂_2 da e^2 in $\mathbb{R}P^1$

1.1.3 $\mathbb{A} = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 0 \xleftarrow{0} \mathbb{R} \xleftarrow{0} \mathbb{R} \xleftarrow{2} \mathbb{R} \xleftarrow{\dots} \xleftarrow{0} \mathbb{R} \xleftarrow{2} \mathbb{R} \xleftarrow{0} 0 & \text{ per } n \text{ pari} \\ 0 \xleftarrow{0} \mathbb{R} \xleftarrow{0} \mathbb{R} \xleftarrow{2} \mathbb{R} \xleftarrow{\dots} \xleftarrow{2} \mathbb{R} \xleftarrow{0} \mathbb{R} \xleftarrow{0} 0 & \text{ per } n \text{ dispari} \end{aligned}$$

Nel caso in cui il nostro anello sia \mathbb{R} si ha che il nucleo delle mappe pari (cioè quando la mappa si comporta come la moltiplicazione per 2) è 0 e l'immagine è tutto \mathbb{R} , mentre per le mappe dispari (cioè quando la mappa è la mappa nulla) si ha il viceversa, cioè il nucleo è tutto \mathbb{R} , mentre l'immagine è 0. Dunque si avrà

$$\begin{aligned} \mathbb{R}/0 = \mathbb{R} \quad \mathbb{R}/\mathbb{R} = 0 \quad 0/0 = 0 \quad \dots \quad \mathbb{R}/\mathbb{R} = 0 \quad 0/0 = 0 & \text{ per } n \text{ pari} \\ \mathbb{R}/0 = \mathbb{R} \quad \mathbb{R}/\mathbb{R} = 0 \quad 0/0 = 0 \quad \dots \quad 0/0 = 0 \quad \mathbb{R}/0 = \mathbb{R} & \text{ per } n \text{ dispari} \end{aligned}$$

dunque complessivamente si ha che:

$$H_k(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & k=0, k=n \text{ dispari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\mathbb{A} = \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} 0 \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \xleftarrow{\dots} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} 0 & \text{ per } n \text{ pari} \\ 0 \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \xleftarrow{\dots} \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} 0 & \text{ per } n \text{ dispari} \end{aligned}$$

Nel caso in cui il nostro anello sia \mathbb{Z} si ha che il nucleo delle mappe pari è 0 e l'immagine è $2\mathbb{Z}$, mentre per le mappe dispari si ha il viceversa, cioè il nucleo è tutto \mathbb{Z} , mentre l'immagine è 0. Dunque si avrà

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/0 = \mathbb{Z} \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2 \quad 0/0 = 0 \quad \dots \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2 \quad 0/0 = 0 & \text{ per } n \text{ pari} \\ \mathbb{Z}/0 = \mathbb{Z} \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2 \quad 0/0 = 0 \quad \dots \quad 0/0 = 0 \quad \mathbb{Z}/0 = \mathbb{Z} & \text{ per } n \text{ dispari} \end{aligned}$$

dunque complessivamente si ha che:

$$H_k(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k=0, k=n \text{ dispari} \\ \mathbb{Z}_2 & 0 < k < n, k \text{ dispari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\mathbb{A} = \mathbb{Z}_2$

$$\begin{aligned} 0 \xleftarrow{0} \mathbb{Z}_2 \xleftarrow{0} \mathbb{Z}_2 \xleftarrow{2} \mathbb{Z}_2 \xleftarrow{\dots} \xleftarrow{0} \mathbb{Z}_2 \xleftarrow{2} \mathbb{Z}_2 \xleftarrow{0} 0 & \text{ per } n \text{ pari} \\ 0 \xleftarrow{0} \mathbb{Z}_2 \xleftarrow{0} \mathbb{Z}_2 \xleftarrow{2} \mathbb{Z}_2 \xleftarrow{\dots} \xleftarrow{2} \mathbb{Z}_2 \xleftarrow{0} \mathbb{Z}_2 \xleftarrow{0} 0 & \text{ per } n \text{ dispari} \end{aligned}$$

Nel caso in cui il nostro anello sia \mathbb{Z}_2 entrambe le mappe diventano la mappa nulla il cui nucleo è sempre tutto lo spazio \mathbb{Z}_2 , mentre l'immagine è solo 0. Dunque in omologia

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_2/0 = \mathbb{Z}_2 \quad \mathbb{Z}_2/0 = \mathbb{Z}_2 \quad \dots \quad \mathbb{Z}_2/0 = \mathbb{Z}_2 \quad \mathbb{Z}_2/0 = \mathbb{Z}_2 & \text{ per } n \text{ pari} \\ \mathbb{Z}_2/0 = \mathbb{Z}_2 \quad \mathbb{Z}_2/0 = \mathbb{Z}_2 \quad \dots \quad \mathbb{Z}_2/0 = \mathbb{Z}_2 \quad \mathbb{Z}_2/0 = \mathbb{Z}_2 & \text{ per } n \text{ dispari} \end{aligned}$$

e quindi la struttura che otteniamo è evidentemente più semplice e si avrà:

$$H_k(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Commenti

Quello che si nota molto chiaramente è che un'azione apparentemente banale di cambio dell'anello su cui calcolare l'omologia ha provocato un cambio radicale degli insiemi che si sono prodotti.

Questo naturalmente è legato al fatto che il cambio di anello non è un cambio così influente come sembrava a prima vista, ed è legato soprattutto alle strutture chiaramente differenti di \mathbb{R} , \mathbb{Z} e di \mathbb{Z}_2 .

Un'altra cosa da notare è come nel caso di $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ l'omologia a coefficienti in A sia ancora più semplice. Infatti la struttura di CW-complesso di $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ è $\mathbb{C}\mathbb{P}^n = e^0 \cup_{\pi_1} e^1 \cup_{\pi_2} \dots \cup_{\pi_n} e^n$ e dunque i C_k di dimensione pari sono \mathbb{A} e i C_k di dimensione dispari sono 0. A questo punto c'è una sola mappa possibile a tutti i livelli (sempre nulla) e dunque si ha che $H_k(\mathbb{C}\mathbb{P}^n; A) = A$ per ogni $0 \leq k \leq n$.

1.1.4 Coomologia di $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ a coefficienti in \mathbb{Z}_2

Da adesso il caso in cui ci porremo sarà quello in cui l'anello di riferimento sia il campo \mathbb{Z}_2 .

Definiamo innanzitutto le cocatene; in generale si ha

$$C^k(X) := \text{Hom}(C_k(X), \mathbb{A})$$

e dunque nel nostro caso

$$C^k = \text{Hom}(C_k, \mathbb{Z}_2) = \text{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$$

Quindi assieme alle mappe di cobordo avremo il seguente complesso:

$$0 \xrightarrow{0} C^0 \xrightarrow{\delta_1} C^1 \xrightarrow{\delta_2} \dots \xrightarrow{\delta_{n-1}} C^{n-1} \xrightarrow{\delta_n} C^n \xrightarrow{0} 0$$

Si ha però che essendo le mappe di cobordo il pull-back delle mappe di bordo fra i complessi di catene (che ricordiamo erano tutte nulle) il complesso diventa di questa forma:

$$0 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0} \dots \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0} 0$$

A questo punto si definisce il k-esimo gruppo di coomologia di X come in omologia come

$$H^k(X; \mathbb{A}) = \ker\{\delta : C^k(X) \longrightarrow C^{k-1}\} / \text{im}\{\delta : C^{k+1} \longrightarrow C^k\}$$

E quindi passando in coomologia otteniamo come sopra che

$$H^k(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

1.1.5 Struttura algebrica di $H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$

Definiamo ora $H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) := \bigoplus_{k=0}^n H^k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$ l'anello di coomologia di $\mathbb{R}P^n$; il nome di anello è legato al fatto che grado per grado vi è una somma che rimane interna e che rende ogni grado un gruppo, e si definisce su questo anello un prodotto detto cup (\smile) che rende in output un oggetto il cui grado è la somma dei gradi degli oggetti che prende in input.

Quello che vogliamo capire è che tipo di struttura algebrica ci possa essere sottostante, in particolare cerchiamo un qualche tipo di isomorfismo fra $H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$ e un qualche spazio di polinomi a coefficienti in \mathbb{Z}_2 .

Definiamo quindi:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z}_2[a] &\longrightarrow H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \\ a &\longmapsto [\omega] \end{aligned}$$

Per capire chi è ω dobbiamo pensare a una sorta di dualità di Poincaré fra H^* e H_* e allora prenderemo $[\omega]$ la classe corrispondente alla classe di $[\mathbb{R}P^{n-1}]$; per comodità scriveremo dunque $[\omega] = [\mathbb{R}P^{n-1}]$.

Chiaramente $[\mathbb{R}P^{n-1}] \in H^1(\mathbb{R}P^1, \mathbb{Z}_2)$. Inoltre si ha che se prendiamo analogamente a $[\mathbb{R}P^{n-1}]$ anche $[\mathbb{R}P^1]$ e $[*]$ allora avremo

$$[\mathbb{R}P^{n-1}] \smile [\mathbb{R}P^{n-1}] = [\mathbb{R}P^{n-1} \cap \mathbb{R}P^{n-1}] = [*]$$

A questo punto sappiamo che il punto da solo non è bordo, dunque $[*]$ è non nullo in H_* e quindi la classe corrispondente è non nulla in H^* , quindi si ha che

$$[\mathbb{R}P^{n-1}] \smile [\mathbb{R}P^{n-1}] = [*] \neq 0 \Rightarrow [\mathbb{R}P^{n-1}] \neq 0$$

Quindi $[\mathbb{R}P^{n-1}]$ è il generatore di $H^1(\mathbb{R}P^1, \mathbb{Z}_2)$. Vediamo inoltre che se facciamo il prodotto cup più volte di questo elemento si ha che si sommano le codimensioni e dunque

$$[\mathbb{R}P^{n-1}]^k := [\mathbb{R}P^{n-1}]^{k-1} \smile = [\mathbb{R}P^{n-k}]$$

Inoltre, sfruttando una formula analoga a quella fatta sopra si ha che ciascuno di questi elementi è non nullo fintantoché k si mantiene minore di $n+1$.

Infine

$$[\mathbb{R}P^{n-1}]^{n+1} = 0$$

quindi si ha che $\ker \varphi = (a^{n+1})$.

Ricapitolando dunque φ è un omomorfismo, dato che grado per grado $\varphi(a^k)$ genera $H^k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$ è anche suriettivo e dunque si ha che

$$\mathbb{Z}_2[a]/(a^{n+1}) \simeq H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$$

1.2 Classi di Stiefel-Whitney

Le classi di Stiefel-Whitney e di Chern sono degli strumenti utilizzati in geometria per studiare dei fibrati vettoriali reali e complessi.

Data la complessità di un'approccio costruttivo, abbiamo deciso di definirle qui in maniera assiomatica, però è chiara la minore potenza evocativa di questo metodo.

Sia ξ un n -fibrato reale su una varietà M della forma

$$\xi : E(\xi) = E \xrightarrow{\pi} M(\xi) = M$$

Le **classi di Stiefel-Whitney** sono le classi $w_i \in H^i(M, \mathbb{Z}_2)$ tali che

Assioma 1

$$w_0 = 1 \in H^0(M, \mathbb{Z}_2), w_i = 0 \in H^i(M, \mathbb{Z}_2) \forall i > n$$

Assioma 2 [di Naturalità]

Supponiamo di avere due fibrati ξ e η e una $f : M(\xi) \rightarrow M(\eta)$ che si solleva a una mappa di fibrati. Allora

$$w_i(\xi) = f^*w_i(\eta)$$

Assioma 3 [prodotto di Whitney]

Supponiamo di avere due fibrati ξ e η sulla stessa base M . Allora si ha che

$$w_i(\xi \oplus \eta) = \sum_{k=0}^i w_k(\xi) \smile w_{i-k}(\eta)$$

Notazione

Per comodità si è soliti indicare con **la classe totale di Stiefel-Whitney** di un fibrato ξ con

$$w(\xi) = \sum_{i=0}^n w_i(\xi)$$

Inoltre sempre per comodità si ometterà l'operazione \smile in contesti in cui è ovvia, cosicché i precedenti due assiomi diventano

$$w(\xi) = f^*w(\eta)$$

e

$$w(\xi \oplus \eta) = w(\xi)w(\eta)$$

Assioma 4 [non degenerazione]

Sia γ_n^1 il fibrato tautologico su $\mathbb{R}P^n$. Allora si ha

$$w_1(\gamma_1^1) \neq 0$$

Il che vuol dire che, usando l'isomorfismo costruito precedentemente che $w(\gamma_1^1) = 1 + a$.

1.3 Classi di Chern

Sia ξ un n -fibrato complesso su una varietà M della forma

$$\xi : E(\xi) = E \xrightarrow{\pi} M(\xi) = M$$

Le **classi di Chern** sono le classi $c_i \in H^{2i}(M, \mathbb{Z})$ tali che

Assioma 1

$$c_0 = 1 \in H^0(M, \mathbb{Z}), \quad c_i = 0 \in H^i(M, \mathbb{Z}) \forall i > n$$

Assioma 2 [di Naturalità]

Supponiamo di avere due fibrati ξ e η e una $f : M(\xi) \rightarrow M(\eta)$ che si solleva a una mappa di fibrati. Allora

$$c_i(\xi) = f^*c_i(\eta)$$

Assioma 3 [prodotto di Whitney]

Supponiamo di avere due fibrati ξ e η sulla stessa base M . Allora si ha che

$$c_i(\xi \oplus \eta) = \sum_{k=0}^i c_k(\xi) \smile c_{i-k}(\eta)$$

Notazione

Useremo per le classi di Chern una notazione analoga a quella usata per le classi di Stiefel-Whitney, e quindi come sopra se ξ è un fibrato complesso avremo

$$c(\xi) = f^*c(\eta)$$

e

$$c(\xi \oplus \eta) = c(\xi)c(\eta)$$

Assioma 4 [non degenerazione]

Sia $\gamma_n^1(\mathbb{C})$ il fibrato tautologico su $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Allora si ha

$$w_1(\gamma_1^1(\mathbb{C})) \neq 0$$

Il che vuol dire che indicando con a la classe $-\omega_{FS}$ della forma di Fubini-Study si ha che $c(\gamma_1^1(\mathbb{C})) = 1 + a$.

1.3.1 Alcune proprietà

Verifichiamo adesso alcune proprietà di entrambe le classi che ci saranno utili in seguito.

La prima è che dati due fibrati isomorfi allora le classi di Stiefel-Whitney (leggi di Chern nel caso di fibrati complessi) sono uguali; questo si deduce facilmente dal secondo assioma.

Infatti un isomorfismo è una mappa fra fibrati che induce sulle basi (coincidenti in questo caso) la funzione identità, quindi si ha che

$$w(\xi) = id^*w(\eta) = id(w(\eta)) = w(\eta)$$

e analogamente

$$c(\xi) = id^*c(\eta) = id(c(\eta)) = c(\eta)$$

Un'altra proprietà è che $w_i(\varepsilon_M^n)$ (con ε_M^n n-fibrato reale o complesso su M) è zero per ogni $i > 0$, cioè che $w(\varepsilon_M^n) = 1$.

Lo stesso vale per le classi di Chern e si ha che $c(\varepsilon_M^n) = 1$.

Infine una proprietà che deriva dal terzo assioma è che dato un qualsiasi fibrato reale (complesso) si ha che $w(\varepsilon_M^n \oplus \xi) = w(\xi)$ ($c(\varepsilon_M^n \oplus \xi) = c(\xi)$).

Capitolo 2

Classi di Stiefel-Whitney e di Chern di $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ e $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$

STEFANIA MELE

2.1 Primi risultati

Il primo obiettivo di questo seminario è quello di calcolare le classi di Stiefel-Whitney e di Chern del fibrato tangente rispettivamente a $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ e $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ sfruttando la definizione assiomatica e le prime proprietà di tali classi riportate nel seminario precedente. Il procedimento di calcolo delle due distinte classi è molto simile, motivo per cui saranno riportati parallelamente risultati relativi al caso reale e complesso. Per prima cosa, è necessario calcolare le classi di Chern e di Stiefel-Whitney rispettivamente del fibrato tautologico su $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ ($\gamma_{\mathbb{C}}^1$) e del fibrato tautologico su $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ (γ_n^1). Vale il seguente risultato

Proposizione 2.1.1.

$$w(\gamma_n^1) = 1 + a, \text{ dove } a \text{ indica il generatore di } H^1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2)$$

$$c(\gamma_{\mathbb{C}}^1) = 1 + a, \text{ dove } a \text{ indica il generatore di } H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}), a = -[\omega_{FS}].$$

Dimostrazione. Ricordiamo che γ_n^1 è un fibrato vettoriale reale di rango uno, dal momento che la fibra in ogni punto coincide con la retta su quel punto. Pertanto, $w_i(\gamma_n^1) = 0$ per ogni $i > 1$, da cui $w(\gamma_n^1) = 1 + w_1(\gamma_n^1)$. Dunque, basta dimostrare che $w_1(\gamma_n^1) \neq 0$ per ottenere la tesi.

Per fare ciò è sufficiente considerare l'immersione $i : \mathbb{R}\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ e osservare che per il secondo assioma vale

$$0 \neq w_1(\gamma_1^1) = i^*(w_1(\gamma_n^1))$$

dal momento che i si solleva ad una mappa tra fibrati, da cui la tesi.

La dimostrazione della seconda affermazione è del tutto analoga. □

Prima di dimostrare il successivo teorema osserviamo che γ_n^1 , per come è definito, è un sottofibrato del fibrato banale di rango $n+1$ su $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ ($\varepsilon_{\mathbb{R}\mathbb{P}^n}^{n+1}$) che è dotato della metrica euclidea standard. Quindi esiste un fibrato che denoteremo con γ^\perp tale che

$$\varepsilon_{\mathbb{R}\mathbb{P}^n}^{n+1} = \gamma_n^1 \oplus \gamma^\perp.$$

γ^\perp è il complemento ortogonale di γ_n^1 in $\varepsilon_{\mathbb{R}\mathbb{P}^n}^{n+1}$ e la fibra di tale fibrato in x consiste di tutti i vettori v tali che $\langle v, w \rangle = 0$ per ogni w nella fibra in x di γ_n^1 . Per lo stesso motivo esiste un fibrato che denoteremo con ω^\perp tale che

$$\varepsilon_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}^{n+1} = \gamma_{\mathbb{C}}^1 \oplus \omega^\perp.$$

Prima di enunciare il successivo teorema è necessario introdurre un nuovo fibrato $Hom(\xi, \eta)$, ottenuto a partire da due altri fibrati ξ e η sullo stesso spazio base B e di rango rispettivamente k e l . Vediamo come sono fatte le sue funzioni di transizione.

Sia U_α una banalizzazione locale per entrambi i fibrati ξ e η e siano $\lambda_\xi, \lambda_\eta$ le corrispondenti famiglie formate dalle rispettive funzioni di transizione. Allora le funzioni di transizione del fibrato $Hom(\xi, \eta)$ sono date da

$$Hom(\lambda_\xi, \lambda_\eta) : U_i \cap U_j \times End(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l) \longrightarrow U_i \cap U_j \times End(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l),$$

definite da

$$(b, \alpha) \longrightarrow (b, (\lambda_\eta)_{ij}^{-1} \circ \alpha \circ (\lambda_\xi)_{ij}).$$

Teorema 2.1.2. *Il fibrato tangente a $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ ($\tau_{\mathbb{R}\mathbb{P}^n}$) è isomorfo al fibrato $Hom(\gamma_n^1, \gamma^\perp)$. Similmente $\tau_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n} \simeq Hom(\gamma_{\mathbb{C}}^1, \omega^\perp)$*

Dimostrazione. Pensando $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ come \mathbb{S}^n / \sim si verifica che $T\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ può essere visto come segue

$$T\mathbb{R}\mathbb{P}^n = \{(x, v) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \text{ tali che } (x, v) \sim (-x, -v), x \cdot x = 1 \text{ e } x \cdot v = 0\}.$$

Infatti sia L una retta in \mathbb{R}^{n+1} passante per l'origine che interseca \mathbb{S}^n nei punti $\pm x$, L^\perp il suo n -sottospazio complementare e $\pi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ l'applicazione antipodale. Allora si osserva che i vettori (x, v) e $(-x, -v)$ in $T\mathbb{S}^n$ hanno la stessa immagine rispetto all'applicazione suriettiva $D\pi : T\mathbb{S}^n \rightarrow T\mathbb{R}\mathbb{P}^n$, da cui segue la definizione data sopra di $T\mathbb{R}\mathbb{P}^n$.

Si ha, quindi, che ogni elemento in $T\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ è in biezione con un'applicazione lineare $l_x : L \rightarrow L^\perp$ tale che $l_x(x) = v$.

La coppia $(-x, -v)$ determina la stessa applicazione lineare poiché $l_{-x}(-x) = -v$, quindi è ben definito il seguente isomorfismo

$$T_{\{\pm x\}}\mathbb{R}\mathbb{P}^n \simeq Hom(L, L^\perp)$$

da cui segue la tesi, in quanto tale isomorfismo è un isomorfismo tra la fibra in x del fibrato $\tau_{\mathbb{R}\mathbb{P}^n}$ e la fibra in x del fibrato $Hom(\gamma_n^1, \gamma^\perp)$.

Ovviamente la stessa dimostrazione funziona anche nel caso complesso, da cui la seconda affermazione del teorema. \square

Prima di procedere al calcolo delle classi di SW e di Chern del fibrato tautologico, sono utili altre due osservazioni.

Osservazione 1. Il fibrato $Hom(\gamma_n^1, \gamma_n^1)$ è un fibrato vettoriale reale di rango uno dal momento che la fibra in $x \in \mathbb{R}P^n$ di tale fibrato coincide con $Hom((E(\gamma_n^1))_x, (E(\gamma_n^1))_x) \simeq Hom(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$. Esso inoltre ammette una sezione ovunque mai nulla: l'applicazione che associa ad ogni elemento di $\mathbb{R}P^n$ l'omomorfismo identità. Si conclude, dunque, che $Hom(\gamma_n^1, \gamma_n^1)$ è isomorfo al fibrato $\varepsilon_{\mathbb{R}P^n}^1$ dal momento che, in generale vale che un fibrato vettoriale di rango k è isomorfo al fibrato banale di rango k se e solo se esso ha k sezioni ovunque mai nulle.

La stessa conclusione vale per il fibrato $Hom(\gamma_{\mathbb{C}}^1, \gamma_{\mathbb{C}}^1)$.

Osservazione 2. Un isomorfismo tra un fibrato vettoriale e il suo duale, fibra per fibra, è un isomorfismo tra la fibra e il suo duale che è dato, in quanto isomorfismo tra uno spazio vettoriale e il suo duale, da una funzione bilineare non degenera. Sia ora $\xi = (E, p, X)$ un fibrato vettoriale reale dotato di metrica; allora vale che

$$\xi \simeq \xi^* = Hom(\xi, \varepsilon_X^1),$$

dove l'isomorfismo è dato dall'applicazione $v \rightarrow \langle v, \cdot \rangle$.

La stessa applicazione, nel caso in cui ξ sia un fibrato vettoriale complesso dotato di metrica, fornisce il seguente isomorfismo

$$\bar{\xi} \simeq Hom(\xi, \varepsilon_X^1),$$

dove $\bar{\xi}$ è il fibrato coniugato a ξ , ossia, tale che l'applicazione identica

$$f : E(\xi) \rightarrow E(\bar{\xi})$$

soddisfa $f(\lambda e) = \bar{\lambda} f(e)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ e $e \in E(\xi)$, dove con $E(\xi)$ indichiamo lo spazio totale del fibrato ξ .

2.2 Calcolo delle classi di Chern e di SW di $\tau_{\mathbb{C}P^n}$ e di $\tau_{\mathbb{R}P^n}$

Da quanto detto finora seguono immediatamente i seguenti isomorfismi

$$\begin{aligned} \tau_{\mathbb{R}P^n} \oplus \varepsilon_{\mathbb{R}P^n}^1 &\simeq Hom(\gamma_n^1, \gamma_n^1) \oplus Hom(\gamma_n^1, \gamma_n^1) \simeq \\ &\simeq Hom(\gamma_n^1, \gamma_n^1 \oplus \gamma_n^1) \simeq Hom(\gamma_n^1, \varepsilon_{\mathbb{R}P^n}^{n+1}) \simeq \\ &\simeq \bigoplus_{n+1} Hom(\gamma_n^1, \varepsilon_{\mathbb{R}P^n}^1) \simeq \bigoplus_{n+1} \gamma_n^1, \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dall'osservazione 2) e dal fatto che, essendo $\mathbb{R}P^n$ compatto, allora ogni fibrato su $\mathbb{R}P^n$ è dotato di una metrica.

Da questi isomorfismi segue immediatamente che

$$w(\mathbb{R}P^n) := w(\tau_{\mathbb{R}P^n}) = w(\tau_{\mathbb{R}P^n} \oplus \varepsilon_{\mathbb{R}P^n}^1) = w\left(\bigoplus_{n+1} \gamma_n^1\right) =$$

$$= (w(\gamma_n^1))^{n+1} = (1+a)^{n+1}.$$

Con considerazioni analoghe alle precedenti e sfruttando il fatto che $c_1(\xi) = -c_1(\bar{\xi})$ si ottiene che

$$\tau_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n} \oplus \varepsilon_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}^1 \simeq \text{Hom}(\gamma_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}^1, \varepsilon_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}^{n+1}) \simeq \bigoplus_{n+1} \text{Hom}(\gamma_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}^1, \varepsilon_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}^1) \simeq \bigoplus_{n+1} \overline{\gamma_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}^1},$$

da cui

$$\begin{aligned} c(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) &:= c(\tau_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}) = c(\tau_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n} \oplus \varepsilon_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}^1) = c\left(\bigoplus_{n+1} \overline{\gamma_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}^1}\right) = \\ &= \left(c\left(\overline{\gamma_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n}^1}\right)\right)^{n+1} = (1-a)^{n+1} = (1 + [\omega_{FS}])^{n+1}. \end{aligned}$$

2.3 Considerazione su $w(\mathbb{R}\mathbb{P}^n)$

Dal calcolo precedente è emerso che $w(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) = (1+a)^{n+1} \pmod{2}$. Vediamo cosa succede effettivamente per alcuni valori di n .

$$w(\mathbb{R}\mathbb{P}^1) = 1 + a^2, \text{ dove } a \in H^2(\mathbb{R}\mathbb{P}^1, \mathbb{Z}_2) = 0, \text{ da cui } w(\mathbb{R}\mathbb{P}^1) = 1$$

$$w(\mathbb{R}\mathbb{P}^2) = 1 + a + a^2; \quad w(\mathbb{R}\mathbb{P}^4) = 1 + a + a^4$$

$$w(\mathbb{R}\mathbb{P}^3) = w(\mathbb{R}\mathbb{P}^7) = w(\mathbb{R}\mathbb{P}^{15}) = \dots = 1$$

L'ultima serie di uguaglianze è motivata dalla seguente proposizione

Proposizione 2.3.1. $w(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) = 1$ se e solo se $n+1 = 2^k$ per un certo $k \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Dal momento che $(1+a)^2 = 1+a^2 \pmod{2}$, si ha che se $n+1 = 2^k$ allora $(1+a)^{n+1} = (1+a)^{2^k} = 1+a^{2^k} = 1$, essendo $2^k > n$.

Dimostriamo l'altra implicazione: supponiamo $n+1 = 2^k m$, con $m > 1$ dispari. Allora

$$w(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) = (1+a)^{2^k m} = (1+a^{2^k})^m = 1 + ma^{2^k} + \frac{m(m-1)}{2} a^2 a^{2^k} + \dots \neq 1$$

essendo $2^k < n+1$. □

Corollario 2.3.2. *Dalla proposizione precedente segue immediatamente che gli unici proiettivi reali che potrebbero essere parallelizzabili sono quelli della forma $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ con $n+1 = 2^k$. Si tratta, infatti, dell'unico caso in cui la classe di Stiefel Whitney di $\tau_{\mathbb{R}\mathbb{P}^n}$ coincide con quella del fibrato banale $\varepsilon_{\mathbb{R}\mathbb{P}^n}^n$.*

A tale riguardo, ricordiamo che si può dimostrare che $\mathbb{R}\mathbb{P}^1, \mathbb{R}\mathbb{P}^3, \mathbb{R}\mathbb{P}^7$ sono gli unici proiettivi reali parallelizzabili.

Tornando al calcolo esplicito di $w(\mathbb{R}\mathbb{P}^n)$ per alcuni valori di n si verifica che

$$w_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^{2n+1}) = 0 \text{ e } w_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^{2n}) \neq 0 \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

In realtà non è un caso che si verifichino queste due situazioni opposte a seconda che $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ sia o meno orientabile. Vale, infatti, in generale il seguente teorema.

Teorema 2.3.3. *Data M una varietà differenziabile reale di dimensione n si ha che*

$$M \text{ è orientabile} \iff w_1(\tau_M) = 0$$

Per la dimostrazione di tale teorema sarà utile il seguente lemma.

Lemma 2.3.4. *Sia $\xi = (E, p, X)$ un fibrato vettoriale reale di rango n dotato di una metrica. Allora il suo gruppo di struttura può essere ridotto a $O(n)$. Equivalentemente, si possono costruire funzione di transizione di tale fibrato tutte a valori in $O(n)$ piuttosto che in $GL(n)$.*

Dimostrazione. Sia $\{U_\gamma\}$ un ricoprimento aperto di X banalizzante per il fibrato ξ . Allora, su U_α ci sono n sezioni s_1, \dots, s_n tali che $\{s_i(x), i = 1, \dots, n\}$ è una base di $(E(\xi))_x$ (la fibra di ξ in x) per ogni $x \in U_\alpha$.

Sia ora $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ e siano $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ le corrispondenti sezioni del fibrato definite su U_β ; in particolare $\{\sigma_i(x), i = 1, \dots, n\}$ è anche essa una base per $(E(\xi))_x$. Quindi, esiste una matrice del cambio di base $g_{\alpha\beta}(x)$ che trasforma $\{\sigma_i(x)\}_{i=1}^n$ in $\{s_i(x)\}_{i=1}^n$ tale che

$$s_i(x) = g_{\alpha\beta}(x)\sigma_i(x) \text{ per ogni } i = 1, \dots, n.$$

Il fatto che il fibrato ξ possieda una metrica ha come conseguenza il fatto che vi sia un prodotto scalare definito tra gli elementi dello spazio vettoriale della fibra in x del fibrato. In particolare, si può applicare il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt per ottenere una base ortonormale di $(E(\xi))_x$.

Denotiamo quindi con $\{\bar{s}_i(x)\}_{i=1}^n$ e $\{\bar{\sigma}_i(x)\}_{i=1}^n$ basi ortonormali di $(E(\xi))_x$ ottenute ortonormalizzando le due basi precedenti; allora

$$\langle \bar{\sigma}_i(x), \bar{\sigma}_j(x) \rangle = \delta_{i,j} = \langle \bar{s}_i(x), \bar{s}_j(x) \rangle = \langle g_{\alpha\beta}\bar{\sigma}_i(x), g_{\alpha\beta}\bar{\sigma}_j(x) \rangle$$

da cui segue immediatamente che $g_{\alpha\beta}(x)$ è un elemento di $O(n)$ in quanto preserva il prodotto scalare.

In questo modo abbiamo costruito le funzioni di transizione del fibrato ξ a valori in $O(n)$

$$g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow O(n).$$

□

Osservazione 3. Nel teorema che a breve dimostreremo tale lemma è cruciale perché noi vogliamo poter vedere τ_M come un fibrato avente gruppo di struttura $O(n)$. Questo è possibile perché siamo nelle ipotesi del lemma poiché se M è una varietà differenziabile

reale di dimensione n allora τ_M è dotato di una metrica euclidea. Quest'ultima affermazione è vera dal momento che $\tau_{\mathbb{R}^n}$, in quanto isomorfo al fibrato banale, è dotato di una metrica euclidea standard che denotiamo con μ e $TM \subseteq T\mathbb{R}^n$; dunque la metrica su τ_M scaturisce dalla seguente composizione

$$TM \subseteq T\mathbb{R}^n \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}.$$

Ora possiamo finalmente cominciare con la dimostrazione del teorema che ci fornisce una prima interpretazione geometrica delle classi di Stiefel-Whitney.

Dimostrazione. Consideriamo la seguente successione esatta

$$1 \rightarrow SO(n) \xrightarrow{i} O(n) \xrightarrow{det} \mathbb{Z}_2 \rightarrow 1.$$

Essa induce una successione esatta in coomologia:

$$\dots \rightarrow \check{H}^1(M, SO(n)) \xrightarrow{i^*} \check{H}^1(M, O(n)) \xrightarrow{det^*} \check{H}^1(M, \mathbb{Z}_2) \rightarrow \dots$$

Abbiamo già dimostrato nei seminari precedenti che un fibrato vettoriale su M con gruppo di struttura $O(n)$ può essere visto come un elemento in $\check{H}^1(M, O(n))$, dal momento che tale fibrato è univocamente determinato dalle sue funzioni di transizione che possono essere identificate con gli 1-cocicli della coomologia di Čech a coefficienti in $O(n)$. Quindi, il fibrato τ_M può essere identificato con un elemento di $\check{H}^1(M, O(n))$, dal momento che il suo gruppo di struttura può essere ridotto a $O(n)$; quindi ha senso calcolare $det^*(\tau_M)$ che appartiene a $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$, come la prima classe di Stiefel-Whitney di τ_M .¹ Inoltre si dimostra che $det^*(\tau_M)$ coincide proprio con $w_1(\tau_M)$. Diamo un attimo per buona quest'ultima affermazione e vediamo come da questa scaturisca immediatamente la dimostrazione delle due implicazioni.

(\Leftarrow) $w_1(\tau_M) = 0$ vuol dire che $\tau_M \in Ker(det^*)$; ma per l'esattezza della successione in coomologia si ha che $Ker(det^*) = Im(i^*)$, da cui

$$\tau_M = i^*(\xi')$$

con ξ' un fibrato su M con gruppo di struttura $SO(n)$.

Quindi, effettivamente, il gruppo di struttura di τ_M può essere ridotto ulteriormente da $O(n)$ a $SO(n)$.

Da ciò segue l'orientabilità di M dal momento che le funzioni di transizione del fibrato tangente su M coincidono con lo Jacobiano del cambio di coordinate. Ma abbiamo detto che tali funzioni di transizione in questo caso hanno valore in $SO(n)$ e quindi le matrici del cambio di base di M hanno tutte determinante positivo da cui l'orientabilità di M .

(\Rightarrow) La dimostrazione di tale implicazione segue immediatamente dall'esattezza della successione poiché se M è orientabile allora, per la stessa motivazione precedente, il

¹Qui stiamo usando un abuso di notazione sfruttando l'isomorfismo tra la coomologia di Čech e quella singolare. Quindi in realtà quando scriviamo $det^*(\tau_M) \in H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ intendiamo che $det^*(\tau_M)$ appartiene all'immagine di $\check{H}^1(M, \mathbb{Z}_2)$ tramite tale isomorfismo.

gruppo di struttura di τ_M è $SO(n)$ da cui $\tau_M \in Im(i^*) = Ker(det^*)$ e quindi $w_1(\tau_M) = det^*(\tau_M) = 0$.

Dimostriamo ora che effettivamente det^* soddisfa l'assioma di naturalità e la formula del prodotto di Whitney come la prima classe di Stiefel-Whitney.

1) Assioma di naturalità

Bisogna dimostrare che dati ξ_1 e ξ_2 due fibrati vettoriali reali rispettivamente su B_1 e B_2 $f : B_1 \rightarrow B_2$ un'applicazione che si solleva a una mappa tra fibrati allora $det^*(\xi_1) = f^*(det^*(\xi_2))$, che è equivalente a dimostrare che

$$det^*(f^*(\xi_2)) = f^*(det^*(\xi_2))$$

dal momento che se f è un'applicazione come sopra allora $\xi_1 \simeq f^*(\xi_2)$.

Quindi ciò che vogliamo dimostrare è che det^* commuta con f^* .

Sappiamo che i cocicli del fibrato pull-back altro non sono che i pull-back dei cocicli del fibrato di partenza; a questo punto, attraverso l'identificazione di ξ_2 con le sue funzioni transizione $\{g_{ij}\}$, si ha che

$$det^*(\xi_2) = \{det(g_{ij})\}$$

con $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow O(n)$ e $\{U_j\}$ ricoprimento aperto di B_2 che banalizza il fibrato ξ_2 . Quindi si ha che

$$\begin{aligned} f^*(det^*(\xi_2)) &= \{(det(g_{ij}))|_{f(\cdot)}\} = \\ &= \{det(g_{i,j}|_{f(\cdot)})\} = det^*(f^*(\xi_2)). \end{aligned}$$

2) Prodotto di Whitney

Si vuole dimostrare che dati due fibrati ξ e η sullo stesso spazio base B e rango rispettivamente k e l , allora vale che

$$det^*(\xi_1 \oplus \xi_2) = det^*\xi + det^*\eta.$$

Questo segue direttamente dalla definizione di somma diretta di due fibrati e dalla solita identificazione tra fibrati e funzioni di transizione.

Sia U_α sia una banalizzazione locale per entrambi i fibrati ξ e η e siano $\lambda_\xi, \lambda_\eta$ le corrispondenti famiglie formate dalle rispettive funzioni di transizione. Allora il fibrato $\xi \oplus \eta$ è caratterizzato dalle seguenti funzioni di transizione

$$\lambda_\xi \oplus \lambda_\eta : U_i \cap U_j \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \longrightarrow U_i \cap U_j \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$$

definite da

$$(b, v, u) \longrightarrow (b, (\lambda_\xi)_{ij}(b)(v), (\lambda_\eta)_{ij}(b)(v)),$$

da cui segue la tesi. □

Osservazione 4. Concludiamo dicendo che anche la seconda classe di Stiefel Whitney del fibrato tangente a una varietà differenziabile M di dimensione n ci fornisce altre informazioni sul fibrato. In particolare, l'annullarsi di questa seconda classe si traduce nella possibilità di ridurre il gruppo di struttura del fibrato τ_M da $SO(n)$ a $Spin(n)$, il rivestimento universale a due fogli di $SO(n)$.

Capitolo 3

Esistenza e unicità delle classi di Stiefel-Whitney

ALESSANDRO MARIA MASULLO

3.1 Coomologia relativa

Sia $(\underline{\text{Top}}_2)$ la categoria delle coppie di spazi topologici, con morfismi prodotto, e $(\underline{\text{Ab}})$ la categoria dei gruppi abeliani.

Definizione 3.1.1. (ASSIOMI DI COOMOLOGIA DI EILENBERG-STEENROD) Una *teoria di coomologia relativa* è il dato di

1. per ogni oggetto $(X, A) \in (\underline{\text{Top}}_2)$ (ie. coppia di spazi topologici), una successione $H^n(X, A; G)$ di gruppi abeliani, per G oggetto in $(\underline{\text{Ab}})$
2. per ogni mappa $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, una successione di omomorfismi

$$f_*^{(n)} : H^n(X, A) \rightarrow H^n(Y, B)$$

3. per ogni coppia (X, A) , una successione

$$\delta_n : H^n(X, A) \rightarrow H^{n+1}(A, \emptyset) =: H^n(A)$$

di omomorfismi tali che valgano le seguenti proprietà

- (a) FUNTORIALITÀ. È indotta una successione di funtori $H^n : (\underline{\text{Top}}_2) \rightarrow (\underline{\text{Ab}})$ ¹

¹ovvero

- $(\text{id}_{(X,A)})_*^{(n)} = \text{id}_{H^n(X,A)}$
- $(gf)_*^{(n)} = g_*^{(n)} \cdot f_*^{(n)}$ per f, g componibili.

- (b) NATURALITÀ. Per $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$, il seguente è un diagramma commutativo per ogni n :

$$\begin{array}{ccc} H^n(X, A) & \xrightarrow{f_*^{(n)}} & H^n(Y, B) \\ \delta^n \downarrow & & \downarrow \delta^n \\ H^{n+1}(A) & \xrightarrow{(f|_A)_*^{(n)}} & H^{n+1}(B) \end{array}$$

4. ESATTEZZA. Per ogni coppia (X, A) , si ha una successione esatta lunga in coomologia

$$\dots \longrightarrow H^n(A) \longrightarrow H^n(X) \longrightarrow H^n(X, A) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(A) \longrightarrow \dots$$

5. ESCISSIONE. Se $U \subset A \subset X$ e $\bar{U} \subset \text{Int}(A)$, allora la mappa inclusione

$$(X - U, A - U) \longrightarrow (X, A)$$

induce un isomorfismo in coomologia in ogni grado².

6. DIMENSIONE. $H^n(\text{pt}) = 0$ per ogni $n \neq 0$.

Enunciamo il seguente

Teorema 3.1.1. *Siano $\{(H^\bullet, \delta^\bullet)\}$ e $\{({}'H^\bullet, {}'\delta^\bullet)\}$ due teorie di coomologia, e siano G e G' i rispettivi gruppi dei coefficienti. Se*

$$\varphi : G \longrightarrow G'$$

è un omomorfismo di gruppi, esiste una unica trasformazione naturale Φ tra i funtori H^\bullet e $'H^\bullet$, compatibile con δ , ristretti alla categoria dei CW-complessi che estenda φ .

Come conseguenza, se φ è un isomorfismo, lo è anche Φ , da cui segue che la teoria di coomologia è univocamente individuata dal suo gruppo dei coefficienti.

Abbiamo introdotto gli assiomi di coomologia di Eilenberg-Steenrod al solo scopo di dare un senso alla scrittura $H^\bullet(X, A; G)$. Per noi si tratterà di coomologia singolare, che è un primo esempio di coomologia relativa. Altri esempi sono la coomologia coerente (cfr. nota a piè di pagina del successivo esempio), le coomologie di Galois, étale, ℓ -adica, simpliciale, cellulare, etc. Una teoria di coomologia è generalmente una teoria di coomologia relativa, al punto che nella Definizione sopra spesso si omette “relativa”. Discutiamo il motivo per cui la coomologia singolare è una teoria di coomologia relativa nel seguente

²Useremo il principio di escissione per dimostrare la proprietà di normalizzazione per le classi di Stiefel-Whitney.

Esempio 3.1.1. Indichiamo con $C_q(X; G)$ il gruppo delle q -catene singolari su uno spazio topologico X a valori nel gruppo abeliano G . Si definisce

$$C^q(X; G) := \text{Hom}_G(C_q(X; G), G)$$

il gruppo delle q -cocatene singolari, e la mappa di cobordo è data, per ogni $\varphi \in C_q(X; G)$, dalla composizione

$$\begin{array}{ccc} C_{q+1}(X; G) & \xrightarrow{\partial} & C_q(X; G) \xrightarrow{\varphi} G \\ & \searrow \delta\varphi & \nearrow \end{array}$$

e si verifica facilmente che $\delta^2 = 0$. $(C^\bullet(X; G), \delta^\bullet)$ è il complesso delle cocatene singolari. È utile citare il

Teorema 3.1.2. (DEI COEFFICIENTI UNIVERSALI) *Se un complesso di catene C_\bullet di gruppi abeliani liberi ha gruppi di omologia $H_n(C_\bullet)$, i gruppi di coomologia $H^n(C_\bullet; G)$ del complesso di cocatene*

$$\text{Hom}(C_\bullet, G)$$

sono determinati dalle successioni esatte

$$0 \longrightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(C_\bullet), G) \longrightarrow H^n(C_\bullet; G) \longrightarrow \text{Hom}(H_n(C_\bullet), G) \longrightarrow 0$$

dove se esiste una sezione $G \rightarrow H_{n-1}(C_\bullet)$, allora la successione spacca.

Nel caso in cui G sia un campo (in realtà un dominio a ideali principali) il gruppo $\text{Ext}(H_{n-1}(C_\bullet), G) = 0$ in ogni grado (per dettagli sul Teorema dei Coefficienti Universali rimandiamo a [2]). Nel nostro caso $G = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} = \mathbf{F}_2$, da cui

$$H^n(X; \mathbf{F}_2) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{F}_2}(H_n(X; \mathbf{F}_2), \mathbf{F}_2).$$

Per definire i gruppi relativi $H^n(X, A; G)$ rispetto a una coppia (X, A) tale che esista un morfismo $g : A \rightarrow X$, consideriamo i gruppi

$$C_q(X, A; G)$$

dati come gruppi delle q -catene singolari su X che svaniscono su A (tramite g). È utile assumere che g sia una immersione (aperta o chiusa) $A \subset X$ di spazi topologici, che è anche il caso di nostro interesse. Allora $C_q(X, A; G)$ è il gruppo delle q -catene singolari su X che svaniscono su A . Queste sono anche q -catene singolari su X , ovvero elementi di $C_q(X; G)$. A sua volta, le q -catene su A sono anche q -catene su X se pensate estese a zero fuori da A . In altri termini la seguente successione è esatta corta per ogni $q \geq 0$:

$$0 \longrightarrow C_q(A) \longrightarrow C_q(X) \longrightarrow C_q(X, A) \longrightarrow 0$$

Applicando $\text{Hom}(-, G)$, otteniamo

$$0 \longrightarrow C^q(X, A) \longrightarrow C^q(X) \longrightarrow C^q(A) \longrightarrow 0$$

che è ancora esatta. $\text{Hom}(-, G)$ è un funtore esatto a sinistra, e l'esattezza a destra si vede osservando che ogni cocatena su A si estende a una cocatena su X , esattamente come prima. Questa successione esatta corta, induce in coomologia una successione esatta lunga, come voluto.³

3.2 Quadrati di Steenrod

Definizione 3.2.1. (OPERAZIONE IN COOMOLOGIA) Una operazione in coomologia è una trasformazione naturale di untori di coomologia singolare

$$H^p(-; G) \longrightarrow H^q(-; G')$$

con $p, q \geq 0$ e G, G' sono R -moduli, per R anello commutativo con unità. Equivalentemente, dato un morfismo nella categoria (Top_2) delle coppie di spazi topologici, ovvero un morfismo di coppie

$$(X, A) \xrightarrow{f} (Y, B)$$

il seguente diagramma è commutativo

$$\begin{array}{ccc} H^p(X, A; G) & \xrightarrow{f^*} & H^p(Y, B; G') \\ \vartheta_{(X,A)} \downarrow & & \downarrow \vartheta_{(Y,B)} \\ H^q(X, A; G) & \xrightarrow{f^*} & H^q(Y, B; G') \end{array}$$

Una tale trasformazione non sarà in generale un omomorfismo. Se lo è è detta *additiva*.

Esempio 3.2.1. Ad esempio sia $\vartheta(u) = u^{\cup p}$ l'elevamento alla \cup -potenza p -esima. ϑ è additiva se e solo se i moduli dei coefficienti di coomologia sono \mathbf{F}_p algebre. Se $\phi : G \rightarrow G'$ è un omomorfismo dei moduli dei coefficienti, $\phi_* : H^q(-; G) \rightarrow H^q(-; G')$ è sempre un'operazione additiva.

I *quadrati di Steenrod* sono una famiglia di operazioni additive $\{\text{Sq}^i\}_{i \geq 0}$

$$H^\bullet(-; \mathbf{F}_2) \xrightarrow{\text{Sq}^i} H^{\bullet+i}(-; \mathbf{F}_2)$$

che soddisfano le seguenti proprietà

1. $\text{Sq}^0 = \text{Id}$

³La successione esatta corta in questione ricorderà la successione della sottovarietà chiusa: se $X \subset \mathbb{P}^r$ è una sottovarietà chiusa di \mathbb{P}^r , è indotta una successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r} \longrightarrow i_* \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

dove i è l'inclusione di X in \mathbb{P}^r . Induce una successione esatta lunga in coomologia (coerente, come anticipato). Il significato è esattamente lo stesso di quello discusso nell'esempio.

2. Se $i = \deg(u)$ allora $\text{Sq}^i(u) = u \cup u$
3. Se $i > \deg(u)$ allora $\text{Sq}^i(u) = 0$
4. (FORMULA DI CARTAN) $\text{Sq}^i(u \cup v) = \sum_{a+b=i} \text{Sq}^a(u) \cup \text{Sq}^b(v)$

Si può dimostrare che le proprietà di sopra caratterizzano i quadrati univocamente, ma non ne avremo bisogno. Una proprietà spesso utile è data dalle relazioni Adem

Proposizione 3.2.1. (RELAZIONI ADEM) *Per $i < 2j$, la composizione $\text{Sq}^i \cdot \text{Sq}^j$ si scrive*

$$\text{Sq}^i \cdot \text{Sq}^j = \sum_{k=0}^{\lfloor i/2 \rfloor} \binom{j-k-1}{i-2k} \text{Sq}^{i+j-k} \cdot \text{Sq}^k.$$

La formula di Cartan è spesso sostituita dal suo analogo (che da essa segue in modo immediato)

$$(*) \quad \text{Sq}^k(u) = \sum_{a+b=k} \text{Sq}^a(u) \times \text{Sq}^b(u),$$

dove \times è il prodotto esterno. Per completezza, dimostriamo la seguente

Proposizione 3.2.2. *Se vale (*), allora vale la formula di Cartan.*

Dimostrazione. Se $D : X \rightarrow X \times X$ è la mappa diagonale, il prodotto cup e il prodotto esterno sono nella seguente relazione

$$u \cup v = D^*(u \times v).$$

Avendosi $\text{Sq}^k(u \cup v) = \text{Sq}^k(D^*(u \times v))$, dalla naturalità dei quadrati si ha

$$\begin{aligned} \text{Sq}^k(D^*(u \times v)) &= D^* \text{Sq}^k(u \times v) \\ &= D^* \left(\sum_{a+b=k} \text{Sq}^a(u) \times \text{Sq}^b(v) \right) \\ &= \sum_{a+b=k} D^*(\text{Sq}^a(u) \times \text{Sq}^b(v)) = \sum_{a+b=k} \text{Sq}^a(u) \cup \text{Sq}^b(v). \end{aligned}$$

□

Stabiliamo le seguenti notazioni. Tutti i moduli e i prodotti tensoriali si intendono su \mathbf{F}_2 , $C_q(X)$ e $C^q(X)$ sono, rispettivamente, i moduli delle q -catene e q -cocatene singolari. Le lettere greche minuscole indicano cocatene, e le lettere latine minuscole catene. Il simbolo Δ^j è come di consueto il j -simpleso standard. Costruiremo i quadrati al livello di cocatene singolari, e mostreremo che scendono in coomologia.

Se $\alpha \in \text{Hom}(C_q(X), \mathbf{F}_2)$ è una q -cocatena, possiamo estenderla a zero i grado diverso da q e vederla come un elemento di $C^\bullet(X)$. Così vedremo $\alpha \otimes \alpha \in C^\bullet(X) \otimes C^\bullet(X)$.

Quanto segue è un outline della costruzione. Costruiremo una successione di omomorfismi naturali $\{D_j\}$, di grado $+j$ (ovvero aumentano di $+j$ il grado delle cocatene) che

soddisferanno alcune proprietà fondamentali. Questi verranno usati per “ridurre” l’operazione (additiva) di quadrato $u \mapsto u \cup u$ per ottenere i quadrati di Steenrod. Costruiti i D_j , definiremo mappe naturali

$$\mathrm{Hom}(C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(X), \mathbf{F}_2) \xrightarrow{D_j^\vee} \mathrm{Hom}(C_\bullet(X), \mathbf{F}_2)$$

che, come suggerisce la notazione, avranno grado $-j$, via la seguente formula

$$(D_j^\vee \beta)(c) := \beta(D_j c)$$

per q -cocatene $\beta \in \mathrm{Hom}(C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(X), \mathbf{F}_2)$. Infine si definiscono i quadrati di Steenrod a livello di cocatene come segue. Per $\alpha \in C^q(X)$,

$$\mathrm{Sq}^i(\alpha) := D_{q-i}^\vee(\alpha \otimes \alpha).$$

Sia Δ_\bullet un complesso di catene su \mathbf{F}_2 . Sia $T : \Delta_\bullet \otimes \Delta_\bullet \rightarrow \Delta_\bullet \otimes \Delta_\bullet$ la mappa che scambia i fattori (ie. la mappa di trasposizione $T(a \otimes b) = b \otimes a$). in caratteristica 2 i segni sono irrilevanti, e dunque T è una mappa di catena.

Lemma 3.2.1. *Esiste una successione di omomorfismi naturali $C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(X)$ di grado $+j$, $\{D_j\}$, tali che*

1. D_0 è una mappa di catena che preserva l’aumentazione⁴
2. per $j > 0$, $\partial D_j + D_j \partial + D_{j-1} + T D_{j-1} = 0$, dove ∂ è la mappa di bordo.

Se $\{D'_j\}$ è un’altra successione di mappe siffatte, allora esiste una successione di omomorfismi naturali $\{E_j\}_{j \geq 0}$, $C(X) \rightarrow C(X) \otimes C(X)$, di grado $+j$, tali che

1. $E_0 = 0$
2. per ogni j , $\partial E_{j+1} + E_{j+1} \partial + E_j + T E_j + D_j + D'_j = 0$.

Dimostrazione. Sia R l’algebra gruppo

$$\mathbf{F}_2[\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}] \simeq \mathbf{F}_2[t]/(t^2 - 1).$$

\mathbf{F}_2 è un R -modulo con l’azione data da

$$(a + bt).0 = 0 \quad \text{e} \quad (a + bt).1 = a + b \pmod{2}.$$

⁴Per fissare le idee, l’aumentazione, come sarà piú chiaro a breve, è un omomorfismo di R -moduli definito in grado 0 a livello di catene: se Δ_\bullet è un complesso di catene di R -moduli,

$$\iota : \Delta_0 \rightarrow \mathbf{F}_2$$

$$\iota(d_0) := 1.$$

Ricorsivamente, ι definisce una mappa di catena sul complesso di catene Δ_\bullet , che è detto *complesso aumentato*.

Sia Δ_\bullet il complesso di catene di R -moduli, libero e con un unico generatore d_j in ogni grado j , con mappa di bordo ∂ data dalla moltiplicazione per $1 + t$, e mappa di aumentazione data da $\iota(d_0) = 1$. Un tale complesso è detto *complesso di catene libero e aumentato*. Di fatto Δ_\bullet è una risoluzione libera di \mathbf{F}_2 su R . Se chiamiamo \mathcal{C} la categoria dei complessi di catene su R aumentati, definiamo un funtore

$$(\text{Top}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{C}$$

dalla categoria degli spazi topologici a \mathcal{C} ponendo

$$\mathcal{F}(X) := C_\bullet(X) \otimes \Delta_\bullet.$$

\mathcal{F} è *aumentato*, ovvero $\mathcal{F}(X)$ è un complesso aumentato per ogni X , poiché l'aumentazione di $\mathcal{F}(X)$ è il prodotto tensoriale delle aumentazioni su $C_\bullet(X)$ e Δ_\bullet . \mathcal{F} è anche libero, con base $\{\text{Id}_{\Delta_j} \otimes d_k\}_{j,k \geq 0}$ e modelli $\{\Delta^j\}_{j \geq 0}$. Lo scopo è trovare un funtore aciclico⁵ e usare il Teorema dei Modelli Aciclici, che afferma che a meno di equivalenza omotopica esiste esattamente una mappa di catena che preserva l'aumentazione (ie. manda complessi aumentati in complessi aumentati)

$$C_\bullet(X) \otimes \Delta_\bullet \xrightarrow{\tau} C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(X)$$

Per come abbiamo costruito Δ_\bullet (ovvero: prendiamo una catena non banale in $C_\bullet(X)$ in ogni grado e consideriamo il complesso da esse liberamente generato su R) esiste una mappa naturale e che preserva l'aumentazione

$$C_\bullet(X) \otimes \Delta_\bullet \longrightarrow C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(X).$$

Bisogna solo mostrare che è un omomorfismo di R -moduli. Abbiamo osservato sopra che Δ_\bullet è una risoluzione libera di \mathbf{F}_2 su R , e quindi un'azione di R su $C_\bullet(X) \otimes \Delta_\bullet$ si estende a $C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(X)$. R agisce su $C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(X)$ facendo agire t come T , e dunque il funtore dato da

$$\mathcal{G}(X) := C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(X)$$

è aumentato, aciclico e con modelli $\{\Delta^j\}_{j \geq 0}$. Definiamo i D_j come segue:

$$D_j a := \tau(a \otimes d_j).$$

Resta da verificare che soddisfano le proprietà volute. Si ha, poiché τ è una mappa di catena,

$$\begin{aligned} \partial D_j a + D_j \partial a + T D_{j-1} a + D_{j-1} a &= \partial \tau(a \otimes d_j) + \tau(\partial a \otimes d_j) + (1+t) \cdot \tau(a \otimes d_{j-1}) \\ &= \tau(\partial(a \otimes d_j)) + \tau(\partial a \otimes d_j) + (1+t) \cdot \tau(a \otimes d_{j-1}). \end{aligned}$$

⁵Non possiamo dettagliare la teoria dei *modelli aciclici*, né è utile ai fini della dimostrazione. Per avere le idee chiare è utile pensare al Teorema di de Rham astratto, e alla sua dimostrazione via risoluzioni Cech-acicliche. Per la terminologia e il Teorema dei Modelli Aciclici rimandiamo allo Spanier ([4])

L'ultima riga è 0 poiché

$$\tau(\partial(a \otimes d_j)) = \tau(\partial a \otimes d_j + a(1+t) \cdot d_{j-1}).$$

Per le altre proprietà, immediate, rimandiamo allo Spanier.

Dimostriamo l'esistenza delle mappe $\{E_j\}$. In ultima analisi questo seguirà dal fatto che due mappe τ e $\tilde{\tau}$ come sopra sono mappe di catena omotope in modo naturale. La relazione

$$D_j a = \tau(a \otimes d_j)$$

può essere usata per definire i D_j , data τ , o per assegnare τ dati i D_j , essendo $a \otimes d_j$ generatori del complesso di catene $C_\bullet(X) \otimes \Delta_\bullet$. Ne segue che la corrispondenza $\tau \mapsto \{D_j\}$ è 1-1. Siano τ e $\tilde{\tau}$ le mappe di catena determinate dalle due successioni $\{D_j\}$ e $\{\tilde{D}_j\}$. Ancora per il Teorema dei Modelli Aciclici, τ e $\tilde{\tau}$ sono omotope in modo naturale. Sia

$$C_\bullet(X) \otimes \Delta_\bullet \xrightarrow{H} C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(X)$$

l'omotopia (che dunque ha grado +1). Definiamo le mappe E_j ponendo $E_0 = 0$ e

$$E_j a := H(a \otimes d_{j-1}), \quad \text{per } j > 0.$$

Si ha

$$\begin{aligned} & \partial E_{j+1} a + E_{j+1}(\partial a) + T E_j a + E_j a + D_j a + \tilde{D}_j a \\ &= \partial H(a \otimes d_j) + H(\partial a \otimes d_j) + (1+t) \cdot H(a \otimes d_{j-1}) + \tau(a \otimes d_j) + \tilde{\tau}(a \otimes d_j) = 0. \end{aligned}$$

□

Dimostriamo che i Sq^i discendono in coomologia.

Proposizione 3.2.3. *La mappa di cocatena Sq^i manda cocicli in cocicli.*

Dimostrazione. Sia $\alpha \in C^q(X)$. Da $D_{q-i} = 0$ per $i > q$, segue $Sq^i = 0$. Per $i \leq q$ e $c \in C_\bullet(X)$ si ha, detta δ la mappa di cobordo,

$$\begin{aligned} \delta(Sq^i(\alpha))(c) &= D_{q-i}^\vee(\alpha \otimes \alpha)(\partial c) = (\alpha \otimes \alpha)(D_{q-i} \partial c) \\ &= (\alpha \otimes \alpha)(\partial D_{q-i} c) + (\alpha \otimes \alpha)(D_{q-i-1} c + T D_{q-i-1} c). \end{aligned}$$

Su \mathbf{F}_2 , per ogni catena $e \in C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(X)$

$$(\alpha \otimes \alpha)(T e) = (\alpha \otimes \alpha)(e),$$

e quindi l'ultimo termine all'ultima riga svanisce. Ne segue

$$\delta Sq^i(\alpha)(c) = (\alpha \otimes \alpha)(\partial D_{q-i} c) = \delta(\alpha \otimes \alpha)(D_{q-i} c) = 0,$$

poiché α è un cociclo. □

Proposizione 3.2.4. *Sq^i manda cobordi in cobordi.*

Dimostrazione. Sia $\delta\alpha \in C^q(X)$ un cobordo. Per $i > q$ il risultato è immediato proprio come prima. Per $i \leq q$, abbiamo, per ogni $c \in C_q(X)$,

$$\begin{aligned} \text{Sq}^i(\delta\alpha)(c) &= D_{q-i}^\vee(\delta\alpha \otimes \delta\alpha)(c) = (\delta\alpha \otimes \delta\alpha)(D_{q-i}c) \\ &= \delta(\alpha \otimes \delta\alpha)(D_{q-i}c) = (\alpha \otimes \delta\alpha)(\partial D_{q-i}c) \\ &= (\alpha \otimes \delta\alpha)(D_{q-i}\partial c + D_{q-i-1}c + TD_{q-i-1}c) \end{aligned}$$

e per ogni catena e ,

$$(\alpha \otimes \delta\alpha)(e + Te) = (\alpha \otimes \delta\alpha + \delta\alpha \otimes \alpha)(e) = \delta(\alpha \otimes \alpha)(e).$$

Ne segue

$$\text{Sq}^i(\delta\alpha)(c) = \delta D_{q-i}^\vee(\alpha \otimes \delta\alpha)(c) + D_{q-i-1}^\vee\delta(\alpha \otimes \alpha)(c).$$

Resta da vedere che l'ultimo addendo a destra è un cobordo:

$$\begin{aligned} D_{q-i-q}^\vee\delta(\alpha \otimes \alpha)(c) &= (\alpha \otimes \alpha)(\partial D_{q-i-1}c) \\ &= (\alpha \otimes \alpha)(D_{q-i-1}\partial c + D_{q-i-2}c + TD_{q-i-2}c) \\ &= D_{q-i-1}^\vee(\alpha \otimes \alpha)(\partial c) \\ &= \delta(D_{q-i-1}^\vee(\alpha \otimes \alpha))(c). \end{aligned}$$

□

La Proposizione che segue mostra che i quadrati di Steenrod rispettano le cocatene relative.

Proposizione 3.2.5. *Sia $\alpha \in C^\bullet(X)$ che svanisca su $C_\bullet(A)$, con $A \subset X$ sottospazio topologico. Allora $\text{Sq}^i(\alpha)$ svanisce su $C_\bullet(A)$.*

Dimostrazione. Sia $a \in C_q(A)$. Allora

$$\begin{aligned} \text{Sq}^i(\alpha)(a) &= D_{q-i}^\vee(\alpha \otimes \alpha)(a) \\ &= (\alpha \otimes \alpha)(D_{q-i}a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

essendo $D_{q-i}a \in C_\bullet(A) \otimes C_\bullet(A)$.

□

Proposizione 3.2.6. *Siano $\alpha, \beta \in C^q(X)$. Allora*

$$\text{Sq}^i(\alpha + \beta) = \text{Sq}^i(\alpha) + \text{Sq}^i(\beta) + \delta D_{q-i+1}^\vee(\alpha \otimes \beta).$$

Dimostrazione. Per $i < 0$ il risultato è ovvio: ambo i membri sono nulli. Per $i \geq 0$ abbiamo

$$\begin{aligned} \text{Sq}^i(\alpha + \beta) &= ((\alpha + \beta) \otimes (\alpha + \beta))(D_{q-i}c) \\ &= (\alpha \otimes \alpha + \beta \otimes \beta)(D_{q-i}c) + (\alpha \otimes \beta)(D_{q-i}c + TD_{q-i}c) \\ &= (\text{Sq}^i(\alpha) + \text{Sq}^i(\beta))(c) + (\alpha \otimes \beta)(D_{q-i+1}\partial c + \partial D_{q-i+1}c) \end{aligned}$$

Il secondo termine dell'ultima riga è

$$(\alpha \otimes \beta)(D_{q-i+1}\partial c + \partial D_{q-i+1}c) = \delta D_{q-i+1}^\vee(\alpha \otimes \beta)(c) + D_{q-i+1}^\vee\delta(\alpha \otimes \beta)(c).$$

Il secondo termine è zero perchè α e β sono cocicli. \square

Conseguenza della Proposizione appena mostrata è che Sq^i è un'operazione additiva in coomologia. Resta da mostrare solamente che la costruzione dei quadrati di Steenrod è indipendente dalla scelta del sistema di mappe $\{D_j\}$.

Proposizione 3.2.7. *Le mappe Sq^i in coomologia sono indipendenti dalla scelta del sistema $\{D_j\}$.*

Dimostrazione. Se $\{D_j\}$ e $\{\tilde{D}_j\}$ sono sistemi di mappe che inducono a livello di cocatene Sq^i e $\widetilde{\text{Sq}}^i$, sia $\alpha \in C^q(X, A)$. Bisogna dimostrare che $\text{Sq}^i(\alpha)$ e $\widetilde{\text{Sq}}^i(\alpha)$ differiscono a meno di un cobordo.

$$\begin{aligned} (\text{Sq}^i\alpha + \widetilde{\text{Sq}}^i\alpha)(c) &= (\alpha \otimes \alpha)(D_{q-i}c + \tilde{D}_{q-i}c) \\ &= (\alpha \otimes \alpha)(E_{q-i}c + TE_{q-i}c + \partial E_{q-i+1}c + E_{q-i+1}\partial c). \end{aligned}$$

Di questi termini resta solo $\delta D_{q-i+1}^\vee(c)$, che è un cobordo. \square

Completata la costruzione, dovremmo dimostrare che i quadrati soddisfano gli assiomi. Questo non è difficile, e non essendo particolarmente illuminante, rimandiamo allo Spanier per tutti i dettagli.

3.3 Isomorfismo di Thom e Teorema di esistenza

Cominciamo osservando che dato un fibrato ξ

$$\begin{array}{ccc} & s & \\ & \curvearrowright & \\ E & \xrightarrow{\pi} & B \end{array}$$

la sezione zero (ie. $s(b) = (b, 0)$ per ogni $b \in B$) realizza B come un retratto di deformazione di E tramite π . Ne segue, in particolare, che i gruppi di coomologia singolare di E e B sono isomorfi tramite π^*

$$H^\bullet(E) \simeq H^\bullet(B).$$

Sia $E_0 \subset E$ l'insieme dei punti non-nulli di E (ad esempio, se E è banale, $E = B \times \mathbf{R}^n$, e $E_0 = B \times (\mathbf{R}^n - \{0\})$).

Teorema 3.3.1. (ISOMORFISMO DI THOM) *C'è un'unica classe di coomologia (detta classe fondamentale) $u \in H^n(E, E_0)$ tale che per ogni fibra F l'immagine di u tramite la restrizione*

$$H^n(E, E_0) \longrightarrow H^n(F, F_0)$$

è non nulla. Inoltre la mappa $x \mapsto \pi^*x \cup u$ definisce un isomorfismo

$$H^j(B) \simeq H^{n+j}(E, E_0).$$

Dimostrazione. Sia ξ banale, e \mathbf{R}_0^n sia l'insieme dei punti non-nulli di \mathbf{R}^n .

$$H^i(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}_0^n) \simeq \mathbf{F}_2, \quad \text{se e solo se } i = 0, n$$

e 0 altrimenti. Sia $e \in H^n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}_0^n)$ l'unico elemento non banale in grado n . Per il Teorema di Kunnet, la mappa

$$H^j(B) \xrightarrow{\cup e} H^{j+n}(B \times \mathbf{R}^n, B \times \mathbf{R}_0^n) \simeq H^{j+n}(E, E_0).$$

è un isomorfismo. Seguendo l'argomento di Milnor, dimostriamo il Teorema per fibrati non banali su spazi topologici compatti.

Supponiamo anzitutto che $B = U_1 \cup U_2$ sia unione di due aperti tali che il teorema valga per $\xi|_{U_1} =: \xi_1$, $\xi|_{U_2} =: \xi_2$ e $\xi|_{U_1 \cap U_2} =: \xi_{12}$. Poniamo $E_1 := \pi^{-1}(U_1)$ e $E_2 := \pi^{-1}(U_2)$, $E_1 \cap E_2 = \pi^{-1}(U_1 \cap U_2)$. Dal principio di Mayer-Vietoris,

$$0 = H^{n-1}(E_1 \cap E_2, E_1 \cap E_{2,0}) \longrightarrow H^n(E, E_0) \xrightarrow{(i_1^*, i_2^*)} \longrightarrow$$

$$H^n(E_1, E_{1,0}) \oplus H^n(E_2, E_{2,0}) \xrightarrow{j_1^* - j_2^*} H^n(E_1 \cap E_2, E_1 \cap E_{2,0}) \longrightarrow \dots$$

dove $i_k : E_k \rightarrow E$ e $j_k : E_1 \cap E_2 \rightarrow E_k$ sono inclusioni per $k = 1, 2$. Sia $b \in B$, e F_b la fibra su b in E . Chiamiamo l'inclusione in E di F_b , i_b . Valendo il teorema per ξ_1, ξ_2, ξ_{12} , esistono uniche classi di coomologia

$$u_1 \in H^n(E_1, E_{1,0}), \quad u_2 \in H^n(E_2, E_{2,0}), \quad u^\cap \in H^n(E_1 \cap E_2, E_1 \cap E_{2,0}),$$

con la proprietà di non essere nel nucleo di i_b^* , per b in $B_1, B_2, B_1 \cap B_2$ rispettivamente. Consideriamo $(u_1, u_2) \in H^n(E_1, E_{1,0}) \oplus H^n(E_2, E_{2,0})$. Poiché $i_b^*u_1 = i_b^*u_2 = i_b^*u^\cap$, per $b \in B_1 \cap B_2$,

$$j_1^*u_1 - j_2^*u_2 = 0.$$

Ne segue che, essendo la successione di Mayer-Vietoris esatta, esiste una $u \in H^n(E, E : 0)$ non banale tale che $i^*u = (u_1, u_2)$. Essendo i^* iniettiva, questa u è unica. Bisogna mostrare che $i_b^*u = u_b$ per ogni $b \in B$. Se $b \in B_1$,

$$i_b^*u = i_b^*|_{F_b \cap E_1} i_1^*u = i_b^*u_1 = u_b.$$

Analogamente per $b \in B_2$. Osserviamo le seguenti successioni di Mayer-Vietoris, indicando con $E^\cap := E_1 \cap E_2$:

$$\begin{array}{ccccccccc} H^{j-1}(E_1) \oplus H^{j-1}(E_2) & \longrightarrow & H^{j-1}(E_1 \cap E_2) & \longrightarrow & H^j(E) & \longrightarrow & H^j(E_1) \oplus H^j(E_2) & \longrightarrow & H^j(E_1 \cap E_2) \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim & & \downarrow & & \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ H^{j-1}(E_1, E_{1,0}) \oplus H^{j-1}(E_2, E_{2,0}) & \longrightarrow & H^{j-1}(E^\cap, E_0^\cap) & \longrightarrow & H^j(E, E_0) & \longrightarrow & H^j(E_1, E_{1,0}) \oplus H^j(E_2, E_{2,0}) & \longrightarrow & H^j(E^\cap, E_0^\cap) \end{array}$$

dove gli isomorfismi sono dati per ipotesi su ξ_1, ξ_2, ξ_{12} . Per il Lemma dei Cinque,

$$H^j(E) \simeq H^{j+n}(E, E_0).$$

Per induzione (il passo base è il caso di ξ fibrato banale, e il passo induttivo si fa con l'argomento di sopra) il risultato vale per un numero arbitrario finito di aperti di ricoprimento di B . \square

Definizione 3.3.1. La composizione

$$H^j(B) \xrightarrow{\pi^*} H^j(E) \xrightarrow{\cup u} H^{j+n}(E, E_0)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\phi}$$

è detta *isomorfismo di Thom*.

Sia $1 \in H^0(B)$ l'unità. Osserviamo che $\phi(1) = u$. Diamo finalmente la seguente

Definizione 3.3.2. (CLASSI DI STIEFEL-WHITNEY) L' i -esima classe di Stiefel-Whitney $w_i(\xi) \in H^i(B)$ è data dalla composizione

$$w_i(\xi) := \phi^{-1} \cdot \text{Sq}^i(u).$$

Detto Sq il *quadrato totale*, dato da

$$\text{Sq} := \sum \text{Sq}^i,$$

la classe totale di Stiefel-Whitney

$$w(\xi) = w_0(\xi) + w_1(\xi) + \dots \in H^*(B)$$

è data da

$$\phi^{-1} \cdot \text{Sq} \cdot \phi(1).$$

Teorema 3.3.2. *Le classi caratteristiche di Stiefel-Whitney soddisfano i seguenti quattro assiomi:*

1. ESISTENZA. Per ogni fibrato vettoriale ξ esiste una successione di classi di coomologia mod 2

$$w_i(\xi) \in H^i(B(\xi), \mathbf{F}_2)$$

per $i = 0, 1, 2, \dots$ tali che $w_0(\xi) = 1$ e $w_i(\xi) = 0$ se ξ ha rango n e $i > n$.

2. NATURALITÀ. Sia dato il seguente diagramma commutativo, con naturale significato di notazioni

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ B & \xrightarrow{\bar{f}} & B' \end{array}$$

con $\xi : E \rightarrow B$ e $\xi' : E \rightarrow B'$. Allora

$$w(\xi) = \bar{f}^* w(\xi').$$

In particolare, per fibrati pull-back $\xi' = f^* \eta$, $w(f^* \eta) = \bar{f}^* w(\eta)$.

3. TEOREMA DEL PRODOTTO DI WHITNEY. Per fibrati ξ e η sulla stessa base, per le classi di Stiefel-Whitney del fibrato somma $\xi \oplus \eta$ vale

$$w_i(\xi \oplus \eta) = \sum_{j+k=i} w_j(\xi) \cup w_k(\eta).$$

In termini di classi totali,

$$w(\xi \oplus \eta) = w(\xi) \cup w(\eta).$$

4. NORMALIZZAZIONE. Per il fibrato tautologico γ_1^1 su \mathbf{RP}^1

$$w_1(\gamma_1^1) \neq 0.$$

Dimostrazione. Per il primo assioma basta osservare che $w_i(\xi)$ è data dall'immagine di 1 tramite la composizione

$$H^0(B) \xrightarrow{\phi} H^n(E, E_0) \xrightarrow{\text{Sq}^i} H^{n+1}(E, E_0) \xrightarrow{\phi^{-1}} H^i(B)$$

e dunque segue la tesi dalle proprietà 1 & 3 dei quadrati di Steenrod.

Per il secondo assioma, sia $f : \xi \rightarrow \xi'$ una mappa di fibrati. Induce una mappa di coppie

$$(E, E_0) \xrightarrow{g} (E', E'_0)$$

e per ogni fibra $F \subset E$, g si restringe a una mappa $g_F : (F, F_0) \rightarrow (F', F'_0)$ dove F' è la fibra in E' su cui F è mappata isomorficamente da f .

Il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} H^n(E', E'_0) & \xrightarrow{g^*} & H^n(E, E_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n(F', F'_0) & \xrightarrow[\sim]{g_F^*} & H^n(F, F_0) \end{array}$$

Per ogni fibra F , la classe fondamentale $u \in H^n(E, E_0)$ si restringe a un generatore di $H^n(F, F_0)$, e dal diagramma segue che vale lo stesso per $g^* u \in H^n(F', F'_0)$. Ne segue che g^* manda la classe fondamentale di ξ' , u' , nella classe fondamentale di ξ , u . Anche

il seguente diagramma, per ϕ e ϕ' isomorfismi di Thom di ξ e ξ' rispettivamente, è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} H^i(B') & \xrightarrow{\bar{f}^*} & H^i(B) \\ \phi' \downarrow & & \downarrow \phi \\ H^{n+i}(E', E'_0) & \xrightarrow{g^*} & H^{n+i}(E, E_0) \end{array}$$

Ricordando che i quadrati soddisfano una proprietà di naturalità, si ha

$$\begin{aligned} \bar{f}^* w(\xi') &= \bar{f}^* \cdot (\phi')^{-1} \cdot \text{Sq}(u') \\ &= \phi^{-1} \cdot g^* \cdot \text{Sq}(u') \\ &= \phi^{-1} \cdot \text{Sq} \cdot g^*(u') \\ &= \phi^{-1} \cdot \text{Sq}(u) = w(\xi). \end{aligned}$$

Ancora una volta sviluppando la definizione di classe totale al primo e all'ultimo membro, e confrontando i termini di ugual grado, si ha la tesi per le w_i , per ogni i .

Per il terzo assioma procediamo come segue.

Siano ξ e ξ' due fibrati di rango rispettivamente n e m , e consideriamo il fibrato prodotto $\xi'' := \xi \times \xi'$, con proiezione $\pi'' := \pi \times \pi' : E \times E' \rightarrow B \times B'$. E_0 e E'_0 sono aperti in E , E' , e dunque possiamo considerare il prodotto esterno

$$u \times u' \in H^{n+m}(E \times E', (E \times E'_0) \cup (E_0 \times E'))$$

delle forme fondamentali u e u' di ξ e ξ' rispettivamente. Osserviamo che $(E \times E'_0) \cup (E_0 \times E')$ è proprio E''_0 . Per ogni fibra $F'' = F \times F'$ di ξ'' , si ha

$$(u \times u')|_{(F'', F''_0)} = u|_{(F, F_0)} \times u'|_{(F', F'_0)},$$

e il membro destro è evidentemente non-zero. Ma allora $u \times u'$ è la classe fondamentale di ξ'' . Mettiamo ora in relazione l'isomorfismo di Thom di ξ'' , ϕ'' , con gli isomorfismi di Thom di ξ e ξ' , ϕ e ϕ' rispettivamente.

Per ogni $a \in H^*(B)$ e $b \in H^*(B')$,

$$\begin{aligned} \phi''(a \times b) &= (\pi''^*(a \times b)) \cup u'' \\ &= (\pi^*a \times \pi'^*b) \cup (u \times u') \\ &= (\pi^*a \cup u) \times (\pi'^*b \cup u') \\ &= \phi(a) \times \phi'(b). \end{aligned}$$

Calcoliamo la classe totale di ξ'' :

$$\begin{aligned} \phi''(w(\xi'')) &= \phi'' \cdot \text{Sq}(u \times u') \\ &= \phi''(\text{Sq}(u) \times \text{Sq}(u')) \\ &= \phi \cdot \text{Sq}(u) \times \phi' \cdot \text{Sq}(u') \\ &= \phi''(w(\xi) \times w(\xi')) \end{aligned}$$

e allora $w(\xi'') = w(\xi) \times w(\xi')$. Infine supponiamo $B = B'$. Sia $D : B \rightarrow B \times B$ la mappa diagonale.

$$w(\xi) \cup w(\xi') = D^*(w(\xi) \times w(\xi')).$$

Per naturalità,

$$D^*w(\xi'') = w(D^*(\xi \times \xi')),$$

ma $D^*(\xi \times \xi') = \xi \oplus \xi'$, e quindi

$$w(\xi) \cup w(\xi') = w(\xi \oplus \xi').$$

Esplicitando la definizione della classe totale in ambo i membri dell'uguaglianza appena trovata e confrontando i termini di ugual grado, si ha la tesi sulle w_i , per ogni i .

Per il quarto assioma, osserviamo che il fibrato tautologico γ_1^1 su $\mathbf{R}\mathbb{P}^2$ si retrae a un nastro di Möebius M (perché questo è omeomorfo al sottofibrato di γ_1^1 dei vettori di lunghezza ≤ 1 , ottenuti per riscaldamento: il riscaldamento è la retrazione). Inoltre, se chiamiamo D^2 un disco aperto (unitario, a meno di retrazione) sappiamo che

$$\mathbf{R}\mathbb{P}^2 - D^2 \simeq M.$$

Osserviamo poi che $\partial M \simeq \mathbb{S}^1 \simeq E_0$, detto E lo spazio totale di γ_1^1 . Ne segue l'isomorfismo

$$H^\bullet(E, E_0) \simeq H^\bullet(M, \partial M)$$

da cui segue, a sua volta, per il principio di escissione,

$$H^\bullet(\mathbf{R}\mathbb{P}^2, D^2) \simeq H^\bullet(\mathbf{R}\mathbb{P}^2 - D^2, \partial D^2).$$

Combinando i due isomorfismi si ha

$$H^\bullet(\mathbf{R}\mathbb{P}^2, D^2) \simeq H^\bullet(M, \partial M).$$

Essendo D^2 contraibile, $H^i(\mathbf{R}\mathbb{P}^2, D^2) \simeq H^i(\mathbf{R}\mathbb{P}^2)$ se $i > 0$. In particolare, per $i = 1$ (che è il grado di nostro interesse, essendo γ_1^1 un line bundle)

$$H^1(E, E_0) \simeq H^1(\mathbf{R}\mathbb{P}^2).$$

Essendo la classe fondamentale $u \in H^1(E, E_0)$ non banale, deve corrispondere a un elemento non-nullo $a \in H^1(\mathbf{R}\mathbb{P}^2)$. Ne segue che $\text{Sq}^1(u)$ corrisponde a $\text{Sq}^1(a) = a \cup a$, che non può essere zero in $H^2(\mathbf{R}\mathbb{P}^2)$. Quindi non può esserlo $w_1(\gamma_1^1)$ (cfr. la sua definizione!), essendo ϕ^{-1} un isomorfismo. \square

3.4 Teorema di unicità

Ci riferiremo agli assiomi introdotti nel primo seminario con il nome di *assiomi di Stiefel-Whitney*. Osserviamo anzitutto che per come è definita la classe totale $w(\xi) \in H^*(B)$, per B spazio topologico e

$$\xi : E \xrightarrow{\pi} B$$

fibrato di rango n su B , è sufficiente mostrare l'unicità di w per avere l'unicità delle w_i .

Teorema 3.4.1. *Sia w tale che soddisfi gli assiomi di Stiefel-Whitney. Allora w è unica a meno di isomorfismo.*

Dimostrazione. Sia $\tilde{w} \in H^*(B)$ tale che anche essa soddisfi gli assiomi di Stiefel-Whitney. Per la proprietà universale di γ^n , per ogni fibrato su B di rango n , η , esiste una mappa di fibrati $F : \eta \rightarrow \gamma^n$ con una mappa indotta sulla base B . Per l'assioma di naturalità

$$w(\eta) = f^*w(\gamma^n) \quad \text{e} \quad \tilde{w}(\eta) = f^*\tilde{w}(\gamma^n).$$

Ne segue che basta mostrare che $w(\gamma^n) = \tilde{w}(\gamma^n)$. Dagli assiomi 1 e 4 segue che

$$w(\gamma_1^1) = 1 + a = \tilde{w}(\gamma_1^1).$$

L'inclusione $\mathbf{R}\mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbf{R}\mathbb{P}^\infty$, ι , si solleva a una mappa di fibrati, e ancora per naturalità

$$\iota^*w(\gamma^1) = \iota^*\tilde{w}(\gamma^1) = 1 + a.$$

Poiché γ^1 è un line bundle, $w(\gamma^1) = 1 + a = \tilde{w}(\gamma^1)$. Per gli assiomi 2 e 3, se consideriamo il fibrato prodotto

$$\xi = \gamma^1 \times \dots \times \gamma^1 = \pi_1^*\gamma^1 \oplus \dots \oplus \pi_n^*\gamma^1$$

si ha

$$w(\xi) = \tilde{w}(\xi) = \prod_{i=1}^n (1 + a_i).$$

Esiste una mappa di fibrati $G : \xi \rightarrow \gamma^n$ che induce una mappa sulle basi

$$\mathbf{R}\mathbb{P}^\infty \times \dots \times \mathbf{R}\mathbb{P}^\infty \xrightarrow{g} BO(n)$$

e dall'assioma 2 segue

$$g^*w(\gamma^n) = w(\xi) = \tilde{w}(\xi) = g^*\tilde{w}(\gamma^n).$$

Ma

$$H^*(BO(n)) \xrightarrow{g^*} H^*(\mathbf{R}\mathbb{P}^\infty \times \dots \times \mathbf{R}\mathbb{P}^\infty)$$

è iniettiva, ed è suriettiva sull'immagine, che è la sottoalgebra dei polinomi simmetrici in a_1, \dots, a_n . Ne segue

$$w(\gamma^n) = \tilde{w}(\gamma^n)$$

il che completa la dimostrazione per naturalità. □

Capitolo 4

Introduzione agli spazi classificanti per G -fibrati principali

EMILIANO INGUSCIO

Durante il corso abbiamo visto che dato uno spazio topologico paracompatto B ed un fibrato vettoriale reale ξ di rango k su B esiste una mappa continua (detta mappa di Gauss) $f : B \rightarrow Gr_k(\mathbb{R}^\infty)$ tale che $\xi \simeq f^*(\gamma^k)$. Inoltre è facile vedere che se $\tilde{f} : B \rightarrow Gr_k(\mathbb{R}^\infty)$ è un'altra mappa tale che $\xi \simeq \tilde{f}^*(\gamma^k)$, allora f ed \tilde{f} sono omotope. Conseguenza di questo fatto è l'esistenza di una corrispondenza biunivoca fra le classi di omotopia dei k -fibrati vettoriali su B e le classi di isomorfismo dei fibrati vettoriali di rango k , in pratica è possibile costruire un'applicazione biettiva

$$\begin{aligned} \phi : [B, Gr_k(\mathbb{R}^\infty)] &\rightarrow Vect_{\mathbb{R}}^k(B) \\ f &\mapsto f^*(\gamma^k) \end{aligned} \tag{4.1}$$

semplicemente associando ad ogni classe di omotopia di mappe il suo pull-back. In questo paragrafo interpreteremo questa parte della teoria sostituendo ai fibrati vettoriali i G -fibrati principali. Il gruppo G sarà un gruppo di Lie compatto (ad esempio $O(n)$, $SO(n)$ oppure $U(n)$, $SU(n)$ rispettivamente nel caso reale e complesso). Prima di tutto discutiamo un esempio utile a chiarire la teoria

Esempio 1. Consideriamo il fibrato tautologico γ_1^n su $\mathbb{R}P^n$. Vogliamo mostrare che dare una sezione $s : \mathbb{R}P^n \rightarrow E(\gamma_1^n)$ di γ_1^n equivale a dare una mappa \mathbb{Z}_2 -invariante da $S^n \rightarrow \mathbb{R}$. Se $s : \mathbb{R}P^n \rightarrow E(\gamma_1^n)$ è una sezione di γ_1^n e $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ la proiezione al quoziente, considerando la composizione $g = s \circ \pi$ otteniamo una mappa

$$\begin{aligned} g : S^n &\rightarrow E(\gamma_1^n) \\ x &\mapsto ([x], f(x)x) \end{aligned} \tag{4.2}$$

dove $[x]$ rappresenta la retta in \mathbb{R}^{n+1} passante per l'origine e per x ed $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}$ è un'applicazione continua tale che, per le proprietà della topologia quoziente, $f(-x) = -f(x)$. Quindi abbiamo il seguente diagramma commutativo tramite cui fattorizza g

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{g} & E(\gamma_1^n) \\ & \searrow \pi & \nearrow s \\ & \mathbb{R}P^n & \end{array}$$

A questo punto se \mathbb{Z}_2 agisce su \mathbb{R} tramite la rappresentazione segno possiamo vedere $E(\gamma_1^n)$ proprio come $S^n \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R}$. Concludiamo allora che esiste una corrispondenza biunivoca fra l'insieme delle mappe \mathbb{Z}_2 -invarianti da S^n ad \mathbb{R} e l'insieme delle sezioni del fibrato $S^n \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}P^n$

Questo esempio si offre ad una generalizzazione: consideriamo $\pi : P \rightarrow B$ un G -fibrato principale ed X un G -spazio destro, allora possiamo costruire il fibrato $q : P \times_G X \rightarrow B$. Se $f : P \rightarrow X$ è una mappa G -invariante, allora la mappa

$$\begin{aligned} h : P &\rightarrow P \times X \\ p &\mapsto (p, f(x)) \end{aligned} \tag{4.3}$$

risulta G -invariante e passando allo spazio delle G -orbite otteniamo un'applicazione

$$s = s_f : B \rightarrow P \times_G X$$

che è proprio una sezione del fibrato $q : P \times_G X \rightarrow B$. In pratica il fatto che $f(gx) = gf(x)$ implica la commutatività del seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{h} & P \times X \\ \downarrow p & & \downarrow G \curvearrowright \\ B & \xrightarrow{s_f} & P \times_G X \end{array}$$

Quindi definendo $Hom_G(P, X)$ l'insieme delle mappe G -invarianti da P a X e detto $\Gamma_{P,X}$ l'insieme delle sezioni di q abbiamo il seguente

Lemma 4.0.2. *Sia P un G -fibrato principale su B ed X un G -spazio, allora sussiste una biezione naturale*

$$\begin{aligned} \phi : Hom_G(P, X) &\rightarrow \Gamma_{P,X} \\ f &\mapsto s_f. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Dimostrazione. Supponiamo P un fibrato banale. Allora $P \simeq B \times G$. Quindi dalla definizione abbiamo $Hom_G(P, B) = Hom_G(B \times G, P) = Hom(B, P)$, dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la G -invarianza delle mappe. Ugualmente abbiamo

$$\Gamma(B \times G \times_G X \rightarrow B) = \Gamma(B \times X \rightarrow B) = Hom(B, X)$$

Se il fibrato non è banale basta prendere un ricoprimento di B che banalizzi il fibrato e ripetere il procedimento sugli aperti banalizzanti. \square

Prima di passare al teorema di classificazione omotopica dei G -fibrati principali enunciamo un lemma tecnico la cui dimostrazione si può trovare in [Mi] (Corollario 6.2).

Lemma 4.0.3 (Principio di estensione). *Sia B un CW complesso, A un sottocomplesso di B ed $i : A \rightarrow B$ l'inclusione di A in B . Sia inoltre $P \rightarrow B$ un G -fibrato principale ed X un G -spazio. Se i è un'equivalenza omotopica o X è contraibile, allora ogni morfismo di G -fibrati principali $P|_A \rightarrow X$ si estende ad un morfismo $P \rightarrow X$.*

A questo punto possiamo dimostrare il seguente

Teorema 4.0.4 (Teorema di classificazione). *Sia $P \rightarrow B$ un G -fibrato principale con P contraibile. Allora per ogni complesso CW X , è possibile realizzare una corrispondenza biunivoca fra le classi di omotopia di mappe da X a B e l'insieme dei G -fibrati principali a meno di isomorfismo. In pratica*

$$\begin{aligned} \phi : [X, B] &\rightarrow \mathcal{P}_G(X) \\ f &\rightarrow f^*(P) \end{aligned} \tag{4.5}$$

è una biezione.

Dimostrazione. Dimostriamo che ϕ è suriettiva. Consideriamo $Q \rightarrow X$ un G -fibrato principale. Tenendo a mente che ogni CW complesso deve avere almeno una 0-cella possiamo applicare il lemma di estensione alla coppia $(X, *)$ ottenendo una mappa G -invariante $Q \rightarrow P$. Passando agli spazi delle G -orbite otteniamo una mappa $f : X \rightarrow B$ ed un morfismo $Q \rightarrow f^*(P)$ di G -fibrati principali su X . In un seminario precedente è stato dimostrato che ogni morfismo fra G -fibrati principali è un isomorfismo. Dunque ϕ è suriettiva.

Adesso supponiamo siano date le mappe $f_0, f_1 : X \rightarrow B$ ed un isomorfismo $\psi : f_0^*(P) \simeq f_1^*(P)$. Prendendo $Q \simeq f_0^*(P)$ otteniamo che f_0 ed f_1 sono entrambe mappe classificanti per Q . A questo punto consideriamo il fibrato $R : Q \times I \rightarrow X \times I$. La G -mappa

$$R|_{X \times \{0,1\}} \rightarrow P$$

grazie al lemma precedente si estende ad una mappa G -invariante $R \rightarrow P$; passando agli spazi dell'orbite otteniamo l'omotopia desiderata e quindi ϕ risulta iniettiva. \square

4.1 Costruzione esplicita di mappe e spazi classificanti

Interpretando il teorema di classificazione in analogia con la (1), possiamo concludere che ogni G -fibrato principale si può ottenere come pull-back di un altro particolare fibrato principale. Tale fibrato, che denoteremo con EG , deve avere come spazio totale uno spazio contraibile su cui G possa agire liberamente.

Quello che faremo a breve sarà dare un metodo per costruire EG . Dal momento che l'azione di G su EG è libera sarà ben definito (a meno di omotopia) lo spazio $BG = EG/G$ e quindi un G fibrato principale $\pi : EG \rightarrow BG$. A questo punto scelto B uno spazio topologico paracompatto esiste una mappa continua ed unica, a meno di omotopia, $g : B \rightarrow BG$ tale che ogni G -fibrato principale su B si scrive come $g^*(EG)$:

$$\begin{array}{ccc} g^*(EG) & \xrightarrow{\pi'} & B \\ \downarrow g' & & \downarrow g \\ EG & \xrightarrow{\pi} & BG \end{array}$$

In questo senso la mappa g classifica tutti i G -fibrati principali su X a meno di isomorfismo, perciò è detta mappa classificante e il G -fibrato principale $EG \rightarrow BG$ prende il nome di G -fibrato universale in quanto non solo è un fibrato principale, ma ha la proprietà aggiuntiva per cui ogni G -fibrato principale a base X si realizza come suo pull-back tramite g . In particolare lo spazio BG è detto spazio classificante per G . Vediamo adesso come costruire gli spazi classificanti per gruppi di Lie compatti di dimensione bassa.

Dimostriamo un lemma preliminare

Lemma 4.1.1. *La sfera $S^\infty := \{(x_1, x_2, \dots) \mid \sum_{i=1}^\infty x_i^2 = 1\}$ è contraibile.*

Dimostrazione. Troviamo un'omotopia fra la mappa identica e la mappa costante su S^∞ . Consideriamo

$$\begin{aligned} f_t : \mathbb{R}^\infty &\rightarrow \mathbb{R}^\infty \\ (x_1, x_2, \dots) &\mapsto (1-t)(x_1, x_2, \dots) + t(0, x_1, x_2, \dots) \end{aligned} \tag{4.6}$$

Per ogni $t \in [0, 1]$ f_t manda punti non nulli in punti non nulli, quindi $f_t/|f_t|$ realizza un'omotopia fra la mappa identica su S^∞ e la mappa $(x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)$. A questo punto possiamo definire un'omotopia fra questa mappa e la mappa costante $(1, 0, 0, \dots)$ su S^∞ ponendo

$$g_t(x_1, x_2, \dots) \mapsto (1-t)(0, x_1, x_2, \dots) + t(1, 0, \dots)$$

e considerando $g_t/|g_t|$. A questo punto componendo le due omotopie otteniamo un'omotopia fra S^∞ ed il punto. Quindi S^∞ risulta contraibile. \square

Esempio 2. Consideriamo $G = S^1 \simeq U(1) \simeq SO(2)$. Il nostro obiettivo è costruire lo spazio classificante $BSO(2)$. Per farlo occorre trovare uno spazio contraibile ($ESO(2)$) su cui $SO(2)$ possa agire liberamente e successivamente passare allo spazio delle orbite facendo agire il gruppo. Dal momento che $SO(2)$ è il gruppo delle rotazioni del piano è naturale pensare di farlo agire sulle sfere.

Se $SO(2)$ agisce su sfere di dimensione pari (ad esempio S^2) per rotazione intorno all'asse verticale ci si imbatte in due problemi:

1. l'azione non è libera poiché i poli della sfera, in quanto punti fissi per l'azione di rotazione, hanno stabilizzatori non banali;
2. come è noto, S^n non è contraibile.

Per risolvere il primo problema possiamo considerare l'azione di $SO(2)$ su sfere di dimensione dispari. In questo caso gli spazi delle orbite sono i proiettivi complessi. Dal momento che l'azione è libera il primo problema viene risolto; tuttavia S^{2k+1} resta non contraibile per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi quello che si fa è mandare al limite il numero di celle che costituisce la sfera ¹ e definire

$$ESO(2) := \lim_{k \rightarrow \infty} S^{2k+1} := S^\infty$$

². Per il lemma precedente S^∞ è contraibile e dal momento che $SO(2)$ agisce liberamente su ogni sfera dispari agirà liberamente anche su S^∞ perché se così non fosse esisterebbe

¹In questo caso la sfera S^n è vista come complesso di celle ottenuto induttivamente incollando sull'equatore di S^{n-1} due n -celle.

²Precisiamo in questa nota la definizione di limite diretto di complessi di celle.

Definizione 1. Un insieme non vuoto I dotato di una relazione binaria, riflessiva e transitiva, si definisce *insieme diretto* (denotato con $\langle I, \leq \rangle$) se per ogni coppia di elementi $a_1, a_2 \in I$ esiste un $c \in I$ tale che $a_1 \leq c$ ed $a_2 \leq c$.

Dato un insieme diretto $\langle I, \leq \rangle$ sia $\{A_i\}_{i \in I}$ un insieme di oggetti indicizzati da I ed $f_{ij} : A_i \rightarrow A_j$ un omomorfismo per ogni $i \leq j$ tale che valgano le seguenti proprietà:

1. f_{ii} è l'identità su A_i ;
2. $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$ per ogni $i \leq j \leq k$.

Allora la coppia $\langle A_i, f_{ij} \rangle$ è chiamata *sistema diretto* su I . Possiamo quindi definire il limite diretto degli A_i come

$$\lim_{i \rightarrow \infty} A_i := \bigsqcup_i A_i / \sim$$

dove se $x_i \in A_i \sim x_j \in A_j$ se esiste $k \in I$ tale che $f_{ik}(x_i) = f_{jk}(x_j)$.

Nel nostro caso possiamo considerare come insieme diretto quello dei numeri naturali e come oggetti le sfere S^i indicizzate sui naturali dagli omomorfismi di inclusione (ogni sfera è equatore di una sfera più piccola). Quindi

$$\lim_{i \rightarrow \infty} S^{2i+1} := \bigsqcup_i S^{2i+1} / \sim =: S^\infty$$

Allora S^∞ con questa definizione diventa un complesso di celle infinito e quindi dotato della topologia compatta aperta: un sottoinsieme è aperto se e solo se interseca in aperti S^n per ogni n .

un k finito tale che $S^{2k+1}/SO(2)$ avrebbe isotropia non banale. A questo punto possiamo definire $BSO(2) = S^\infty/SO(2) := \mathbb{C}P^\infty$. Conseguentemente otteniamo un $SO(2)$ -fibrato universale

$$SO(2) \hookrightarrow S^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty.$$

Osserviamo che per teorema di classificazione ogni $SO(2)$ -fibrato principale su uno spazio paracompatto X si realizza come pull-back, tramite una mappa classificante $g : X \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$, del fibrato universale $S^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$.

Esempio 3. Sia $G = O(1) \simeq \mathbb{Z}_2$. Trovare $EO(1)$ equivale a trovare uno spazio contraibile su cui $O(1)$ agisca liberamente. Dal momento che $O(1)$ agisce su S^n tramite la relazione antipodale ed il quoziente è lo spazio proiettivo reale n -dimensionale l'azione di $O(1)$ su S^n è libera. Per risolvere il problema della contraibilità consideriamo nuovamente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S^n = S^\infty$$

e quindi $BO(1) = S^\infty/O(1) =: \mathbb{R}P^\infty$. Corrispondentemente abbiamo un $O(1)$ -fibrato universale

$$O(1) \hookrightarrow S^\infty \rightarrow \mathbb{R}P^\infty.$$

4.2 Generalizzazione degli spazi classificanti

Il problema affrontato in questa sezione è quello di generalizzare il risultato ottenuto per $SO(2)$ e $O(1)$ ai gruppi di Lie compatti $O(n)$ ed $SO(n)$. Precedentemente abbiamo calcolato $ESO(2) = EO(1) = EU(1) = S^\infty$. Osserviamo che la sfera di dimensione infinita può essere vista come l'insieme degli 1-riferimenti in \mathbb{R}^∞ , cioè $St_1(\mathbb{R}^\infty)$: la 1-varietà di Stiefel in \mathbb{R}^∞ . Questo concetto si presta ad una vasta generalizzazione in quanto per n finito anche la varietà $St_n(\mathbb{R}^\infty)$ risulta contraibile e dotata di un'azione libera dei gruppi $O(n)$ ed $SO(n)$. Vediamolo nel caso in cui $G = O(n)$.

Sia $St_n(\mathbb{R}^k)$ la varietà di Stiefel che, come insieme, è costituita dalle n -uple ortonormali in \mathbb{R}^k . Il gruppo $O(n)$ agisce liberamente su $St_n(\mathbb{R}^k)$ (ed il quoziente è la Grassmanniana $Gr_n(\mathbb{R}^k)$) L'azione è così definita: consideriamo $p = (v_1, \dots, v_n) \in St_n(\mathbb{R}^k)$ e osserviamo che possiamo vederlo come una matrice $k \times n$. Allora possiamo moltiplicare $A \in O(n)$ alla sua destra. Supponiamo che A fissi p ; dal momento che le colonne di p sono ortogonali, in particolare, sono indipendenti. Quindi il rango di p è n e le righe di p spannano \mathbb{R}^n . A agisce su p moltiplicando le righe una alla volta e quindi, se A fissa p , allora fissa ciascuna riga e, di conseguenza, fissa anche le loro combinazioni lineari e quindi fissa tutto \mathbb{R}^n . Pertanto per ogni $w \in \mathbb{R}^n$ risulta $wA = w$; cioè $A = Id$. Dal momento che l'unico punto fisso è l'identità ne deduciamo che l'azione di $O(n)$ è libera.

Passando al limite induttivo definiamo

$$EO(n) = \lim_{k \rightarrow \infty} St_n(\mathbb{R}^k) =: St_n(\mathbb{R}^\infty)$$

ed ottenne l' $O(n)$ -fibrato universale

$$O(n) \hookrightarrow St_n(\mathbb{R}^\infty) \rightarrow Gr_n(\mathbb{R}^\infty)$$

dal momento che $BO(n) = St_n(\mathbb{R}^\infty)/O(n)$. In modo del tutto analogo se al gruppo ortogonale sostituiamo l'azione del gruppo speciale ortogonale $SO(n)$ otteniamo che la sua azione preserva l'orientazione delle basi e quindi $BSO(n)$ risulta la varietà Grassmanniana orientata di dimensione n (che indichiamo con $Gr_n^{Or}(\mathbb{R}^\infty)$).

Riassumendo abbiamo ottenuto i seguenti risultati:

$$\begin{aligned} BO(n) &= Gr_n(\mathbb{R}^\infty) \\ BSO(n) &= Gr_n^{Or}(\mathbb{R}^\infty) \end{aligned}$$

ed in particolare

$$B\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^\infty.$$

4.3 Equivalenza fra riduzione del gruppo strutturale e sollevamento della mappa classificante

Supponiamo di avere un n -fibrato vettoriale $\xi = (E, p, B)$ e cercare informazioni su di esso quali orientabilità, banalità, possibilità di decomposizione in sottofibrati. Questa domanda, tradotta nel linguaggio dei G -fibrati principali, ha una risposta molto semplice in termini di spazi classificanti. Dato un G -fibrato $P \rightarrow B$ associato a ξ e H un sottogruppo chiuso di G , diremo che P è *indotto* da un H -fibrato se esiste un H -fibrato principale Q ed un isomorfismo $Q \times_H G \simeq P$. Il prossimo teorema collega la riduzione del gruppo di struttura di un G -fibrato principale al sollevamento della sua mappa classificante ad una mappa che classifichi un sottogruppo H del gruppo strutturale G .

Teorema 4.3.1 (Teorema ponte). *Sia H un sottogruppo chiuso di un gruppo di Lie G , allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. P è indotto da un H -fibrato;
2. $P \times_G (G/H) \rightarrow B$ ammette una sezione;
3. La mappa classificante $f : B \rightarrow BG$ si solleva, a meno di omotopia, ad una mappa $\tilde{f} : B \rightarrow BH$.

Idea di dimostrazione. (1) \Rightarrow (2) Per definizione di H -fibrato indotto $P \simeq Q \times_H G$ per qualche H -fibrato principale Q . Allora vale

$$P \times_G (G/H) = P \times_G G \times_H * = Q \times_H G \times_G G \times_H * = Q \times_H G \times_H * = Q \times_H (G/H).$$

L'insieme delle classi laterali identiche in (G/H) è un H -punto fisso e quindi resta definita una mappa H -invariante $* \rightarrow G/H$. Applicando a questa mappa l'operatore $Q \times_H (-)$ otteniamo una mappa

$$Q \times_H * \rightarrow Q \times_H (G/H) = P \times_G (G/H)$$

Ma $Q \times_H * = Q/H = B$, quindi abbiamo costruito una sezione $s : B \rightarrow P \times_G (G/H)$.
 (2) \Rightarrow (3) Dal momento che H è un sottogruppo chiuso di G allora

$$EG/H = EG \times_G (G/H)$$

è un modello per BH . Allora dobbiamo dimostrare che se $f : B \rightarrow BG$ è una mappa classificante per G c'è un sollevamento $\tilde{f} : B \rightarrow EG \times_G (G/H) = BH$

$$\begin{array}{ccc} & & BH \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow \\ B & \xrightarrow{f} & BG \end{array}$$

Ma un sollevamento del tipo indicato nel diagramma è proprio una sezione del pull-back $f^*(EG \times_G (G/H))$, cioè $P \times_G (G/H)$.

(3) \Rightarrow (1) Se il sollevamento \tilde{f} esiste, basta prendere $Q \simeq \tilde{f}^*(EH)$. □

4.4 Sollevamento delle mappe classificanti per il fibrato tangente

Consideriamo il fibrato tangente ad una varietà riemanniana X

$$T_p X \rightarrow TX \rightarrow X$$

ed il $GL(n)$ -fibrato principale associato ottenuto tramite l'azione di $GL(n)$ su $T_p X$ per cambio di base. Allora ha senso considerare la mappa classificante per X $f : X \rightarrow BGL(n)$. Siccome X è una varietà su ogni spazio tangente è definita una metrica g_{ij} che permette di definire un prodotto scalare sulle fibre. Quindi, come spiegato nel secondo seminario, tramite il processo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, è possibile ridurre il gruppo di struttura al gruppo ortogonale $O(n)$. Corrispondentemente, per il teorema ponte, esisterà un sollevamento della mappa f ad una mappa classificante $\tilde{f} : X \rightarrow BO(n)$. Quello che dovremmo fare è trovare delle condizioni sul fibrato affinché si possa ulteriormente sollevare la mappa classificante tramite una nuova riduzione del gruppo di struttura.

Per fare questo consideriamo la successione esatta di gruppi vista nel secondo seminario

$$1 \rightarrow SO(n) \hookrightarrow O(n) \xrightarrow{\det} \mathbb{Z}_2 \rightarrow 1$$

ed induciamola sugli spazi classificanti

$$B\{1\} \rightarrow BSO(n) \rightarrow BO(n) \rightarrow B\mathbb{Z}_2 \rightarrow B\{1\}.$$

Dal momento che $B\{1\} \simeq \{pt\}$ (il quoziente dell'azione di un punto su un punto è un punto) possiamo riscrivere la successione come segue

$$\begin{array}{ccc}
SO(n) & \xrightarrow{i} & O(n) \\
\downarrow & & \downarrow \text{det} \\
\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2
\end{array}$$

e passando alle mappe indotte sugli spazi classificanti otteniamo

$$\begin{array}{ccccc}
X & & & & \\
\searrow & & \tilde{f} & & \\
& & & & BO(n) \\
& \searrow \tilde{f}' & & \longrightarrow & \downarrow Bdet \\
& & BSO(n) & & \\
& & \downarrow & & \\
& & B\{1\} & \longrightarrow & B\mathbb{Z}_2
\end{array}$$

dove \tilde{f}' indica il sollevamento che proviene dalla riduzione del gruppo di struttura da $O(n)$ ad $SO(n)$. Perché affinché esista il sollevamento \tilde{f}' il diagramma precedente deve commutare. Ma questo accade se l'applicazione

$$X \rightarrow BSO(n) \rightarrow B\mathbb{Z}_2$$

risulta omotopa alla mappa costante

$$X \rightarrow \{pt\} \rightarrow B\mathbb{Z}_2.$$

Per il teorema di classificazione

$$[X, BO(n)] \simeq \mathcal{P}_{O(n)}(X)$$

e per quanto dimostrato nel secondo seminario

$$\mathcal{P}_{O(n)}(X) \simeq H^1(X, O(n)).$$

Similmente vale $H^1(X, \mathbb{Z}_2) \simeq [X, B\mathbb{Z}_2]$. Ricordando che la prima classe di Stiefel-Whitney è stata definita come l'applicazione

$$w_1 : H^1(X, O(n)) \rightarrow H^1(X, \mathbb{Z}_2)$$

si ha che se l'applicazione $Bdet \circ f : X \rightarrow B\mathbb{Z}_2$ è omotopa all'applicazione costante, allora $w_1(TX) = 0$. Per quanto dimostrato nel secondo seminario se $w_1(TX) = 0$ allora il fibrato TX è orientabile, quindi (per il teorema ponte) \tilde{f} si solleva ad una mappa $\tilde{f}' : X \rightarrow BSO(n)$. Di conseguenza il gruppo di struttura del fibrato si riduce ad $SO(n)$. Quindi, dopo aver calcolato le classi di Stiefel-Whitney del fibrato tangente ad $\mathbb{R}P^n$ (secondo seminario), è subito possibile dire quali spazi proiettivi reali ammettano una struttura di varietà orientabile.

4.5 Ulteriori riduzioni

Sappiamo che $SO(n)$ è connesso ma non semplicemente connesso e $\pi_1(SO(n)) \simeq \mathbb{Z}_2$ per ogni $n \geq 3$. Quindi $SO(n)$ ammette un rivestimento universale a due fogli. Indichiamo tale riferimento con $Spin(n)$ e, dal momento che il rivestimento universale di un gruppo di Lie è un gruppo di Lie, sappiamo che $Spin(n)$ è un gruppo di Lie e sussiste la seguente fibrazione

$$\mathbb{Z}_2 \rightarrow Spin(n) \rightarrow SO(n)$$

che indotta agli spazi classificanti diventa

$$B\mathbb{Z}_2 \rightarrow BSpin(n) \rightarrow BSO(n).$$

Per ottenere una situazione analoga alla precedente occorre sostituire la fibrazione precedente con la cofibrazione ³

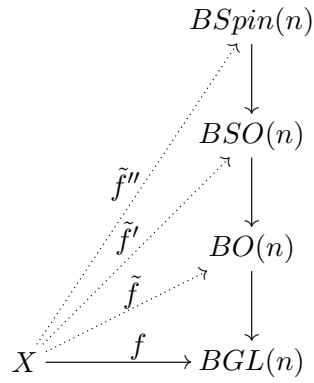
$$BSpin(n) \rightarrow BSO(n) \rightarrow B^2\mathbb{Z}_2$$

e, detta $B\xi_0 : BSpin(n) \rightarrow BSO(n)$ la mappa indotta dal doppio rivestimento di $SO(n)$ otteniamo il diagramma

$$\begin{array}{ccc}
 X & & \\
 \searrow & \tilde{f}' & \searrow \\
 & BSpin(n) & \xrightarrow{B\xi_0} & BSO(n) \\
 \searrow & \downarrow & & \downarrow w \\
 & B\{1\} & \longrightarrow & B^2\mathbb{Z}_2
 \end{array}$$

dove \tilde{f}'' indica il sollevamento di \tilde{f}' causato dalla riduzione del gruppo di struttura. Come prima affinché il digramma commuti la mappa $X \rightarrow BSO(n)$ deve essere omotopa alla mappa costante $X \rightarrow \{*\} \rightarrow B^2\mathbb{Z}_2$. Inoltre $H^2(X, \mathbb{Z}_2) \simeq [X, B^2\mathbb{Z}_2]$ e $w_2 : H^1(X, SO(n)) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}_2)$. Allora la mappa $w_2 \circ \tilde{f}'$ è omotopa all'applicazione costante se e soltanto se $w_2(TX) = 0$, cioè TX ammette una struttura spin. In questo caso possiamo considerare un sollevamento $\tilde{f}'' : X \rightarrow BSpin(n)$ dovuto alla riduzione del gruppo strutturale da $SO(n)$ a $Spin(n)$.

³In questa successione indichiamo $B^2\mathbb{Z}_2$ lo spazio classificante dello spazio classificante di \mathbb{Z}_2 . In questo caso occorre usare un altro modello per costruire EG : quello di Milnor.



In realtà è possibile procedere ad ulteriori riduzioni del gruppo di struttura chiedendo il successivo annullarsi di altre classi caratteristiche (non di Stiefel-Whitney). La successione di spazi classificanti relativi ai gruppi interessati da riduzioni successive è detta torre di Whitehead:

$$\dots \rightarrow BSpin(n) \rightarrow BSO(n) \rightarrow BO(n) \rightarrow BGL(n)$$

Bibliografia

- [1] J. MILNOR & J. STASHEFF - *Characteristic Classes*. Princeton University Press
- [2] A. HATCHER - *Algebraic Topology*. CUP
- [3] H. B. LAWSON & M.-L. MICHELSON - *Spin Geometry*. Princeton University Press
- [4] E. H. SPANIER - *Algebraic Topology*. - Springer