Simone Casalvieri, Riccardo Durastanti, Paola Zurlo

Fibrati vettoriali olomorfi ed hermitiani

Seminario per il corso di Geometria Superiore

Prof. Paolo Piccinni

Anno Accademico 2013/14

Indice

1 Definizioni ed esempi

Definizione 1. Un *fibrato vettoriale complesso* C^∞ di rango k è una terna $\xi = (E, \pi, M)$ costituita da due varietà complesse E, M e da un'applicazione $\pi : E \to M$ C^∞ e suriettiva. Inoltre si richiede la seguente condizione di banalità locale: esiste un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$ di M e una famiglia di diffeomorfismi

$$\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) := E|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{C}^k$$

tali che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "\pi"] & U_\alpha \times \mathbb{C}^k \arrow[dl, "\pi_1"] \\
U_\alpha &
\end{tikzcd}$$

dove π_1 è la proiezione sul primo fattore e la restrizione

$$\varphi_\alpha\big|_p : E_p = \pi^{-1}(p) \to \{p\} \times \mathbb{C}^k$$

sia un isomorfismo di spazi vettoriali complessi. Si richiede, infatti, anche che tutte le fibre $E_p = \pi^{-1}(p)$, abbiano struttura di spazio vettoriale complesso di dimensione k.
M si dice *varietà base* ed E *varietà totale.*

Osservazione 1. Le applicazioni

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^k \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times C^k$$

sono, per ogni $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ fissato, automorfismi di C^k, ovvero:

$$\begin{array}{rcl}
\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^k & \to & (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^k \\
(p, v) & \to & (p, g_{\alpha\beta}(p)v)
\end{array}$$

con $g_{\alpha\beta}(p) : \mathbb{C}^k \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^k$,
dove le

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{k^2}$$

sono funzioni C^∞ dette *funzioni di transizione.*
Esse soddisfano le seguenti relazioni, dette di *cociclo*:

1. $g_{\alpha\alpha}(p) = id_{\mathbb{C}^k}$
2. $g_{\alpha\gamma}(p) \circ g_{\gamma\beta}(p) = g_{\alpha\beta}(p), \forall p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

1.1 Esempi di fibrati vettoriali complessi

Le operazioni su uno spazio vettoriale inducono operazioni sui fibrati vettoriali. Pertanto, partendo da uno o più fibrati complessi, se ne ottegono degli altri. Vediamo alcuni esempi:

i) *Il fibrato duale*

Se $\xi = (E, \pi, M)$ è un fibrato vettoriale complesso, definiamo il fibrato vettoriale duale $\xi^* = (E^*, \pi, M)$ come il fibrato vettoriale complesso con fibre $E_p^* = (E_p)^*$. Allora le banalizzazioni $\varphi_\alpha : E|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{C}^k$ inducono mappe $\varphi_\alpha^* : E_\alpha^* \to U_\alpha \times \mathbb{C}^{k^*} \cong U_\alpha \times \mathbb{C}^k$. Se ξ ha funzioni di transizione $\{g_{\alpha\beta}\}$, allora ξ^* ha funzioni di transizione date da $j_{\alpha\beta}(p) = [(g_{\alpha\beta}(p))^{-1}]^t$.

ii) *Il fibrato somma diretta*

Dati $\xi = (E, \pi, M)$ e $\xi' = (E', \pi, M)$ due fibrati vettoriali complessi di rango k ed l, con funzioni di transizione $\{g_{\alpha\beta}\}$ e $\{h_{\alpha\beta}\}$ rispettivamente, si definisce il fibrato vettoriale complesso $E \oplus E'$ con funzioni di transizione date da

$$j_{\alpha\beta}(p) = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta}(p) & 0 \\ 0 & h_{\alpha\beta}(p) \end{pmatrix} \in GL(k+l, \mathbb{C}).$$

iii) *Il fibrato tensore*

Nella stessa situazione dell'esempio precedente, si definisce il fibrato $E \otimes E'$ con funzioni di transizione date da $j_{\alpha\beta}(p) = g_{\alpha\beta}(p) \oplus h_{\alpha\beta}(p) \in GL(kl, \mathbb{C})$.

iv) *Il fibrato pull-back*

Data una funzione C^∞ $f : M \to N$ con M ed N varietà differenziabili e ξ fibrato vettoriale complesso, possiamo definire il fibrato vettoriale f^*E ponendo $(f^*E)_p = E_{f(p)}$. Se $\varphi_\alpha : E|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{C}^k$ è una banalizzazione di E in un intorno di $f(p)$, allora la mappa $f^*\varphi : f^*E_{f^{-1}U_\alpha} \to f^*U_\alpha \times \mathbb{C}^k$ dota f^*E di una struttura di varietà sull'aperto $f^{-1}U_\alpha$. Le funzioni di transizione sono date dal pull-back delle funzioni di transizione per E.

v) *Il fibrato r-esima potenza esterna*

Sia E un fibrato vettoriale su M di rango k. Si definisce il fibrato $\Lambda^r E$, che ha funzioni di banalizzazione locale date da $(\varphi_\alpha)^{\Lambda^r E}$, le quali ad ogni elemento di $\Lambda^r(E_p)$, $p \in U_\alpha$, associano le coordinate nella base $\{(\varphi_\alpha^E)^{-1}(e_{i_1}) \wedge \cdots \wedge (\varphi_\alpha^E)^{-1}(e_{i_r})\}$ con $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_r \leq m$. Le funzioni di transizione sono date da $j_{\alpha\beta}(p) = \Lambda^r g_{\alpha\beta}(p) \in GL(\binom{r}{k}, \mathbb{C})$.

Discutiamo ora un esempio importante di fibrato vettoriale complesso: *il fibrato tangente.*
Sia M una varietà complessa e $TM = T_{\mathbb{C}}M = TM\otimes$. Poniamo $TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$. TM si dice il fibrato tangente ad M. Se M è una varietà complessa di dimensione m, allora TM ha una struttura di fibrato vettoriale di rango $2m$ con proiezione $\pi : TM \to M$ data da $v \in T_pM \to p \in M$. Siano, infatti, $(z_\alpha^1, \dots, z_\alpha^m)$ e $(z_\beta^1, \dots, z_\beta^m)$ coordinate sulle carte (U, φ_U) e (V, φ_V) e sia, rispettivamente $\left\{\frac{\partial}{\partial z_\alpha^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_\alpha^m}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha^m}\right\}$ una base di $TM|_U$ e $\left\{\frac{\partial}{\partial z_\beta^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_\beta^m}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta^m}\right\}$ una base di $TM|_V$. Fissata la carta (U, φ_U), abbiamo

$$\varphi_U : U \to \mathbb{C}^m$$

e

$$d\varphi_U : TM|_U \to T\mathbb{C}^m \cong \mathbb{C}^{2m}.$$

Possiamo pertanto definire

$$\begin{array}{rcl} \Phi_U : TM|_U & \to & U \times \mathbb{C}^{2m} \\ X_p = \displaystyle\sum_{j=1}^m v^j \left.\frac{\partial}{\partial z_\alpha^j}\right|_p + \sum_{j=1}^m v^{j+m} \left.\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha^j}\right|_p & \to & (p, v^1, \dots, v^{2m}) \end{array}$$

Φ_U è biiettiva e $\pi = \pi_1 \circ \Phi_U$ (dove $\pi_1 : U \times \mathbb{C}^{2m} \to U$ è la proiezione sul primo fattore). Dotando TM della topologia meno fine che rende Φ_U un omeomorfismo, segue che TM è di Hausdorff, è paracompatto e π è continua. Inoltre

$$\Phi_U \circ \Phi_V^{-1} : (U \cap V) \times \mathbb{C}^{2m} \to (U \cap V) \times \mathbb{C}^{2m}$$

con

$$\begin{array}{rcl} (\Phi_U \circ \Phi_V^{-1})(p, v_1, \dots, v_{2m}) & = & \Phi_U\Big(\displaystyle\sum_{j=1}^m v^j \left.\frac{\partial}{\partial z_\beta}\right|_p + \sum_{j=1}^m v^{j+m} \left.\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta^j}\right|_p \Big) \\ & = & (p, j_{UV}(p)v) \end{array}$$

dove $j_{UV}(p) = (g_{\alpha\beta})(p) = \big(\frac{\partial u_\alpha^k}{\partial u_\beta^j}\big)$ per $k, j = 1, \dots, 2m$ matrice del cambiamento di coordinate da $(z_\alpha^1, \dots, z_\alpha^m)$ a $(z_\beta^1, \dots, z_\beta^m)$, avendo adottato la seguente convenzione:

$$u_\alpha^k = \begin{cases} z_\alpha^k, & k = 1, ..., m \\ \bar{z}_\alpha^k, & k = m+1, ..., 2m \end{cases}.$$

Poiché le funzioni di transizione sono funzioni C^∞, il fibrato è complesso. A partire da questo si può definire *il fibrato cotangente* al seguente modo: data M varietà complessa, poniamo $T_{\mathbb{C}}^*M = \bigcup_{p\in M} T_p^*M$. Se M è una varietà complessa di dimensione m, allora T^*M ha una struttura di fibrato vettoriale di rango $2m$ con proiezione $\pi : T^*M \to M$ data da $v \in T_p^*M \to p \in M$. Siano, infatti, $(z_\alpha^1, \ldots, z_\alpha^m)$ e $(z_\beta^1, \ldots, z_\beta^m)$ coordinate sulle carte (U, φ_U) e (V, φ_V) e $\{dz_\alpha^1, \ldots, dz_\alpha^m, d\overline{z}_\alpha^1, \ldots, d\overline{z}_\alpha^m\}, \{dz_\beta^1, \ldots, dz_\beta^m, d\overline{z}_\beta^1, \ldots, d\overline{z}_\beta^m\}$ rispettivamente una base di $T^*M|_U$ e $T^*M|_V$. Seguendo lo stesso procedimento usato per il fibrato tangente, si ottiene $j_{UV}(p) = (g_{\alpha\beta})(p) = [(\frac{\partial u_\alpha^k}{\partial u_\beta^j})^{-1}]^t$. Secondo quanto detto per la r-esima potenza esterna di un fibrato complesso, si ottiene l' *r-esima potenza esterna del fibrato cotangente*, definita in questo modo:

$$\begin{aligned} \Lambda^r(T_{\mathbb{C}}^*M) = \Lambda^r(T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M) &= \bigoplus_{p+q=r} \Lambda^{p,0}M \otimes \Lambda^{0,q}M \\ &= \bigoplus_{p+q=r} \Lambda^{p,q}M \end{aligned}$$

che è ancora un fibrato complesso, per quanto detto nel caso generale.

Passiamo ora alla definizione di fibrato vettoriale olomorfo.

Definizione 2. Sia $\xi = (E, \pi, M)$ un fibrato vettoriale complesso. ξ è detto *fibrato vettoriale olomorfo* se esiste una banalizzazione locale con funzioni di transizione olomorfe. Più formalmente, se esiste un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$ di M e $\forall U_\alpha$ un diffeomorfismo

$$\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) := E|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{C}^k$$

tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "\pi"] & U_\alpha \times \mathbb{C}^k \arrow[dl, "\pi_1"] \\ U_\alpha & \end{tikzcd}$$

e

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^k &\to (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^k \\ (p, v) &\to (p, g_{\alpha\beta}(p)v) \end{aligned}$$

e definiscono *funzioni di transizione*

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{k^2}$$

olomorfe.

Definizione 3. Un riferimento su U del fibrato (E, π, M) di rango k è una k-pla $(\sigma_1, ..., \sigma_k)$ di sezioni su U tale che $\forall p \in U$, i vettori $\sigma_1(p), ...m\sigma_k(p) \in E_p = \pi^{-1}(p)$ sono linearmente indipendenti.

Osservazione 2. Assegnare un riferimento per E su U è essenzialmente equivalente a dare una banalizzazione di E su U. Infatti, partendo dalla banalizzazione:

$$\psi_U : E|_p \to U \times \mathbb{C}^k,$$

le sezioni $\sigma_i(p) := \psi_U^{-1}(p, e_i), i = 1, ..., k$ formano un riferimento e, viceversa, assegnato un riferimento $\{\sigma_1, ..., \sigma_k\}$, ogni $\lambda \in E_p$ si scrive come $\lambda = \sum_{i=1}^k \lambda_i \sigma_i(p)$ e perciò possiamo definire la banalizzazione ψ_U al modo seguente:

$$\psi_U(\lambda) = (p, \lambda_1, ..., \lambda_k).$$

Notiamo anche che, data ψ_U banalizzazione di E su U, ogni sezione σ di E su U si può rappresentare in modo unico come un vettore di funzioni lisce $f = (f_1, ..., f_k)$ scrivendo $\sigma(p) = \sum_{i=1}^k f_i(p) \psi_U^{-1}(p, e_i)$. Se ψ_V è una banalizzazione di E su V e $f' = (f'_1, ..., f'_k)$ è la corrispondente rappresentazione di $\sigma|_{U \cap V}$, allora si ha:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^k f_i(p) \psi_U^{-1}(p, e_i) &= \sum_{i=1}^k f'_i(p) \psi_V^{-1}(p, e_i) \\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^k f_i(p) e_i = \sum_{i=1}^k f'_i(p) \psi_U \psi_V^{-1}(p, e_i) \\
&\Rightarrow f = g_{UV} f'
\end{aligned}$$

quindi, in termini delle banalizzazioni $\{\psi_\alpha : E|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{C}^k\}$, le sezioni del fibrato E su $\bigcup_\alpha U_\alpha$ corrispondono esattamente alla famiglia $\{f_\alpha = (f_{\alpha_1}, ..., f_{\alpha_k})\}$ di vettori di funzioni C^∞ tali che $f_\alpha = g_{\alpha\beta} f_\beta$, dove le $g_{\alpha\beta}$ sono le funzioni di transizione su $U_\alpha \cap U_\beta$.

1.2 Esempi di fibrati vettoriali olomorfi

Osserviamo anzitutto che i fibrati duale, somma diretta, tensore, potenza esterna e pull-back di fibrati vettoriali olomorfi sono ancora olomorfi. Partendo dalla nota decomposizione $T_{\mathbb{C}}M = TM \otimes \mathbb{C} = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$ del fibrato tangente complessificato, definiamo il *fibrato tangente olomorfo* $T^{1,0}M = \mathbb{C}\{\frac{\partial}{\partial z_i}\}$, ovvero il sottofibrato corrispondente all'$i-$autospazio di $T_{\mathbb{C}}M$. Esso è un fibrato olomorfo (di rango m, data M varietà complessa di dimensione m), in quanto le sue funzioni di transizione sono date da $(g_{\alpha\beta}) = \left(\frac{\partial z_\alpha^k}{\partial z_\beta^j}\right)$ per $k, j = 1, \ldots, m$ che sono chiaramente olomorfe. Analogamente, dalla decomposizione $T^*_{\mathbb{C}}M = T^*M \otimes \mathbb{C} = T^*M^{1,0} \oplus T^*M^{0,1}$, definiamo il *fibrato cotangente olomorfo* $T^*M^{1,0} = (TM^{1,0})^* = \mathbb{C}\left\{\frac{\partial}{\partial \overline{z}_i}\right\}$ e $\Lambda^{p,0}M = \Lambda^p(T^*M^{1,0})$, il *fibrato olomorfo potenza esterna.*

2 (p, q)-forme su M a valori in E

Per ogni $\xi = (E, \pi, M)$ olomorfo, definiamo $\Lambda^{p,q}(E) := \Lambda^{p,q}M \otimes E$, dove $\Lambda^k M \cong \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q}M$, le cui sezioni sono le $(p, q)-$forme su M a valori in E. Sia $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ un riferimento locale su $E|_U$ e ω_i una $(p, q)-$forma su M, dunque:

$$\omega_i = \sum_{IJ} \omega^i_{IJ} dz_I \wedge d\overline{z}_J,$$

con ω^i_{IJ} funzioni $C^\infty(U, \mathbb{C})$. Allora $\sigma \in \Gamma(\Lambda^{p,q}(E))$ si scrive come

$$\sigma = \sum_{i=1}^{k} \omega_i \otimes \sigma_i = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{IJ} \omega^i_{IJ} dz_I \wedge d\overline{z}_J \right) \otimes \sigma_i.$$

Da ora in poi denoteremo le sezioni del fibrato $\Lambda^{p,q}(E)$ equivalentemente con i simboli $\Omega^{p,q}(E)$ e $\Gamma(\Lambda^{p,q}(E))$.

3 Operatore $\overline{\partial}$

Vogliamo definire un operatore $\overline{\partial} : \Omega^{p,q}(E) \to \Omega^{p,q+1}(E)$. Sia $\sigma \in \Gamma(\Lambda^{p,q}(E))$; localmente $\sigma = \sum_{i=1}^k \omega_i \otimes \sigma_i$, con $\{\sigma_1, ..., \sigma_k\}$ riferimento su E.
Pertanto poniamo $\overline{\partial}(\sigma) := \sum_{i=1}^k \overline{\partial}(\omega_i) \otimes \sigma_i$.

L'operatore così definito gode delle due seguenti proprietà:

i) $\overline{\partial}^2 = 0$*:*
 $\overline{\partial}^2 \sigma = \overline{\partial}(\overline{\partial}\sigma) = \overline{\partial}\left(\sum_{i=1}^k \overline{\partial}\omega_i \otimes \sigma_i\right) = \sum_{i=1}^k \overline{\partial}^2 \omega_i \otimes \sigma_i = 0$ poiché $\overline{\partial}^2 \omega_i = 0, \forall i = 1, \ldots, k$;

ii) $\overline{\partial}$ *soddisfa la regola di Leibniz:*
 siano $\sigma \in \Gamma(\Lambda^{r,s}(E))$ e $\alpha \in \Gamma(\Lambda^{p,q}(M))$, dove $\sigma = \sum_{i=1}^k \omega_i \otimes \sigma_i$, con $\omega_i \in \Omega^{r,s}(M)$.
 Dunque

$$\alpha \wedge \sigma = \alpha \wedge \left(\sum_{i=1}^{k} \omega_i \otimes \sigma_i \right) = \sum_{i=1}^{k} (\alpha \wedge \omega_i) \otimes \sigma_i.$$

Allora:

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}(\alpha\wedge\sigma) &= \bar{\partial}\sum_{i=1}^{k}(\alpha\wedge\omega_i)\otimes\sigma_i = \sum_{i=1}^{k}\bar{\partial}(\alpha\wedge\omega_i)\otimes\sigma_i \\
&= \sum_{i=1}^{k}\left[\overline{\partial}\alpha\wedge\omega_i + (-1)^{deg\alpha}(\alpha\wedge\overline{\partial}\omega_i)\right]\otimes\sigma_i \\
&= \overline{\partial}\alpha\wedge\left(\sum_{i=1}^{k}\omega_i\otimes\sigma_i\right) + (-1)^{deg\alpha}\left(\alpha\wedge\sum_{i=1}^{k}\overline{\partial}\omega_i\otimes\sigma_i\right) \\
&= \overline{\partial}\alpha\wedge\sigma + (-1)^{p+q}(\alpha\wedge\overline{\partial}\sigma).
\end{aligned}$$

Mostriamo che $\overline{\partial}$ è ben definito, ovvero non dipende dalla banalizzazione scelta su $E|_U$. Sia $(\sigma'_1,\ldots,\sigma'_k)$ un altro riferimento locale di E su M. Allora $\sigma = \sum_{i=1}^{k}\omega_i\otimes\sigma_i = \sum_{j=1}^{k}\tau_j\otimes\sigma'_j$, con $\omega_i,\tau_j\in\Gamma(\Lambda^{p,q}M)\quad\forall i,j=1,\ldots,k$. Sappiamo che $\sigma_i = \sum_{l=1}^{k}g_{il}\sigma'_l$, con $g_{il}\in\Theta(U,\mathbb{C})$, ovvero funzioni olomorfe perché E è un fibrato olomorfo. Allora si ha:

$$\begin{aligned}
\sigma &= \sum_{i=1}^{k}\omega_i\otimes\sigma_i = \sum_{i=1}^{k}\left(\omega_i\otimes\sum_{j=1}^{k}g_{ij}\sigma'_j\right) = \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{k}\omega_i g_{ij}\right)\otimes\sigma'_j \\
&\Rightarrow\quad \tau_j = \sum_{i=1}^{k}\omega_i g_{ij}.
\end{aligned}$$

Dal fatto che $\overline{\partial}$ soddisfa Leibniz e le g_{ij} sono olomorfe, segue:

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}\sigma := \sum_{j=1}^{k}\overline{\partial}\tau_j\otimes\sigma'_j &= \sum_{j=1}^{k}\overline{\partial}\left(\sum_{i=1}^{k}g_{ij}\omega_i\right)\otimes\sigma'_j \\
&= \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{k}\overline{\partial}g_{ij}\wedge\omega_i + g_{ij}\overline{\partial}\omega_i\right)\otimes\sigma'_j \\
&= \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{k}\overline{\partial}\omega_i g_{ij}\right)\otimes\sigma'_j \\
&= \sum_{i=1}^{k}\overline{\partial}\omega_i\otimes\left(\sum_{j=1}^{k}g_{ij}\sigma'_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k}\overline{\partial}\omega_i\otimes\sigma_i.
\end{aligned}$$

4 Strutture olomorfe

Definizione 4. Una *struttura pseudo-olomorfa* su $\xi = (E, \pi, M)$ fibrato vettoriale complesso è un operatore $\overline{\partial} : \Omega^{p,q}(E) \to \Omega^{p,q+1}(E)$ che soddisfa la regola di Leibniz. La coppia $(\xi, \overline{\partial})$ è detta *fibrato vettoriale pseudo-olomorfo.*

Definizione 5. Se l'operatore $\overline{\partial}$ di $(\xi, \overline{\partial})$ è tale che $\overline{\partial}^2 = 0$, allora $\overline{\partial}$ è detta *struttura olomorfa.*

Definizione 6. Una *sezione* σ di $(\xi, \overline{\partial})$ è detta olomorfa se $\overline{\partial}\sigma = 0$.

L'esistenza o meno di una struttura olomorfa associata ad un fibrato vettoriale complesso ci permette di caratterizzare i fibrati vettoriali olomorfi. Per mostrarlo abbiamo bisogno di due risultati preliminari.

Lemma 4.1. *Un fibrato vettoriale pseudo-olomorfo $(\xi, \overline{\partial})$ di rango k è olomorfo se e solo se $\forall p \in M$ esiste U intorno aperto di p e un riferimento $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ di sezioni olomorfe di E su U.*

Dimostrazione.
($\Rightarrow$) Sia ξ un fibrato vettoriale olomorfo. Allora possiamo definire, per ogni banalizzazione locale olomorfa (U, φ_U), una base locale di sezioni olomorfe in questo modo: $\sigma_i(p) := \varphi_U^{-1}(p, e_i), \forall i = 1, \dots, k$, dove e_i è l'i-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{C}^k$.
($\Leftarrow$) Viceversa, ogni riferimento locale di sezioni olomorfe definisce una banalizzazione locale di E

$$\begin{aligned} \varphi_U : E|_U &\to U \times \mathbb{C}^k \\ v_p &\to (p, v_1, \dots, v_k) \end{aligned}$$

dove $v_p = \sum_{i=1}^k v_i \sigma_i(p)$ è un elemento di E_p.
Sia $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ un riferimento di sezioni olomorfe su U e $(\sigma'_1, \dots, \sigma'_k)$ un riferimento di sezioni olomorfe su V. Allora abbiamo due banalizzazioni locali (φ_U, U) e (φ_V, V) definite come sopra. Bisogna mostrare che le funzioni di transizione associate sono olomorfe. Sia $v \in E_p|_{U\cap V} \to v = \sum_{i=1}^k w_i \sigma'_i(p) = \sum_{i=1}^k v_i \sigma_i(p)$. Sia $\sigma_i = \sum_{j=1}^k g_{ij} \sigma'_j$ con (g_{ij}) matrice del cambio di riferimento $\Rightarrow$ $v = \sum_{i=1}^k v_i \sigma_i(p) = \sum_{i=1}^k v_i \left(\sum_{j=1}^k g_{ij} \sigma'_j(p) \right) = \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^k v_i g_{ij} \right) \sigma'_j(p) = \sum_{j=1}^k w_j \sigma'_j(p)$.
Dunque:

$$\begin{aligned} \varphi_V \circ \varphi_U^{-1} : (U \cap V) \times \mathbb{C}^k &\to (U \cap V) \times \mathbb{C}^k \\ (p, v_1, \dots, v_k) &\to (p, (w_1, \dots, w_k)) \\ &= (p, g_{VU}(p)(v_1, \dots, v_k)) \end{aligned}$$

con $g_{VU} = (g_{ji})$ funzioni C^∞ su U. Quindi:

$$0 = \overline{\partial}\sigma_i = \overline{\partial}\left(\sum_{j=1}^{k} g_{ij}\sigma'_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \overline{\partial}g_{ij} \otimes \sigma'_j + \sum_{j=1}^{k} g_{ij}\overline{\partial}\sigma'_j$$

ma $\overline{\partial}\sigma'_j = 0, \forall j = 1, \dots, k$ per ipotesi. Allora $\sum_{j=1}^{k} \overline{\partial}g_{ij} \otimes \sigma'_j = 0$ con $\{\sigma'_j\}$ base locale. Pertanto $\overline{\partial}g_{ij} = 0$, $\forall i, j = 1, \dots, k$. □

Lemma 4.2. *Sia $\tau := (\tau_{ij})$ una matrice di $(0,1)-$forme su U tali che $\overline{\partial}\tau_{ij} = \sum_{l=1}^{k} \tau_{il} \wedge \tau_{lj}, \forall 1 \leq i, j \leq k$, o, equivalentemente $\overline{\partial}\tau = \tau \wedge \tau$. Allora $\forall p \in M$, varietà complessa di dimensione m, esiste un aperto $U' \subset U$ contenente p e un'applicazione $f = (f_{ij}) : U' \to GL(k, \mathbb{C})$ tale che $\overline{\partial}f_{ij} + \sum_{l=1}^{k} f_{il}\tau_{lj} = 0, \forall 1 \leq i, j \leq k$ o,equivalentemente $\overline{\partial}f + f\tau = 0$.*

Dimostrazione. Definiamo una struttura quasi complessa su $N = U \times \mathbb{C}^k$. Dato che M è una varietà complessa di dimensione m su $\mathbb{C}$, possiamo supporre che U sia un aperto di $\mathbb{C}^m$ con coordinate olomorfe $(z_1, \dots, z_m)$ e indichiamo con $(w_1, \dots, w_k)$ le coordinate su $\mathbb{C}^k$. È noto che, se T è un sottofibrato complesso di $\Lambda^1_{\mathbb{C}}N$ tale che $T \oplus \Lambda^1 N = \Lambda^1_{\mathbb{C}}N$, allora esiste un'unica struttura quasi complessa J su N tale che $T = \Lambda^{1,0}N$ rispetto a J, cioè

$$T = \{\omega - iJ\omega | \omega \in \Gamma(\Lambda^1 N)\} = \{\xi \in \Lambda^1_{\mathbb{C}}N | \xi(Z) = 0, \forall Z \in \Gamma(T^{0,1}N)\}.$$

Scegliamo T il sottofibrato di $\Lambda^1_{\mathbb{C}}N$ generato dalle $1-$forme seguenti:

$$\{dz_\alpha, dw_i - \sum_{l=1}^{k} \tau_{il}w_l | 1 \leq \alpha \leq m, 1 \leq i \leq k\}$$

e sia J l'unica struttura quasi complessa tale che $T = \Lambda^{1,0}N$. Mostriamo che $T^{0,1}N$, costruito usando J, è integrabile o, equivalentemente, che

$$d\Gamma(T) = d\Gamma(\Lambda^{1,0}N) \subseteq \Gamma(\Lambda^{2,0}N) \oplus \Gamma(\Lambda^{1,1}N) = \Gamma(T \wedge \Lambda^1_{\mathbb{C}}N)$$

È sufficiente dimostrarlo sulla base locale che definisce T. Vale che:

a) $d(dz_\alpha) = d^2 z_\alpha = 0$;

b) $d(dw_i - \sum_{l=1}^{k} \tau_{il}w_l) = d^2 w_i - \sum_{l=1}^{k} d(\tau_{il}w_l)$
$= -\sum_{l=1}^{k} w_l d(\tau_{il}) + \sum_{l=1}^{k} \tau_{il} \wedge dw_l$
$= \sum_{l=1}^{k}(-w_l\partial\tau_{il} - w_l\overline{\partial}\tau_{il} + \tau_{il} \wedge dw_l)$
$= \sum_{l=1}^{k} \left(-w_l\partial\tau_{il} - w_l \sum_{s=1}^{k} \tau_{is} \wedge \tau_{sl} + \tau_{il} \wedge dw_l\right)$
$= -\sum_{l=1}^{k} \partial\tau_{il}w_l - \sum_{l,s=1}^{k} \tau_{is} \wedge \tau_{sl}w_l + \sum_{s=1}^{k} \tau_{is} \wedge dw_s$
$= \sum_{l=1}^{k} -\partial\tau_{il}w_l + \sum_{s=1}^{k} \tau_{is} \wedge \left(dw_s - \sum_{l=1}^{k} \tau_{sl}w_l\right)$
che è una sezione di $T \wedge \Lambda^1_{\mathbb{C}}N$.

Per il teorema di Newlander-Niremberg possiamo completare la famiglia $\{z_\alpha\}$ ad un sistema di coordinate locali olomorfe su $U' \times \mathbb{C}^k$, con U' un intorno di p contenuto in U. Poichè $du_l \in \Gamma(T) = \Gamma(\Lambda^{1,0}N)$, esistono funzioni F_{li} e $F_{l\alpha}$ per $1 \leq i, l \leq k, 1 \leq \alpha \leq m, C^\infty$ su $U' \times \mathbb{C}^k$ tali che

$$du_l = \sum_{i,s=1}^{k} F_{li}(dw_i - \tau_{is}w_s) + \sum_{\alpha=1}^{m} F_{l\alpha} dz_\alpha.$$

Applichiamo d:

$$\begin{aligned}
0 = d^2 u_l &= d\left(\sum_{i,s=1}^{k} F_{li}\left(dw_i - \tau_{is}w_s\right)\right) + d\left(\sum_{\alpha=1}^{m} F_{l\alpha} dz_\alpha\right) \\
&= \sum_{i,s=1}^{k} dF_{li} \wedge (dw_i - \tau_{is}w_s) - \sum_{i,s=1}^{k} F_{li} d(\tau_{is}) w_s \\
&+ \sum_{i,s=1}^{k} F_{li}\tau_{is} \wedge dw_s + \sum_{\alpha=1}^{m} dF_{l\alpha} \wedge dz_\alpha \\
&= \sum_{i,s=1}^{k} dF_{li} \wedge (dw_i - \tau_{is}w_s) \\
&+ \sum_{i=1}^{k} F_{li}\left(\sum_{s=1}^{k} -d\tau_{is}w_s + \tau_{is} \wedge dw_s\right) \\
&+ \sum_{\alpha=1}^{m} dF_{l\alpha} \wedge dz_\alpha.
\end{aligned}$$

Poniamo $w_i = 0, i = 1, \ldots, k$ e calcoliamo in $(z, 0)$:

$$0 = \sum_{i=1}^{k}\left(dF_{li}(z,0) + \sum_{s=1}^{k} F_{ls}(z,0)\tau_{si}\right) \wedge dw_i + \sum_{\alpha=1}^{m} dF_{l\alpha} \wedge dz_\alpha.$$

Posto $f_{li}(z) := F_{li}(z, 0)$, abbiamo che $f_{li} \in C^\infty(U', \mathbb{C})$ e la $\Lambda^{0,1}U'$ parte di $dF_{li}(z, 0)$ è proprio $\overline{\partial} f_{li}$. Dal fatto che la componente $\Lambda^{0,1}U' \otimes \Lambda^{1,0}\mathbb{C}^k$ è nulla, otteniamo che

$$0 = \overline{\partial} f_{li}(z) + \sum_{s=1}^{k} f_{ls}(z)\tau_{si}, \quad \forall i, l = 1, \ldots, k$$

ovvero $\overline{\partial} f + f\tau = 0$. □

Possiamo dunque enunciare il seguente:

Teorema 4.3. *Sia $\xi = (E, \pi, M)$ un fibrato vettoriale complesso. ξ è olomorfo se e solo se ha una struttura olomorfa.*

Dimostrazione.
($\Rightarrow$) Sia ξ un fibrato olomorfo. Allora possiamo considerare l'operatore $\overline{\partial}$ definito precedentemente sulle sezioni. Abbiamo già dimostrato che soddisfa Leibniz e che $\overline{\partial}^2 = 0$. Dunque $\overline{\partial}$ è una struttura olomorfa.
($\Leftarrow$) Sia $\overline{\partial}$ una struttura olomorfa. Per dimostrare la tesi, in base al Lemma 1, è sufficiente mostrare che $\forall p \in M$, esiste un intorno aperto U di p e un riferimento di E su U composto da sezioni olomorfe. Sia $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ un riferimento locale per E sull'aperto U di p. Definiamo delle $(0,1)-$forme su E nel seguente modo:

$$\overline{\partial}\sigma_i := \sum_{j=1}^{k} \tau_{ij} \otimes \sigma_j$$

con τ_{ij} $(0,1)-$forme su U. Allora, dalle proprietà di cui gode una struttura olomorfa abbiamo:

$$\begin{aligned}
0 = \overline{\partial}^2\sigma_i = \overline{\partial}(\partial\sigma_i) &= \overline{\partial}\left(\sum_{j=1}^{k} \tau_{ij} \otimes \sigma_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \overline{\partial}\tau_{ij} \otimes \sigma_j - \sum_{j=1}^{k} \tau_{ij} \wedge \overline{\partial}\sigma_j \\
&= \sum_{j=1}^{k} \overline{\partial}\tau_{ij} \otimes \sigma_j - \sum_{j=1}^{k} \tau_{ij} \wedge \left(\sum_{l=1}^{k} \tau_{jl} \otimes \sigma_l\right) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \overline{\partial}\tau_{ij} \otimes \sigma_j - \sum_{j,l=1}^{k} (\tau_{ij} \wedge \tau_{jl}) \otimes \sigma_l \\
&= \sum_{j=1}^{k} \overline{\partial}\tau_{ij} \otimes \sigma_j - \sum_{l,j=1}^{k} (\tau_{il} \wedge \tau_{lj}) \otimes \sigma_j \\
&= \sum_{j=1}^{k} \left(\overline{\partial}\tau_{ij} - \sum_{l=1}^{k} \tau_{il} \wedge \tau_{lj}\right) \otimes \sigma_j.
\end{aligned}$$

Dunque $\overline{\partial}\tau_{ij} = \sum_{l=1}^{k} \tau_{il} \wedge \tau_{lj}$, $\forall 1 \leq i, j \leq k$.
Supponiamo ora di poter trovare un'applicazione

$$\begin{aligned}
f : U' &\to gl(k, \mathbb{C}) \\
p &\to f_p = (f_{ij}(p)),
\end{aligned}$$

con $f = (f_{ij}) \in C^\infty(U', \mathbb{C})$, tale che $0 = \overline{\partial} f_{ij} + \sum_{l=1}^k f_{il}\tau_{lj}, \forall 1 \leq i, j \leq k$. Una tale applicazione esiste per il Lemma 2. Dimostriamo che le sezioni locali $\{s_1, \dots, s_k\}$ così definite:

$$s_i := \sum_{l=1}^k f_{il}\sigma_l,$$

sono olomorfe. Infatti si ha:

$$\begin{aligned}
\overline{\partial} s_i = \overline{\partial}\left(\sum_{l=1}^k f_{il}\sigma_l\right) &= \sum_{l=1}^k \overline{\partial} f_{il} \otimes \sigma_l + \sum_{l=1}^k f_{il} \wedge \overline{\partial}\sigma_l \\
&= \sum_{l=1}^k \left(\bar{\partial} f_{il} \otimes \sigma_l + \sum_{j=1}^k f_{il}\tau_{lj} \otimes \sigma_j\right) \\
&= \sum_{l=1}^k \left(\overline{\partial} f_{il} \otimes \sigma_l\right) + \sum_{j,l=1}^k \left(f_{ij}\tau_{jl} \otimes \sigma_l\right) \\
&= \sum_{l=1}^k \left[\overline{\partial} f_{il} + \sum_{j=1}^k f_{ij}\tau_{jl}\right] \otimes \sigma_l \\
&= 0.
\end{aligned}$$

La tesi segue, pertanto, dal Lemma 1. □

5 Isomorfismo tra fibrati su $\mathbb{CP}^m$

Definizione 7. Siano M, M' due varietà. Sia E un fibrato su M ed E' un fibrato su M'. Un *morfismo* tra fibrati è una coppia (f, φ) di mappe tali che $f : M \to M'$, $\varphi : E \to E'$ sono mappe C^∞ e $\pi_{E'} \circ \varphi = f \circ \pi_E$. Se le mappe f, φ sono diffeomorfismi, i due fibrati si dicono *equivalenti*. Se $M = M'$, diremo che due fibrati su M sono equivalenti se esiste una equivalenza di fibrati (f, φ) con $f = Id_M$.

Osservazione 3. Osserviamo che, per definizione, se due fibrati E, E' sono equivalenti, le loro fibre sono diffeomorfe (essendo il diffeomorfismo dato dalla restrizione alla fibra del diffeomorfismo tra E ed E').

Proposizione 5.1. *Sia M una varietà, E un fibrato su M e $\{U_\alpha, \varphi_\alpha^E\}$ un atlante trivializzante di E con funzioni di transizione $\{g_{\alpha\beta}\}$. Sia E' un altro fibrato su M con atlante trivializzante $\{U_\alpha, \varphi_\alpha^{E'}\}$ e funzioni di transizione $\{h_{\alpha\beta}\}$. Una mappa $\psi : E \to E'$ è un'equivalenza tra fibrati se, $\forall \alpha$, posto*

$\psi_\alpha := (\psi'_\alpha, \psi''_\alpha) := \varphi_\alpha^{E'} \circ \psi \circ (\varphi_\alpha^E)^{-1} : U_\alpha \times V \to U_\alpha \times V'$, *risulta* $\psi_\alpha = Id$ *e, per ogni* α, β *tali che* $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ *si ha:*

$$\psi''_\beta(p, v) = h_{\beta\alpha}(p)\psi''_\alpha(p, g_{\alpha\beta}(p)v). \tag{1}$$

Viceversa, se esiste una famiglia $\{\psi_\alpha = (\psi'_\alpha, \psi''_\alpha)\}$ *di mappe lisce da* $U_\alpha \times V \to U_\alpha \times V'$ *tali che* $\psi'_\alpha = Id$ *e che soddisfano la* (1) *e tali che,* $\forall p$ *fissato,* $\psi''_\alpha(p, \cdot)$ *è un diffeomorfismo, allora* $\exists \psi$ *equivalenza tra fibrati tale che* $\psi_\alpha = \varphi_\alpha^{E'} \circ \psi \circ (\varphi_\alpha^E)^{-1}$ *per ogni* α.

Dimostrazione.
($\Rightarrow$) Sia $(p, v) \in U \times V$ e si consideri la composizione ψ_α definita da:

$$U_\alpha \times V \overset{(\varphi_\alpha^E)^{-1}}{\to} \pi_E^{-1}(U_\alpha) \overset{\psi}{\to} \pi_{E'}^{-1}(U_\alpha) \overset{\varphi_\alpha^{E'}}{\to} U_\alpha \times V',$$

dove ψ è un'equivalenza tra fibrati, quindi è un diffeomorfismo. Allora:

$$\begin{aligned} \psi_\beta &= \varphi_\beta^{E'} \circ \psi \circ (\varphi_\beta^E)^{-1} \\ &= \varphi_\beta^{E'} \circ (\varphi_\alpha^{E'})^{-1} \circ \varphi_\alpha^{E'} \circ \psi \circ (\varphi_\alpha^E)^{-1} \circ \varphi_\alpha^E \circ (\varphi_\beta^E)^{-1} \\ &= h_{\beta\alpha} \circ \psi_\alpha \circ g_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

che sono proprio la (1).
($\Leftarrow$) Viceversa, la (1) è una relazione che consente di incollare le $\{\psi_\alpha\}$ ad una equivalenza tra fibrati. □

Corollario 5.2. *Siano* E, E' *due fibrati olomorfi di rango uno su una varietà complessa* M*. Supponiamo che* E *ed* E' *abbiano funzioni di transizione* $\{g_{\alpha\beta}\}$ *e* $\{g'_{\alpha\beta}\}$ *rispettivamente. Allora esiste un isomorfismo di fibrati vettoriali* $f : E \to E'$ *se e solo se* $\forall \alpha$ *esistono* $f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^*$ *olomorfe tali che:*

$$\left. \frac{f_\beta}{f_\alpha} \right|_{U_\alpha \cap U_\beta} = \frac{g_{\alpha\beta}}{g'_{\alpha\beta}} \quad \forall \alpha, \beta.$$

Le $f_\alpha : \varphi_\alpha^{-1}(E|_{U_\alpha}) \to \varphi'_\alpha(E|_{U_\alpha})$ *sono date da* $\varphi'_\alpha \circ f \circ (\varphi_\alpha)^{-1}$*, essendo* $\varphi_\alpha, \varphi'_\alpha$ *le funzioni di banalizzazione locale di* E *ed* E'.

Dimostrazione. Segue direttamente dalla Proposizione 5.1. □

Definizione 8. Sia (M, J) una varietà complessa di dimensione m. Chiamiamo *fibrato canonico* di M, $K_M := \Lambda^{m,0}M$.

Osservazione 4. K_M è un fibrato vettoriale olomorfo (vedi esempi)

Sia $M = \mathbb{CP}^m$. Oltre a K_M possiamo definire il *fibrato tautologico in rette* τ di $\mathbb{CP}^m$ in questo modo:

$$\tau = (L, \pi, \mathbb{CP}^m),$$

con $\pi : L \to \mathbb{CP}^m$, $L = \bigcup_{[z]\in\mathbb{CP}^m} L_{[z]}$, dove $L_{[z]} := \pi^{-1}([z])$ è la retta complessa su cui giace z in $\mathbb{C}^{m+1}$, ovvero $< z >$. Mostriamo che τ è un fibrato vettoriale olomorfo su $\mathbb{CP}^m$. Fissato un atlante olomorfo $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$ su $\mathbb{CP}^m$, siano

$$\begin{array}{rcl} \psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) & \to & U_\alpha \times \mathbb{C} \\ \tilde{w} & \to & ([z], \tilde{w}_\alpha) \end{array}$$

le banalizzazioni locali di τ, dove $p = [z]$. Su $U_\alpha \cap U_\beta$ abbiamo:

$$\begin{array}{rcl} \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{C} & \to & U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{C} \\ ([z], \lambda) & \to & ([z], g_{\alpha\beta}([z])\lambda) \end{array}$$

con $0 \leq \alpha, \beta \leq m$ dove:

$$\begin{array}{rcl} \psi_\beta^{-1}([z], \lambda) & = & \left([z], \tilde{w} = \left(\frac{z_0}{z_\beta}\lambda, \frac{z_1}{z_\beta}\lambda, \ldots, \frac{\hat{z_\beta}}{z_\beta}\lambda, \ldots, \frac{z_m}{z_\beta}\lambda\right)\right) \\ & = & \left([z], \tilde{w} = \lambda\frac{z}{z_\beta}\right) \\ & \Rightarrow & \psi_\alpha([z], \tilde{w}) = ([z], \frac{z_\alpha}{z_\beta}\lambda) \\ & \Rightarrow & g_{\alpha\beta}([z]) = \frac{z_\alpha}{z_\beta} \end{array}$$

olomorfe in $U_\alpha \cap U_\beta$.

Proposizione 5.3. *Il fibrato canonico di $\mathbb{CP}^m$ è isomorfo all' $(m+1)-$esima potenza del fibrato tautologico τ, ovvero:*

$$K_{\mathbb{CP}^m} \cong \tau^{m+1}$$

Dimostrazione. Sia $E = \Lambda^{m,0}\mathbb{CP}^m, M = \mathbb{CP}^m$ e

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^m$$

carta locale con

$$d\varphi_\alpha : TU_\alpha \to T\mathbb{C}^m \cong \mathbb{C}^{2m}$$

Siano $(w_1, \ldots, w_m)$ coordinate su $\mathbb{CP}^m$

$$\Rightarrow \quad \omega := dw_1 \wedge \cdots \wedge dw_m \in \Lambda^{m,0}M = \Lambda^{m,0}\mathbb{CP}^m$$

$$\Rightarrow \Lambda^{m,0}((\varphi_\alpha^*)^{-1}) : \Lambda^{m,0}\mathbb{CP}^m \to U_\alpha \times \Lambda^{m,0}\mathbb{C}^m$$
$$\omega_p \to \omega(d\varphi_\alpha^{-1}(Y_1), \dots, d\varphi_\alpha^{-1}(Y_m))$$

dove $Y_i \in \chi(\mathbb{C}^m)$.
Sia ora $\Phi_\alpha = \Lambda^{m,0}((\varphi_\alpha^*)^{-1})$

$$\Rightarrow h_{\alpha\beta} = \Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \Lambda^{m,0}\mathbb{C}^m \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times \Lambda^{m,0}\mathbb{C}^m$$
$$(p, db_0 \wedge \cdots \wedge db_m) \to (p, da_0 \wedge \cdots \wedge da_m),$$

avendo fissato coordinate olomorfe:
$a_i = z_i/z_\alpha$ in $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ per $i = \{0, \dots, m\} \setminus \{\alpha\}$
$b_i = z_i/z_\beta$ in (U_β, φ_β) per $i = \{0, \dots, , m\} \setminus \{\beta\}$.

Ma $a_\beta b_\alpha = \frac{z_\beta}{z_\alpha}\frac{z_\alpha}{z_\beta} = 1 \Rightarrow a_\beta = \frac{1}{b_\alpha}$
e $\forall i \neq \alpha, \beta \quad a_i = b_i a_\beta \Rightarrow$
$da_\beta = -\left(\frac{1}{b_\alpha}\right)^2 db_\alpha = -a_\beta^2 db_\alpha$ e $da_i = a_\beta db_i + b_i da_\beta$ per $i \neq \alpha, \beta$.
Ne segue che:

$$\begin{aligned} & da_0 \wedge \cdots \wedge da_{\alpha-1} \wedge da_{\alpha+1} \wedge \cdots \wedge da_m \\ & = (-1)^{\alpha-\beta} a_\beta^{m+1} db_0 \wedge \dots db_{\beta-1} \wedge db_{\beta+1} \wedge \cdots \wedge db_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow h_{\alpha\beta} = (-1)^{\alpha-\beta} a_\beta^{-m-1} &= (-1)^{\alpha-\beta}\left(\frac{z_\beta}{z_\alpha}\right)^{-m-1} \\ &= (-1)^{\alpha-\beta}\left(\frac{z_\alpha}{z_\beta}\right)^{m+1} \\ &= (-1)^{\alpha-\beta}(g_{\alpha\beta})^{m+1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c_\alpha h_{\alpha\beta} c_\beta^{-1} = (g_{\alpha\beta})^{m+1}$$

dove si è posto $c_\alpha = (-1)^\alpha$ e $c_\beta = (-1)^\beta$. La tesi segue dal Corollario precedente. □

6 Fibrati vettoriali hermitiani

Definizione 9. Sia E un fibrato vettoriale complesso di rango k sulla varietà complessa M. Una *struttura hermitiana* h su E è un campo C^∞ di prodotti scalari hermitiani sulle fibre di E, cioè $\forall p \in M$ l'applicazione $h : E_p \times E_p \to \mathbb{C}$ soddisfa:

$$h(u, v) \text{ è } \mathbb{C}\text{-lineare in } u \text{ per ogni } v \text{ fissato in } E_p; \tag{2}$$

$$h(u,v) = \overline{h(v,u)}, \quad \forall u, v \in E_p; \tag{3}$$

$$h(u,u) \geq 0, \quad \forall u \in E_p \setminus \{0\}; \tag{4}$$

$$\text{L'applicazione} \begin{array}{c} M \to \mathbb{C} \\ p \mapsto h_p(u(p), v(p)) \end{array} \text{ è } C^\infty \text{ in } p, \forall u, v \in E_p. \tag{5}$$

Definizione 10. Un fibrato vettoriale complesso dotato di una struttura hermitiana è detto *fibrato vettoriale hermitiano.*

Osservazione 5. Vale la seguente

$$h(u, \alpha v) = \bar{\alpha} h(u,v), \quad \alpha \in \mathbb{C};$$

infatti

$$h(u, \alpha v) = \overline{h(\alpha v, u)} = \bar{\alpha}\overline{h(v,u)} = \bar{\alpha} h(u,v).$$

Dunque possiamo vedere h come un isomorfismo $\mathbb{C}$-antilineare $\begin{array}{c} h : E \to E^* \\ v \mapsto h(-,v) \end{array}$, dato che è un prodotto scalare non degenere.

Teorema 6.1. *Ogni fibrato vettoriale complesso ammette una struttura hermitiana.*

Dimostrazione. Sia $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$ una banalizzazione locale del fibrato ξ

$$\psi_\alpha : \begin{array}{c} E|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{C}^k \\ (p,u) \mapsto (p, \psi_\alpha(p,u)) \end{array}$$

e $\{\rho_\alpha\}$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$.
Ricordiamo che
i) $\rho_\alpha \in C^\infty(M)$,
ii) $\sum_\alpha \rho_\alpha(p) = 1$,
iii) $\rho_\alpha(p) \geq 0 \quad \forall p \in M$,
iv) $\operatorname{supp} \rho_\alpha \subset U_\alpha$.
Per ogni $p \in M$ e $u, v \in E_p$ definiamo

$$h_{\alpha,p}(u,v) :=< \psi_\alpha(p,u), \psi_\alpha(p,v) >= \overline{\psi_\alpha(p,v)}^t \cdot \psi_\alpha(p,u)$$

e

$$h(u,v) = h_p(u,v) := \sum_{U_\alpha \in \mathcal{U}} \rho_\alpha(p) h_{\alpha,p}(u,v).$$

Mostriamo che tale h è una metrica hermitiana su ξ: infatti la (2) e la (3) discendono dalle proprietà del prodotto hermitiano in $\mathbb{C}^k$. La (4) discende dalle proprietà della partizione dell'unità ed infine $p \mapsto h_p$ è C^∞ perché

$$h_p(u,v) = \sum_{U_\alpha \in \mathcal{U}} \rho_\alpha(p) h_{\alpha,p}(u,v) = \sum_{U_\alpha \in \mathcal{U}} \rho_\alpha(p) \overline{\psi_\alpha(p,v)}^t \cdot \psi_\alpha(p,u)$$

e le ρ_α e le ψ_α sono funzioni C^∞. $\square$

Esempio 1. Se (M,g) è una varietà hermitiana con struttura hermitiana g, allora il fibrato tangente, il fibrato cotangente ed il fibrato delle (p,q)-forme sono hermitiani con una naturale struttura ereditata.
$(TM_{\mathbb{C}}, g)$ lo è per definizione di varietà hermitiana.
Vediamo la struttura hermitiana di $T^*M_{\mathbb{C}}$: sappiamo che $\forall \alpha \in \Gamma(T^*M_{\mathbb{C}})$ $\exists u \in \Gamma(TM_{\mathbb{C}})$: $\alpha(v) = g(v,u)$. Definiamo

$$\begin{array}{rcl} T_p^*M_{\mathbb{C}} \times T_p^*M_{\mathbb{C}} & \to & \mathbb{C} \\ (\alpha,\beta) & \mapsto & <\alpha,\beta> := g(u,v) \end{array}$$

con u,v le controimmagini nell'isomorfismo

$$\begin{array}{rcl} T_pM_{\mathbb{C}} & \to & T_p^*M_{\mathbb{C}} \\ u & \mapsto & g(v,u). \end{array}$$

Dunque $(T^*M_{\mathbb{C}}, <,>)$ è un fibrato hermitiano.
Possiamo estendere questa struttura hermitiana sul fibrato $\Lambda^{p,q}M$:
se

$$\alpha, \beta \in \Lambda^{p,q}M, \qquad \text{con } p+q=k,$$
$$\alpha = \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k,$$
$$\beta = \tau_1 \wedge \ldots \wedge \tau_k,$$

allora definiamo

$$<\alpha,\beta> := \det\left(<\omega_i, \tau_j>\right),$$

con $<\omega_i, \tau_j>$ prodotto hermitiano sopra definito.
Quindi $(\Lambda^{p,q}M, <,>)$ è un fibrato hermitiano.

Esempio 2. Se E, F sono fibrati con struttura hermitiana allora $E \oplus F$ ed $E \otimes F$ ereditano una naturale struttura hermitiana.

Esempio 3. Come conseguenza dei primi due esempi abbiamo che se (E,h) è un fibrato hermitiano su una varietà hermitiana (M,g), allora il fibrato $\Lambda^{p,q}(E) = \Lambda^{p,q}(M) \otimes E$ ha ereditata una naturale struttura hermitiana che denoteremo con $<,>$.

Definizione 11. Sia E un fibrato vettoriale complesso su M. *Una connessione* su E è un operatore differenziale $\mathbb{C}$-lineare $\nabla : \Gamma(E) \to \Omega^1(E)$ che soddisfa la regola di Leibniz:

$$\nabla(f\sigma) = df \otimes \sigma + f\nabla\sigma, \quad \forall f \in C^\infty(M), \, \forall \sigma \in \Gamma(E).$$

Osservazione 6. Ricordiamo che $\Lambda^1 M = \tau_M^*$ e che

$$\tau_M^* \otimes E \simeq \mathrm{Hom}(\tau_M, E),$$

dunque possiamo leggere la connessione come

$$\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma\left(\tau_M^* \otimes E\right) \equiv \Gamma\left(\mathrm{Hom}\left(\tau_M, E\right)\right)$$

e quindi, se $s \in \Gamma(E)$, $\nabla s \in \Gamma\left(\mathrm{Hom}\left(\tau_M, E\right)\right)$ ed abbiamo $\forall \vec{v}_p \in T_pM$ associata una sezione in E cosí definita:

$$\nabla_{\vec{v}_p} s := \left(\nabla s\right)\left(\vec{v}_p\right).$$

Possiamo estendere ∇ a $\Gamma\left(\Lambda^p(E)\right) = \Omega^p(E)$, cioè

$$\hat{\nabla} : \Omega^p(E) \to \Omega^{p+1}(E)$$

nel seguente modo:

$$\hat{\nabla}\left(\omega \otimes \sigma\right) = d\omega \otimes \sigma + (-1)^p \omega \wedge \nabla\sigma,$$

dove se $\{e_i\}$ è una base di TM ed $\{e_i^*\}$ la sua base duale, vale:

$$\omega \wedge \nabla\sigma = \sum_{i=1}^{n} \omega \wedge e_i^* \otimes \nabla_{e_i}\sigma.$$

Osservazione 7. Sia $\{s_1, ..., s_k\}$ un riferimento locale per il fibrato E, allora

$$\nabla s_i = \sum_{j=1}^{k} \omega_{ji} \otimes s_j, \quad \omega_{ji} \in \Omega^1(M),$$

ovvero localmente ad ogni connessione è associata una matrice di 1-forme locali $k \times k$ su M, $\omega = (\omega_{ij})$.

Definizione 12. Se (E, h) è un fibrato hermitiano su M e ∇ una connessione su E, si dice che ∇ è una *connessione compatibile* con la struttura hermitiana h (o *connessione hermitiana*) se

$$d\left(h(s_1, s_2)\right) = h\left(\nabla(s_1), s_2\right) + h\left(s_1, \nabla(s_2)\right).$$

Osservazione 8. La definizione ha senso poiché $h_p(s_1, s_2) \in C^\infty(M)$ per definizione di struttura hermitiana, e a destra invece intendiamo $h\left(\nabla(s_1), s_2\right)$ e $h\left(s_1, \nabla(s_2)\right)$ nel seguente modo:

$$\nabla(s_1) = \theta \otimes s \in \Omega^1(E),$$

$$h\left(\nabla(s_1), s_2\right) = h\left(\theta \otimes s, s_2\right) := h(s, s_2)\theta$$

e analogamente

$$h\left(s_1, \theta \otimes s\right) := h(s_1, s)\bar{\theta}.$$

Osservazione 9. Sia $\{s_1, ..., s_k\}$ un riferimento locale ortonormale per E, allora localmente la matrice del prodotto scalare $h = id$, e se ω è la matrice di una connessione ∇ hermitiana segue che

$$\begin{aligned} 0 &= d\,id = dh(s_i, s_j) = h(\nabla(s_i), s_j) + h(s_i, \nabla(s_j)) \\ &= h\left(\sum \omega_{ki} \otimes s_k, s_j\right) + h\left(s_i, \sum \omega_{hj} \otimes s_h\right) \\ &= \sum \omega_{ki} h(s_k, s_j) + \sum \bar{\omega}_{hj} h(s_i, s_h) = \omega_{ji} + \bar{\omega}_{ij} \end{aligned}$$

e quindi $\omega_{ij} = -\bar{\omega}_{ji}$ ovvero $\omega = -\bar{\omega}^t$, cioè la matrice della connessione è antihermitiana.

7 Curvatura

Definiamo ora il concetto di curvatura associata ad una connessione su un fibrato vettoriale.

Definizione 13. Si dice *curvatura* associata alla connessione ∇ su un fibrato vettoriale $\xi = (E, \pi, M)$ l'operatore

$$\begin{aligned} R^\nabla : \Gamma(E) &\to \Omega^2(E) \\ \sigma &\mapsto R^\nabla \sigma = \left(\hat{\nabla} \circ \nabla\right)\sigma \end{aligned}$$

dove con $\hat{\nabla} : \Omega^1(E) \to \Omega^2(E)$ indichiamo l'estensione di $\nabla : \Gamma(E) \to \Omega^1(E)$ che gode infatti della proprietà espressa dal seguente

Lemma 7.1. *Se $f \in C^\infty(M)$ ed $\eta \in \Omega^1(E)$, allora*

$$\hat{\nabla}(f\eta) = df \wedge \eta + f\hat{\nabla}\eta.$$

Dimostrazione. Se $\eta = \alpha \otimes \sigma \in \Omega^1(E)$ si ha:

$$\begin{aligned}
\hat{\nabla}(f\eta) &= \hat{\nabla}(f\alpha \otimes \sigma) = d(f\alpha) \otimes \sigma - f\alpha \wedge \nabla\sigma \\
&= df \wedge \alpha \otimes \sigma + fd\alpha \otimes \sigma - f\alpha \wedge \nabla\sigma \\
&= df \wedge \eta + f\,(d\alpha \otimes \sigma - \alpha \wedge \nabla\sigma) \\
&= df \wedge \eta + f\hat{\nabla}(\alpha \otimes \sigma) = df \wedge \eta + f\hat{\nabla}\eta.
\end{aligned}$$

□

Notazione: in ciò che segue con il simbolo ∇ indicheremo indistintamente una connessione e ogni sua naturale estensione a qualunque grado.

Osservazione 10. La curvatura può interpretarsi come una misura di quanto una data connessione ∇ sui fibrati si discosti dall'essere un differenziale.

Osservazione 11. R^∇ è lineare sulle funzioni $C^\infty(M)$.
Infatti, date $f \in C^\infty(M)$ e $\sigma \in \Gamma(E)$, si ha:

$$\begin{aligned}
R^\nabla(f\sigma) &= \nabla\left(\nabla(f\sigma)\right) = \nabla(df \otimes \sigma + f\nabla\sigma) = \nabla(df \otimes \sigma) + \nabla(f\nabla\sigma) \\
&= d^2 f \otimes \sigma - df \wedge \nabla\sigma + df \wedge \nabla\sigma + f\nabla(\nabla\sigma) = fR^\nabla\sigma,
\end{aligned}$$

e ciò mostra che la curvatura R^∇ è un tensore.

Osservazione 12. Se ω è la matrice di 1-forme associata ad una data connessione ∇, ed indichiamo con Ω la matrice di 2-forme associata alla curvatura R^∇, vediamo qual è il legame tra Ω ed ω.
Se $s = (s_1, ..., s_k)$ è il vettore riga che rappresenta un riferimento locale sul fibrato ξ, si ha:

$$\nabla s = \omega \otimes s = s\omega$$

da cui segue che

$$\begin{aligned}
\Omega \otimes s &= \nabla(\omega \otimes s) = d\omega \otimes s - \omega \wedge \nabla s = d\omega \otimes s - \omega \wedge (\omega \otimes s) \\
&= d\omega \otimes s - (\omega \wedge \omega) \otimes s = (d\omega - \omega \wedge \omega) \otimes s \\
&\Rightarrow \Omega = d\omega - \omega \wedge \omega.
\end{aligned}$$

8 Decomposizione di ∇

Data una varietà complessa M e un fibrato olomorfo ξ, sia ∇ una connessione su ξ.
Abbiamo precedentemente definito la struttura olomorfa

$$\bar{\partial}_E : \Gamma(E) \to \Omega^{0,1}(E),$$

e sappiamo inoltre che

$$\Omega^1(E) = \Omega^{1,0}(E) \oplus \Omega^{0,1}(E).$$

Possiamo decomporre la connessione ∇ in due connessioni nel modo seguente: se indichiamo con

$$\Pi^{1,0} : \Omega^1(E) \to \Omega^{1,0}(E)$$

e con

$$\Pi^{0,1} : \Omega_1(E) \to \Omega^{0,1}(E)$$

le proiezioni di $\Omega^1(E)$ rispettivamente sulle parti $\Omega^{0,1}(E)$ ed $\Omega^{1,0}(E)$, possiamo definire

$$\nabla^{1,0} := \Pi^{1,0} \circ \nabla : \Gamma(E) \to \Omega^{1,0}(E)$$
$$\nabla^{0,1} := \Pi^{0,1} \circ \nabla : \Gamma(E) \to \Omega^{0,1}(E)$$

e dunque $\nabla = \nabla^{1,0} \oplus \nabla^{0,1}$.

Osservazione 13. Tale decomposizione vale anche se E non è un fibrato vettoriale olomorfo, ma pseudo-olomorfo.
Da ciò segue che se $f \in C^\infty(M)$ ed $s \in \Gamma(E)$, allora:

$$\begin{aligned}
& \nabla^{1,0}(fs) + \nabla^{0,1}(fs) = \nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s \\
= \ & (\partial + \bar{\partial})(f) \otimes s + f(\nabla^{1,0} + \nabla^{0,1})(s) \\
= \ & \partial f \otimes s + f\nabla^{1,0}s + \bar{\partial} f \otimes s + f\nabla^{0,1}s \\
\Rightarrow \ & \begin{cases} \nabla^{1,0}(fs) = \partial f \otimes s + f\nabla^{1,0}s \\ \nabla^{0,1}(fs) = \bar{\partial} f \otimes s + f\nabla^{0,1}s \end{cases}
\end{aligned}$$

e perciò $\nabla^{0,1}$ rispetta la regola di Leibniz, vale a dire è una struttura pseudo-olomorfa su ξ.

Definizione 14. Una connessione ∇ su ξ si dice *compatibile con la struttura olomorfa* se $\nabla^{0,1} = \bar{\partial}$.

Osservazione 14. Per ogni sezione $\sigma \in \Gamma(E)$ possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
R^\nabla \sigma &= \nabla(\nabla\sigma) = \nabla((\nabla^{1,0} + \nabla^{0,1})\sigma) \\
&= (\nabla^{1,0})^2\sigma + (\nabla^{0,1})^2\sigma + (\nabla^{1,0}\nabla^{0,1}\sigma + \nabla^{0,1}\nabla^{1,0}\sigma),
\end{aligned}$$

da cui segue che la $(0,2)$-componente della curvatura R^∇ è data da:

$$(R^\nabla)^{(0,2)} = (\nabla^{0,1})^2.$$

Questo fatto ha una conseguenza importante: se $\xi = (E, \pi, M)$ è un fibrato complesso dotato di una connessione ∇ (e quindi con $\nabla^{0,1}$ struttura pseudo-olomorfa su ξ), ed inoltre $(R^{\nabla})^{(0,2)} = 0$, cioè $(\nabla^{0,1})^2 = 0$, $\nabla^{0,1}$ diventa una struttura olomorfa e quindi per il Teorema 4.3 ξ è un fibrato olomorfo.
Lo scopo che ora ci prefiggiamo è mostrare che, con l'aggiunta di opportune ipotesi sul fibrato ξ, vale in un certo senso il viceversa.
Prima di arrivare a dimostrare tale risultato abbiamo bisogno di qualche strumento e ciò è l'oggetto delle osservazioni e risultati che seguono immediatamente.

Osservazione 15. Determiniamo anzitutto un'espressione locale di ∇.
Sia $\nabla : \Gamma(E) \to \Omega^1(E)$ una connessione sul fibrato vettoriale ξ, ed $S = \{\sigma_1, ..., \sigma_k\}$ un riferimento locale su E. Se $u \in \Omega^0(E)$, allora $u = \sum_{i=1}^k u_i \sigma_i$, con $u_i \in C^\infty(M)$.
Sappiamo inoltre che $\nabla \sigma_i = \sum_{i=1}^k \omega_{ji} \otimes \sigma_j$, con $\omega_{ji} \in \Omega^1(M)$.
Applicando ∇ ad u otteniamo:

$$\begin{aligned}
\nabla u &= \nabla\left(\sum_{i=1}^k u_i\sigma_i\right) = \sum_{i=1}^k du_i \otimes \sigma_i + \sum_{i=1}^k u_i \nabla \sigma_i \\
&= \sum_{i=1}^k du_i \otimes \sigma_i + \sum_{i=1}^k u_i \sum_{j=1}^k \omega_{ji} \otimes \sigma_j \\
&= \sum_{i=1}^k \left(du_i + \sum_{j=1} k u_j \omega_{ij}\right) \otimes \sigma_i.
\end{aligned}$$

Scritta in forma matriciale, poiché l'uguaglianza vale per ogni u, l'ultima relazione diventa localmente

$$\nabla = d + \omega.$$

Vediamo ora un'importante condizione di compatibilità della ∇ con la metrica h.
Vale la seguente

Proposizione 8.1. *∇ è compatibile con $h \Leftrightarrow dh = h \cdot \omega + \bar{\omega}^t \cdot h$.*

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
(\Rightarrow)\ (dh)_{\alpha\beta} &= d(h(\sigma_\beta,\sigma_\alpha)) = h(\nabla\sigma_\beta,\sigma_\alpha) + h(\sigma_\beta,\nabla\sigma_\alpha)\\
&= h\left(\sum_j \omega_{j\beta}\otimes\sigma_j,\sigma_\alpha\right) + h\left(\sigma_\beta,\sum_j \omega_{j\alpha}\otimes\sigma_j\right)\\
&= \sum_j \omega_{j\beta}\cdot h_{\alpha j} + \sum_j \bar{\omega}_{j\alpha}\cdot h_{j\beta}\\
&= \sum_j \omega_{j\beta}\cdot h_{\alpha j} + \sum_j \bar{\omega}^t_{\alpha j}\cdot h_{j\beta}\\
&= (h\cdot\omega + \bar{\omega}^t\cdot h)_{\alpha\beta}.
\end{aligned}$$

Viceversa, se $s, t \in \Gamma(E)$, con

$$s = (s_1, ..., s_k) = \sum_i s_i \otimes \sigma_i,$$

e

$$t = (t_1, ..., t_k) = \sum_i t_i \otimes \sigma_i,$$

abbiamo:

$$\begin{aligned}
(\Leftarrow)\, dh(s,t) &= d(\bar{t}h^t\cdot h\cdot s) = (d\bar{t})^t\cdot h\cdot s + \bar{t}^t\cdot dh\cdot s + \bar{t}^t\cdot h\cdot ds\\
&= (d\bar{t})^t\cdot h\cdot s + \bar{t}^t\cdot(h\cdot\omega + \bar{\omega}^t\cdot h)\cdot s + \bar{t}^t\cdot h\cdot ds\\
&= (d\bar{t} + \overline{\omega t})^t\cdot h\cdot s + \bar{t}^t\cdot h(ds + \omega s)\\
&= (\overline{(d+\omega)t})^t\cdot h\cdot s + \bar{t}^t\cdot h((d+\omega)s)\\
&= \overline{\nabla t}^t\cdot h\cdot s + \bar{t}^t\cdot h\cdot\nabla s = h(s,\nabla t) + h(\nabla s, t).
\end{aligned}$$

□

Facciamo seguire due ultime osservazioni tecniche utili nel calcolo.

Osservazione 16 (Dipendenza della metrica dal riferimento). Se $S^\alpha = \{s_1^\alpha, ..., s_k^\alpha\}$ è un riferimento su U_α ed $S^\beta = \{s_1^\beta, ..., s_k^\beta\}$ un riferimento su U_β, sappiamo che in $U_\alpha \cap U_\beta$

$$s_i^\beta = \sum_l g_{li} s_l^\alpha$$

ed

$$s_j^\beta = \sum_m g_{mj} s_m^\alpha.$$

Allora

$$\begin{aligned}
(h_\beta)_{ij} &= h(s_j^\beta, s_i^\beta)h\left(\sum_m g_{mj}s_m^\alpha, \sum_l g_{li}s_l^\alpha\right)\\
&= \sum_{m,l} g_{mj}\bar{g}_{li}h(s_m^\alpha, s_l^\alpha) = \sum_{m,l} g_{mj}\bar{g}_{il}^t(h_\alpha)_{lm}\\
&= (\bar{g}^t \cdot h_\alpha \cdot g)_{ij}
\end{aligned}$$

e dunque

$$h_\beta = \bar{g}^t h_\alpha g.$$

Osservazione 17 (Dipendenza della matrice di connessione dal riferimento). Vediamo come varia la matrice di connessione al variare del riferimento locale. Se $S^\beta = S^\alpha g$ (convenzione: S^β ed S^α sono vettori riga), allora abbiamo

$$\begin{aligned}
S^\alpha g\omega_\beta &= S^\beta\omega_\beta = \nabla S^\beta = \nabla(S^\alpha g)\\
&= \nabla(g^t(S^\alpha)^t) = dg^t(S^\alpha)^t + g^t\nabla((S^\alpha)^t)\\
&= S^\alpha dg + g^t\omega_\alpha^t(S^\alpha)^t = S^\alpha dg + (\omega_\alpha g)^t(S^\alpha)^t\\
&= S^\alpha dg + S^\alpha\omega_\alpha g\\
&\Rightarrow S^\alpha g\omega_\beta = S^\alpha(dg + \omega_\alpha g)
\end{aligned}$$

e dunque

$$\omega_\beta = g^{-1}dg + g^{-1}\omega_\alpha g.$$

Possiamo ora enunciare la seguente significativa

Proposizione 8.2. *Sia (ξ, h) un fibrato vettoriale hermitiano. Allora esiste almeno una connessione ∇ su E compatibile con h.*

Dimostrazione. Sia $S = \{s_1, ..., s_k\}$ un riferimento locale ortonormale del fibrato (ξ, h), cioè $H = (H_{ij}) := h(s_j, s_i) = \delta_{ij}$.
Indichiamo poi con $\{U_\alpha\}$ un ricoprimento di M aperto e localmente finito tale che S^α sia un riferimento ortonormale per $\pi^{-1}(U_\alpha)$. Allora la matrice H associata ad h è localmente la matrice identità, $H = Id$ e, affinché ∇ sia una connessione compatibile con h, dobbiamo avere:

$$0 = d\,Id = dH = H \cdot \omega + \bar{\omega}^t \cdot H = \omega + \bar{\omega}^t,$$

ovvero la matrice ω di 1-forme di connessione è antihermitiana.
Una possibile scelta è rappresentata dalla matrice antihermitiana banale, cioè $\omega_\alpha = \omega(S^\alpha) = 0$.
In base all'osservazione 17 cambiando riferimento da S^α ad S^β si ha:

$$\omega_\beta = g^{-1}dg + g^{-1}\omega_\alpha g = g^{-1}dg$$

e ancora, in base all'osservazione 16

$$h_\beta = \bar{g}^t h_\alpha g = \bar{g}^t g.$$

Da ciò segue

$$\begin{aligned} dh_\beta &= d(\bar{g}^t g) = d\bar{g}^t \cdot g + \bar{g}^t \cdot dg \\ &= d\bar{g}^t (\bar{g}^t)^{-1} \cdot \bar{g}^t \cdot g + \bar{g}^t \cdot g \cdot g^{-1} \cdot dg \\ &= (\overline{g^{-1} \cdot dg})^t \cdot \bar{g}^t \cdot g + \bar{g}^t \cdot g^{-1} \cdot dg \\ &= \bar{\omega}_\beta^t \cdot h_\beta + h_\beta \cdot \omega_\beta, \end{aligned}$$

ovvero localmente le matrici di connessione sono compatibili con la metrica h.
Sia ora $\{\rho_\alpha\}$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{U_\alpha\}$ e definiamo su $E_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$ una connessione ∇_α nel seguente modo in coordinate:

$$\nabla_\alpha u = du + \omega_\alpha u = du, \quad \text{con } u \in \Gamma(E_\alpha).$$

Per costruzione ∇_α è una connessione compatibile con la metrica h su E_α.
Definendo $\nabla := \sum_\alpha \rho_\alpha \nabla_\alpha$, otteniamo una connessione su tutto lo spazio totale E ed inoltre $\forall u, v \in \Gamma(E)$ vale:

$$\begin{aligned} h(\nabla u, v) + h(u, \nabla v) &= \sum_\alpha [\rho_\alpha (h(\nabla_\alpha u, v) + h(u, \nabla_\alpha v))] \\ &= \sum_\alpha \rho_\alpha dh(u, v) = dh(u, v) \end{aligned}$$

cioè abbiamo costruito una connessione su E compatibile con h. □

Finalmente possiamo enunciare e dimostrare il risultato il seguente fondamentale

Teorema 8.3. *Sia ξ un fibrato vettoriale olomorfo con struttura olomorfa $\bar{\partial}$ su una varietà complessa M e sia h una metrica hermitiana su ξ. Allora esiste un'unica connessione ∇ su ξ compatibile con h e con la struttura olomorfa* ($\nabla^{0,1} = \bar{\partial}$).

Definizione 15. Tale connessione è detta *connessione di Chern* su ξ.

Dimostrazione. Sia $S^\alpha = \{s_1, ..., s_k\}$ un riferimento locale olomorfo su U_α.
Abbiamo già osservato che

$$\nabla = d + \omega = (\partial + \omega^{1,0}) + (\bar{\partial} + \omega^{0,1}),$$

dunque

$$\begin{aligned}\nabla^{1,0} &= \partial + \omega^{1,0}\\ \nabla^{0,1} &= \bar{\partial} + \omega^{0,1}.\end{aligned}$$

Dire che $\bar{\partial} = \nabla^{0,1}$ è perciò equivalente a dire che $\omega^{0,1} = 0$, ovvero ω è una matrice di $(1,0)$-forme su M.
Se ora ω_α è una matrice di $(1,0)$-forme su U_α, cioè $\omega_\alpha = \omega_\alpha^{1,0}$, affinché sia compatibile con la metrica deve valere:

$$\partial h_\alpha + \bar{\partial} h_\alpha = dh_\alpha = h_\alpha \cdot \omega_\alpha + \bar{\omega}_\alpha^t \cdot h_\alpha,$$

e dunque per la decomposizione di $\Omega^1(M)$ in $\Omega^{1,0}(M) \oplus \Omega^{0,1}(M)$, si ha:

$$\begin{aligned}\partial h_\alpha &= h_\alpha \cdot \omega_\alpha\\ \bar{\partial} h_\alpha &= \bar{\omega}_\alpha^t \cdot h_\alpha,\end{aligned}$$

ovvero

$$\omega_\alpha = h_\alpha^{-1} \cdot \partial h_\alpha.$$

Indichiamo ora con $\{\omega_\alpha\}$ una collezione di $(1,0)$-forme su M relative al ricoprimento U_α tali che $\omega_\alpha = h_\alpha^{-1} \cdot \partial h_\alpha$ e sia S^β un altro riferimento locale di sezioni olomorfe, con $S^\beta = S^\alpha g$.
Per quanto visto nell'osservazione 16 $h_\beta = \bar{g}^t \cdot h_\alpha \cdot g$, dunque

$$h_\beta^{-1} = g^{-1} \cdot h_\alpha^{-1} \cdot (\bar{g}^t)^{-1}.$$

Allora

$$\begin{aligned}g\omega_\beta &= g(h_\beta^{-1} \cdot \partial h_\beta) = \left(g\left(g^{-1} \cdot h_\alpha^{-1} \cdot (\bar{g}^t)^{-1} \cdot \partial\left(\bar{g}^t \cdot h_\alpha \cdot g\right)\right)\right)\\ &= h_\alpha^{-1} \cdot (\bar{g}^t)^{-1} \cdot \left(\partial^t \bar{g} \cdot h_\alpha \cdot g + \bar{g} \cdot \partial h_\alpha \cdot g + \bar{g}^t \cdot h_\alpha \cdot dg\right)\\ &= h_\alpha^{-1} \cdot (\bar{g}^t)^{-1} \cdot \bar{g}^t \cdot \partial h_\alpha g + h_\alpha^{-1} \cdot (\bar{g}^t)^{-1} \cdot \bar{g}^t \cdot h_\alpha \cdot dg\\ &= h_\alpha^{-1} \cdot \partial h_\alpha \cdot g + dg = \omega_\alpha \cdot g + dg \partial^t \bar{g} = \overline{\bar{\partial}^t g} = 0\end{aligned}$$

dal momento che

$$\partial^t \bar{g} = \overline{\bar{\partial}^t g} = 0,$$

essendo g un cambiamento di riferimento olomorfo e

$$dg = \partial g.$$

Dunque

$$\omega_\beta = g^{-1} \cdot dg + g^{-1} \cdot \omega_\alpha \cdot g,$$

ovvero le matrici $\{\omega_\alpha\}$ definiscono una connessione globale su E che è compatibile con la metrica e con la struttura olomorfa.
L'unicità di ∇ è data dalla costruzione fatta. $\square$

9 Esempi di curvatura

1) Curvatura di una connessione ∇ su un fibrato banale (E, π, M), cioè

$$(E, \pi, M) \simeq (M \times \mathbb{C}^k, \pi', M).$$

Se su tale fibrato consideriamo la connessione banale, cioè $\nabla = d$, allora $R^\nabla = R^d = 0$.
Ogni altra connessione è della forma $\nabla = d + \omega$, con ω matrice di 1-forme. Un semplice calcolo (che abbiamo già eseguito in precedenza) mostra che in tal caso $R^\nabla = d\omega - \omega \wedge \omega$.

2) La curvatura di un fibrato in rette è data da $R^\nabla = d\omega$. In tal caso infatti il termine $\omega \wedge \omega = 0$ per motivi dimensionali.

Osservazione 18. Una qualunque connessione ∇ su un fibrato vettoriale ξ induce una naturale connessione su $\mathrm{End}(E)$ che denominiamo $\tilde{\nabla}$. In particolare tale nuova connessione può essere applicata alla curvatura R^∇ della connessione originaria sul fibrato vettoriale E.

La relazione tra la curvatura R^∇ di una connessione su un fibrato E e la connessione $\tilde{\nabla}$ di $\mathrm{End}(E)$ indotta è espressa dal seguente importante risultato:

Teorema 9.1 (Identità di Bianchi). *Se R^∇ è la curvatura di una connessione su un fibrato vettoriale E, allora*

$$\tilde{\nabla}(R^\nabla) = 0.$$

Osservazione 19. Questo risultato generalizza quanto visto a proposito delle importanti proprietà di simmetria del tensore di curvatura nel caso in cui ∇ sia la connessione di Levi-Civita ed R^∇ sia la curvatura di una varietà riemanniana associata.

Esempio 4. Per la connessione $\nabla = d + \omega$ sul fibrato banale, l'identità di Bianchi è data da:

$$\begin{aligned} d\Omega &= d(d\omega - \omega \wedge \omega) = dd\omega - d\omega \wedge \omega + \omega \wedge d\omega \\ &= (-\Omega - \omega \wedge \omega) \wedge \omega + \omega \wedge (\Omega + \omega \wedge \omega) \\ &= \omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \omega. \end{aligned}$$

La curvatura delle connessioni indotte su fibrati vettoriali nuovi costruiti a partire da vecchi fibrati possono essere espressi in termini della curvatura delle connessioni date associate ai vecchi fibrati nel modo espresso dalla seguente:

Proposizione 9.2. *Siano ξ_1, ξ_2 fibrati vettoriali su una varietà M equipaggiati con connessioni rispettive ∇_1 e ∇_2. Allora si ha:*
i) la curvatura della connessione indotta sulla somma diretta $\xi_1 \oplus \xi_2$ è data da:

$$R = R^{\nabla_1} \oplus R^{\nabla_2};$$

ii) sul prodotto tensoriale $\xi_1 \otimes \xi_2$ è data da:

$$R^{\nabla_1} \otimes 1 + 1 \otimes R^{\nabla_2};$$

iii) per la connessione indotta ∇^* sul fibrato duale ξ^* la curvatura è data da:

$$R^{\nabla^*} = \left(-R^{\nabla}\right)^t;$$

iv) la curvatura della connessione pullback $f^*\nabla$ di una connessione ∇ sotto l'azione di una mappa differenziabile $f : M \to N$ è data da:

$$R^{f^*\nabla} = f^* R^{\nabla}.$$

Dimostrazione. Come esempi verifichiamo la *ii*) e la *iv*).

ii) Se $\sigma_1 \in \Gamma(\xi_1)$ e $\sigma_2 \in \Gamma(\xi_2)$, e ∇ è la connessione indotta da ∇_1 e ∇_2 su $\xi_1 \otimes \xi_2$, si ha:

$$\begin{array}{rcl} R^{\nabla}(\sigma_1 \otimes \sigma_2) & = & \nabla(\nabla(\sigma_1 \otimes \sigma_2)) = \nabla\left(\nabla_1(\sigma_1) \otimes \sigma_2 + \sigma_1 \otimes \nabla(\sigma_2)\right) \\ & = & \nabla\left(\nabla_1(\sigma_1) \otimes \sigma_2\right) + \nabla\left(\sigma_1 \otimes \nabla_2(\sigma_2)\right) \\ & = & \nabla_1^2(\sigma_1) \otimes \sigma_2 - \nabla_1(\sigma_1) \otimes \nabla_2(\sigma_2) \\ & + & \nabla\sigma_1 \otimes \nabla\sigma_2 + \sigma_1 \otimes \nabla_2^2(\sigma_2) \\ & = & R^{\nabla_1}(\sigma_1) \otimes \sigma_2 + \sigma_1 \otimes R^{\nabla_2}(\sigma_2), \end{array}$$

cioè la tesi;

iv) Sappiamo che localmente una connessione ∇ su un fibrato vettoriale E può essere scritta come $d + \omega$.
Allora, ricordando che la matrice di curvatura $\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega$, se indichiamo con Ω^* la matrice di 2-forme associata alla curvatura

$$R^{f^*\nabla} = R^{f^*(d+\omega)} = R^{f^*d + f^*\omega} = R^{df^* + f^*\omega} = R^{d+f^*\omega},$$

otteniamo:

$$\Omega^* = d(f^*\omega) - f^*\omega \wedge f^*\omega = f^*(d\omega - \omega \wedge \omega) = f^*\Omega,$$

cioè

$$R^{f^*\nabla} = f^* R^{\nabla}.$$

□

Concludiamo lo studio della curvatura di una connessione su un fibrato vettoriale con una importante proposizione che riassume tutti i risultati sui fibrati hermitiani ed olomorfi fin qui analizzati:

Proposizione 9.3. *i) la curvatura di una connessione hermitiana ∇ che sia h-compatibile su un fibrato vettoriale hermitiano (E, h) soddisfa l'identità:*

$$h(R^{\nabla}s_1, s_2) + h(s_1, R^{\nabla}s_2) = 0;$$

ii) la curvatura R^{∇} di una connessione ∇ di un fibrato vettoriale olomorfo ξ su una varietà complessa M con $\nabla^{0,1} = \bar{\partial}$ non possiede la parte $(0, 2)$, cioè:

$$R^{\nabla} \in (\Omega^{2,0} \oplus \Omega^{1,1})(M, End(E)).$$

iii) Se $\xi = (E, \pi, M)$ è un fibrato olomorfo dotato di una struttura hermitiana h, allora la curvatura della connessione di Chern ∇ è di tipo $(1, 1)$, cioè:

$$R^{\nabla} \in \Omega^{1,1}_{R}(M, End(E, h)).$$

Dimostrazione. $i)$ Data la connessione $\nabla : \Omega^0(E) \to \Omega^1(E)$, che per ipotesi è compatibile con la metrica hermitiana, sappiamo che si estende ad una connessione $\nabla : \Omega^{k_i}(E) \to \Omega^{k_i+1}(E)$ ancora compatibile con la metrica h, che agisce sulle sezioni $s_i \in \Omega^{k_i}(E)$ nel modo seguente:

$$dh(s_i, s_j) = h(\nabla s_i, s_j) + (-1)^{k_i} h(s_i, \nabla s_j). \tag{6}$$

Ricordiamo infatti che, se α_1 ed α_2 sono delle forme locali sulla base M e t_1, t_2 sono sezioni di E, vale la seguente:

$$h(\alpha_1 \otimes t_1, \alpha_2 \otimes t_2) := (\alpha_1 \wedge \bar{\alpha}_2) h(t_1, t_2).$$

Da qui, prendendo in particolare s_1 ed s_2 in $\Gamma(E)$, utilizzando la (6) si ha:

$$dh(\nabla s_1, s_2) = h(\nabla^2 s_1, s_2) - h(\nabla s_1, \nabla s_2) = h(R^{\nabla}s_1, s_2) - h(\nabla s_1, \nabla s_2);$$

$$dh(s_1, \nabla s_2) = h(\nabla s_1, \nabla s_2) - h(s_1, \nabla^2 s_2) = h(\nabla s_1, \nabla s_2) - h(s_1, R^{\nabla}s_2).$$

D'altra parte, poiché ∇ è per ipotesi compatibile con la metrica h, si ha:

$$\begin{aligned} dh(\nabla s_1, s_2) + dh(s_1, \nabla s_2) &= d(h(\nabla s_1, s_2) + h(s_1, \nabla s_2)) \\ &= d(dh(s_1, s_2)) = d^2(s_1, s_2) = 0, \end{aligned}$$

da cui segue che

$$h(R^{\nabla}s_1, s_2) + h(s_1, R^{\nabla}s_2) = 0,$$

come richiesto.

ii) Possiamo ragionare come segue a livello globale: sappiamo che, se ∇ è una connessione su un fibrato olomorfo $\xi = (E, \pi, M)$, con M varietà complessa, è ben definito

$$\bar{\partial} = \bar{\partial}_E := \Gamma(E) = \Omega^0(E) \to \Omega^{0,1}(E),$$

con

$$\Omega^{0,1}(E) + \Omega^{1,0}(E) = \Omega^1(E)$$

e che ∇ si decompone in

$$\begin{aligned} \nabla^{1,0} &:= \Pi^{1,0} \circ \nabla, \quad \text{con } \nabla^{1,0} : \Omega^0(E) \to \Omega^{1,0}(E) \\ \nabla^{0,1} &:= \Pi^{0,1} \circ \nabla, \quad \text{con } \nabla^{0,1} : \Omega^0(E) \to \Omega^{0,1}(E). \end{aligned}$$

Per ipotesi sappiamo inoltre che $\nabla^{0,1} = \bar{\partial}$.
Allora si ha:

$$\begin{aligned} R^\nabla &= \nabla^2 = (\nabla^{1,0} + \nabla^{0,1})^2 = (\nabla^{1,0} + \bar{\partial})^2 \\ &= (\nabla^{1,0})^2 + \nabla^{1,0} \circ \bar{\partial} + \bar{\partial} \circ \nabla^{1,0} + \bar{\partial}^2 \end{aligned}$$

ed essendo $\bar{\partial}^2 = 0$ si ha:

$$R^\nabla(s) \in (\Omega^{2,0} \oplus \Omega^{1,1})(M, \mathrm{End}(M)), \ \forall s \in \Gamma(E).$$

Localmente, possiamo invece ragionare nel modo seguente: dal momento che $\nabla = d + \omega$, con $\omega = \omega^{1,0}$ (percé ciò è equivalente a dire che $\nabla^{0,1} = \bar{\partial}$), la matrice di curvatura è data da:

$$\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega = (\partial + \bar{\partial})\omega - \omega \wedge \omega = \bar{\partial}\omega + (\partial\omega - \omega \wedge \omega),$$

cioè Ω è somma di una $(1,1)$-forma e di una $(2,0)$-forma.

iii) Per l'ultimo punto combiniamo i risultati ottenuti in *i*) e *ii*).
Verifichiamo che R^∇ è di tipo $(1,1)$. Da quanto visto al punto *ii*) si ha:

$$h(\nabla^2 s_1, s_2) = h(\theta \otimes s_1, s_2) := h(s_1, s_2)\theta \in \Omega^{2,0}(M) \oplus \Omega^{1,1}(M),$$

perché la curvatura della connessione di Chern ∇ rientra nel caso visto al punto *ii*), mentre

$$\begin{aligned} h(s_1, \nabla^2 s_2) = h(s_1, \eta \otimes s_2) := h(s_1, s_2)\bar{\eta} &\in \bar{\Omega}^{2,0}(M) \oplus \bar{\Omega}^{1,1}(M) \\ &= \Omega^{1,1}(M) \oplus \Omega^{0,2}(M). \end{aligned}$$

Da *i*), cioè da

$$h(R^\nabla s_1, s_2) + h(s_1, R^\nabla s_2) = 0 \Rightarrow h(\nabla^2 s_1, s_2) = -h(s_1, \nabla^2 s_2)$$

e confrontando i gradi delle espressioni a primo e a secondo membro segue che necessariamente per tutte le sezioni $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$ deve essere nulla la parte di tipo $(2,0)$, cioè $R^\nabla = \nabla \circ \nabla$ deve essere necessariamente di tipo $(1,1)$. $\square$

10 Teoria di Hodge sui fibrati

Definizione 16. Sia (M,g) una varietá hermitiana di dimensione n. Negli esempi abbiamo visto che $\Lambda^{p,q}M$ ha una naturale struttura hermitiana $<,>$. Definiamo in maniera implicita l'operatore $\bar{*}$: $\forall \alpha, \beta \in \Gamma(\Lambda^{\infty}M)$

$$\alpha \wedge \bar{*}\beta = \alpha \wedge \overline{*\beta} = \alpha \wedge *\bar{\beta} =< \alpha, \beta > dV,$$

dove $dV \in \Lambda^{m,n}M$ è la forma di volume di M, e $*$ è l'operatore $*$ di Hodge.

Osservazione 20.

$$\mathrm{grad}(dV) = (n,n) \Rightarrow \mathrm{grad}(\alpha \wedge \bar{*}\beta) = (n,n)$$

e quindi se $\alpha, \beta \in \Lambda^{p,q}M$, che è l'unico caso in cui $< \alpha, \beta > \neq 0$, allora $\bar{*}\beta \in \Omega^{n-p,n-q}M$. Da ciò segue che

$$\bar{*} : \Omega^{p,q}M \to \Omega^{n-p,n-q}M$$

$$* : \Omega^{p,q}M \to \Omega^{n-q,n-p}M.$$

Osserviamo che $\bar{*}$ è un isomorfismo $\mathbb{C}$-antilineare e $*1 = \bar{*}1 = dV$ e che $\bar{*}\bar{*} = (-1)^{k(2n-k)} = (-1)^{p+q}$.

Definizione 17. Sia E un fibrato hermitiano con $<,>_E$ struttura hermitiana, possiamo definire su E un altro prodotto hermitiano:

$$<< u, v >>_E := \int_M < u(p), v(p) >_E dV = \int_M < u(p), v(p) >_E *1,$$

con $u, v \in \Gamma_0 = \{u \in \Gamma(E)$ a supporto compatto$\}$.

Definizione 18. Siano P, Q due operatori lineari

$$P : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$$

$$Q : \Gamma(F) \to \Gamma(E)$$

su due fibrati vettoriali hermitiani $(E, <,>_E)$ ed $(F, <,>_F)$.
Diciamo che Q è l'*aggiunto formale* di P se

$$<< P(u), v >>_F =<< u, Q(v) >>_E, \quad \forall u \in \Gamma_0(E),\ \forall v \in \Gamma_0(F),$$

ossia

$$\int_M < P(u), v >_F *1 = \int_M < u, Q(v) >_E *1.$$

Definizione 19. Sia L'operatore

$$\bar{*}_E : \Omega^{p,q} \to \Omega^{n-p,n-q}(E^*)$$

così definito:

$$\bar{*}_E(\varphi \otimes s) = \bar{*}(\varphi) \otimes h(s) = \overline{*(\varphi)} \otimes h(s) = *(\bar{\varphi}) \otimes h(s).$$

Osservazione 21. Abbiamo considerato h come isomorfismo $\mathbb{C}$-antilineare tra E ed E^* e dunque $\bar{*}_E$ è un isomorfismo $\mathbb{C}$-antilineare che dipende da h e da g.

Osservazione 22. Siano $\alpha, \beta \in \Omega^{p,q}(E)$ allora

$$\alpha \wedge \bar{*}_E \beta = < \alpha, \beta > *1 = < \alpha, \beta > dV,$$

deriva dalle proprietà della $*$ di Hodge e considerando $\wedge$ in $\Omega^{p,q}(E) \times \Omega^{n-p,n-q}(E^*)$ come il prodotto esterno nella parte delle forme e la mappa di valutazione $E \otimes E^* \to \mathbb{C}$ nella parte dei fibrati E, E^*.

Osservazione 23. Valgono le seguenti:

$$(-1)^{p+q} : \bar{*}_{E^*} \circ \bar{*}_E : \Omega^{p,q}(E) \to \Omega^{p,q}(E)$$

$$(-1)^{n-p+n-q} = (-1)^{p+q} : \bar{*}_E \circ \bar{*}_{E^*} : \Omega^{p,q}(E^*) \to \Omega^{p,q}(E^*).$$

Definizione 20. Se (ξ, h) è un fibrato vettoriale olomorfo hermitiano sulla varietà hermitiana (M, g), definiamo

$$\bar{\partial}_E^* : \Omega^{p,q}(E) \to \Omega^{p,q-1}(E), \quad \text{con } \bar{\partial}_E^* := -\bar{*}_{E^*} \circ \bar{\partial}_{E^*} \circ \bar{*}_E,$$

dove $\bar{\partial}_E$ è la struttura olomorfa di ξ e $\bar{\partial}_{E^*}$ la struttura indotta su E^*.

Definizione 21. Nelle ipotesi sopra indicate definiamo l'*operatore di Laplace* come

$$\Delta_E : \Omega^{p,q}(E) \to \Omega^{p,q}(E)$$
$$\Delta_E := \bar{\partial}_E^* \bar{\partial}_E + \bar{\partial}_E \bar{\partial}_E^*$$

Definizione 22. $\alpha \in \Omega^{p,q}(E)$ è detta *armonica* se $\Delta_E(\alpha) = 0$.
Chiamiamo $A^{p,q}(M, E) := \{$spazio delle (p, q)-forme armoniche$\}$.

Teorema 10.1. *L'isomorfismo $\mathbb{C}$-antilineare*

$$\bar{*}_E : \Omega^{p,q}(E) \to \Omega^{n-p,n-q}(E^*)$$

induce un isomorfismo $\mathbb{C}$-antilineare

$$\bar{*}_E : A^{p,q}(M, E) \to A^{n-p,n-q}(M, E^*).$$

Dimostrazione. Basta dimostrare che

$$\alpha \in A^{p,q}(M,E) \Rightarrow \bar{*}_E\alpha \in A^{n-p,n-q}(M,E^*)$$

ovvero $\Delta_{E^*}(\bar{*}_E(\alpha)) = 0$.
Si ha che:

$$\begin{aligned}
\Delta_{E^*} \circ \bar{*}_E &= (\bar{\partial}^*_{E^*} \circ \bar{\partial}_{E^*} + \bar{\partial}_{E^*} \circ \bar{\partial}^*_{E^*}) \circ \bar{*}_E \\
&= -\bar{*}_E \circ \bar{\partial}_E \circ \bar{*}_{E^*} \circ \bar{\partial}_{E^*} \circ \bar{*}_E + \bar{\partial}_{E^*} \circ (-\bar{*}_E) \circ \bar{\partial}_E \circ \bar{*}_{E^*} \circ \bar{*}_E \\
&= \bar{*}_E \circ \bar{\partial}_E \circ (-\bar{*}_{E^*} \circ \bar{\partial}_{E^*} \circ \bar{*}_E) + \bar{*}_E \circ (-\bar{*}_{E^*}) \circ \bar{\partial}_{E^*} \circ \bar{*}_E \circ \bar{\partial}_E \\
&= \bar{*}_E \circ \bar{\partial}_E \circ \bar{\partial}^*_E + \bar{*}_E \circ \bar{\partial}^*_E \circ \bar{\partial}_E = \bar{*}_E \circ \Delta_E.
\end{aligned}$$

Dunque $\Delta_{E^*} \circ \bar{*}_E = \bar{*}_E \circ \Delta_E$ e quindi è evidente che $\bar{*}_E(\alpha) \in A^{n-p,n-q}(M,E^*)$.
□

Sia ora M una varietà compatta.
Ricordiamo che dalla struttura hermitiana $<,>$ su $\Omega^{p,q}(E)$, risulta definita una nuova struttura hermitiana $<<,>>$ nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
<< \alpha, \beta >>: &= \int_M < \alpha, \beta > *1 = \int_M < \alpha, \beta > dV \\
&= \int_M \alpha \wedge \bar{*}_E(\beta), \quad \forall \alpha, \beta \in \Omega^{p,q}(E).
\end{aligned} \tag{7}$$

Denotiamo con

$$\Omega^{p,q}(M,E) := (\Omega^{p,q}(E), <<,>>).$$

Lemma 10.2. *Sia (E,h) un fibrato hermitiano olomorfo, (M,g) una varietà compatta hermitiana. Allora, rispetto a $<<,>>$ l'operatore $\bar{\partial}^*$ è l'aggiunto formale di $\bar{\partial}_E$ e Δ_E è autoaggiunto.*

Dimostrazione. La seconda osservazione segue banalmente dalla prima. Proviamo quindi la prima.
Se $\alpha \in \Omega^{p,q}(M,E)$ e $\beta \in \Omega^{p,q+1}(M,E)$ allora

$$\begin{aligned}
<< \alpha, \bar{\partial}^*_E\beta >> &= - << \alpha, \bar{*}_{E^*} \circ \bar{\partial}_{E^*} \circ \bar{*}_E\beta >> \\
&= - \int_M < \alpha, \bar{*}_{E^*} \circ \bar{\partial}_{E^*} \circ \bar{*}_E\beta > dV \\
&= - \int_M \alpha \wedge \bar{*}_E(\bar{*}_{E^*} \circ \bar{\partial}_{E^*} \circ \bar{*}_E)\beta \\
&= (-1)^{n-p+n-q-1} \int_M \alpha \wedge \bar{\partial}_{E^*} \circ \bar{*}_E\beta.
\end{aligned} \tag{8}$$

Ma, utilizzando la regola di Leibniz, si ha che:

$$\bar{\partial}(\alpha \wedge \bar{*}_E\beta) = \bar{\partial}_E(\alpha) \wedge \bar{*}_E\beta + (-1)^{p+q}\alpha \wedge \bar{\partial}_{E^*}\bar{*}_E\beta.$$

La (8) diventa allora:

$$<< \alpha, \bar{\partial}_E^* \beta >>= -\int_M \bar{\partial}(\alpha \wedge \bar{*}_E \beta) + \int_M \bar{\partial}_E(\alpha) \wedge \bar{*}_E \beta.$$

Ma, se $\alpha \in \Omega^{p,q}(M,E)$, $\beta \in \Omega^{p,q+1}(M,E)$, allora:

$$\begin{aligned} & \bar{*}_E(\beta) \in \Omega^{n-p,n-q-1}(M,E) \\ \Rightarrow \quad & \alpha \wedge \bar{*}_E(\beta) \in \Omega^{n,n-1}(M,E) \\ \Rightarrow \quad & \bar{\partial}(\alpha \wedge \bar{*}_E(\beta)) = d(\alpha \wedge \bar{*}_E(\beta)) \\ \Rightarrow \quad & \int_M \bar{\partial}(\alpha \wedge \bar{*}_E \beta) = \int_M d(\alpha \wedge \bar{*}_E \beta) = 0 \end{aligned}$$

per il teorema di Stokes, essendo M senza bordo. Da ciò segue che:

$$<< \alpha, \bar{\partial}_E^* \beta >>= \int_M \bar{\partial}_E \alpha \wedge \bar{*}_E \beta = \int_M < \bar{\partial}_E \alpha, \beta > dV =<< \bar{\partial}_E \alpha, \beta >> .$$

Dunque $\bar{\partial}_E^*$ è l'aggiunto formale di $\bar{\partial}_E$. $\square$

Corollario 10.3. *Sia $\alpha \in \Omega^{p,q}(M,E)$ allora*

$$\alpha \in A^{p,q}(M,E) \Leftrightarrow \bar{\partial}_E \alpha = \bar{\partial}_E^* \alpha = 0.$$

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) banale dalla definizione (21).
($\Rightarrow$) Se $\Delta_E(\alpha) = 0$ allora

$$\begin{aligned} 0 &= << \alpha, \Delta_E \alpha >>=<< \alpha, \bar{\partial}_E^* \bar{\partial}_E \alpha >> + << \alpha, \bar{\partial}_E \bar{\partial}_E^* \alpha >> \\ &= << \bar{\partial}_E \alpha, \bar{\partial}_E \alpha >> + << \bar{\partial}_E^* \alpha, \bar{\partial}_E^* \alpha >> \\ &= ||\bar{\partial}_E \alpha||^2 + ||\bar{\partial}_E^* \alpha||^2 \\ &\Rightarrow \bar{\partial}_E \alpha = \bar{\partial}_E^* \alpha = 0. \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 10.4 (di decomposizione di Hodge)**.** *Sia E un fibrato hermitiano olomorfo e M una varietà hermitiana compatta. Allora:*

$$\Omega^{p,q}(M,E) = \bar{\partial}_E \Omega^{p,q-1}(M,E) \oplus A^{p,q}(M,E) \oplus \bar{\partial}_E^* \Omega^{p,q+1}(M,E),$$

e $A^{p,q}(M,E)$ è finito dimensionale.

Dimostrazione (cenno). La dimostrazione del fatto che ogni (p,q)-forma su E si possa scrivere come somma dei tre sottospazi è molto laborioso. Dimostriamo invece che i tre sottospazi sono ortogonali tra di loro e che dunque la somma è diretta: se $\alpha \in \bar{\partial}_E \Omega^{p,q-1}(M,E)$ allora $\exists \beta \in \Omega^{p,q-1}(M,E)$ tale che $\bar{\partial}_E \beta = \alpha$; se $\gamma \in A^{p,q}(M,E)$ allora

$$<< \alpha, \alpha >>=<< \bar{\partial}_E \beta, \gamma >>=<< \beta, \bar{\partial}_E^* \gamma >>= 0$$

perché γ è armonica. Quindi $\bar{\partial}_E \Omega^{p,q-1}(M,E)$ e $A^{p,q}(M,E)$ sono sottospazi ortogonali.
Infine, se $\alpha \in \bar{\partial}_E \Omega^{p,q-1}(M,E)$ e $\beta \in \bar{\partial}_E^* \Omega^{p,q+1}(M,E)$ allora $\exists \eta \in \Omega^{p,q-1}(M,E)$ e $\tau \in \Omega^{p,q+1}(M,E)$ tali che $\bar{\partial}_E \eta = \alpha$ e $\bar{\partial}_E^* \tau = \beta$. Allora

$$<< \alpha, \beta >>=<< \bar{\partial}_E \eta, \bar{\partial}_E^* \tau >>=<< \bar{\partial}_E^2 \eta, \tau >>= 0$$

poiché $\bar{\partial}_E$ è una struttura olomorfa. Da ciò segue la tesi. □

Osservazione 24. Nel caso di $E \equiv \theta(M) = \{\text{funzioni olomorfe su } M\}$ allora $\Omega^{p,q}(M,E) = \Omega^{p,q}(M)$ e la decomposizione è quella classica per varietà hermitiane compatte.

Definizione 23. La coomologia di Dolbeault di un fibrato vettoriale olomorfo è definita come

$$H^{p,q}(M,E) := \frac{\ker(\bar{\partial}_E : \Omega^{p,q}(M,E) \to \Omega^{p,q+1}(M,E))}{\operatorname{Im}(\bar{\partial}_E : \Omega^{p,q-1}(M,E) \to \Omega^{p,q}(M,E))}.$$

Corollario 10.5. *La naturale proeizione*

$$\begin{array}{rcl} \pi : A^{p,q}(M,E) & \to & H^{p,q}(M,E) \\ \alpha & \mapsto & \pi(\alpha) = [\alpha] \end{array}$$

è biunivoca. In particolare $H^{p,q}(M,E)$ ha dimensione finita.

Dimostrazione. π è ben definita per il Corollario 10.3, poiché:

$$\alpha \in A^{p,q}(M,E) \Rightarrow \Delta_E \alpha = 0 \Rightarrow \bar{\partial}_E \alpha = 0.$$

Inoltre dalla decomposizione di Hodge sappiamo che le forme $\bar{\partial}_E$-chiuse in $\Omega^{p,q}(M,E)$ sono

$$\bar{\partial}_E \Omega^{p,q-1}(M,E) \oplus A^{p,q}(M,E)$$

poiché

$$<< \bar{\partial}_E \bar{\partial}_E^* \beta, \beta >>=<< \bar{\partial}_E^* \beta, \bar{\partial}_E^* \beta >>= ||\bar{\partial}_E^* \beta||^2 \neq 0$$

se $\bar{\partial}_E^* \beta \neq 0$ e quindi $\bar{\partial}_E^* \beta$ non è chiusa, con $\beta \in \Omega^{p,q+1}(M,E)$. Dunque la proiezione π è sicuramente suriettiva dato che

$$H^{p,q}(M,E) \subseteq \frac{\bar{\partial}_E \Omega^{p,q-1}(M,E) \oplus A^{p,q}(M,E)}{\bar{\partial}_E \Omega^{p,q-1}(M,E)}.$$

Ma

$$\ker \pi = \{\alpha \in A^{p,q}(M,E) \ : \ [\alpha] = 0\} \equiv A^{p,q}(M,E) \cap \bar{\partial}_E \Omega^{p,q-1}(M,E) = \{0\}$$

e quindi π è biunivoca. $\square$

Osservazione 25. È possibile scegliere per ogni classe di coomologia di Dolbeault di E un rappresentante armonico.

Sia E un fibrato olomorfo e M una varietà compatta complessa. Consideriamo l'accoppiamento

$$\begin{aligned} H^{p,q}(M,E) \times H^{n-p,n-q}(M,E^*) &\to \mathbb{C} \\ (\alpha,\beta) &\mapsto \int_M \alpha \wedge \beta. \end{aligned} \tag{9}$$

Osservazione 26. La (9) è ben definita, ovvero non dipende dal $\bar{\partial}$-chiuso rappresentante scelto: siano infatti $[\alpha_1] = [\alpha_2] \in H^{p,q}(M,E)$, dunque $\alpha_2 = \omega + \alpha_1$ con ω tale che $\exists \varphi \in \Omega^{p,q-1}(M,E)$ con $\bar{\partial}_E \varphi = \omega$. Allora

$$\int_M \alpha_2 \wedge \beta = \int_M (\alpha_1 + \omega) \wedge \beta = \int_M \alpha_1 \beta + \int_M \omega \wedge \beta.$$

Ma

$$\int_M \omega \wedge \beta = \int_M \bar{\partial} \varphi \wedge \beta$$

e

$$\bar{\partial}_E(\varphi \wedge \beta) = \bar{\partial}_E \varphi \wedge \beta + (-1)^{p+q} \varphi \wedge \bar{\partial}_{E^*} \beta = \bar{\partial}_E \varphi \wedge \beta$$

essendo β $\bar{\partial}_{E^*}$-chiusa. Applicando il teorema di Stokes ed in virtù del fatto che M è senza bordo si ha allora che

$$\int_M \omega \wedge \beta = \int_M \bar{\partial}_E \varphi \wedge \beta = \int_M \bar{\partial}(\varphi \wedge \beta) = \int_M d(\varphi \wedge \beta) = 0.$$

Prova analoga per due rappresentanti diversi di una classe in $H^{n-p,n-q}(M,E^*)$. Dunque l'accoppiamento è ben definito.

Proposizione 10.6 (Dualità di Serre)**.** *Sia M una varietà complessa compatta. Per ogni fibrato vettoriale olomorfo E su M l'accoppiamento (9) è non degenere.*

Dimostrazione. Fissiamo una struttura hermitiana h su E e una struttura hermitiana g su M.
Consideriamo l'accoppiamento

$$\begin{aligned} A^{p,q}(M,E) \times A^{n-p,n-q}(M,E^*) &\to \mathbb{C} \\ (\alpha,\beta) &\mapsto \int_M \alpha \wedge \beta. \end{aligned} \tag{10}$$

Se mostriamo che esso è non degenere abbiamo, per il Corollario 10.5, che anche l'accoppiamento (9) è non degenere. Dobbiamo mostrare che $\forall\alpha \neq 0 \in A^{p,q}(M,E)$ $\exists\beta \in A^{n-p,n-q}(M,E^*)$ con $\int_M \alpha \wedge \beta \neq 0$.
Se scegliamo $\beta = \bar{*}_E(\alpha)$ allora

$$\int_M \alpha \wedge \beta = \int_M \alpha \wedge \bar{*}_E \alpha = \int_M < \alpha, \alpha > *1 =<< \alpha, \alpha >>= ||\alpha||^2 \neq 0,$$

ovvero la tesi. □

Corollario 10.7. *Sia E un fibrato vettoriale olomorfo ed M una varietà complessa compatta. Allora esiste un naturale isomorfismo $\mathbb{C}$-lineare*

$$H^{p,q}(M,E) \cong (H^{n-p,n-q}(M,E^*))^*.$$

Osservazione 27. Anche $\bar{*}_E : A^{p,q}(M,E) \to A^{n-p,n-q}(M,E^*)$ induce un isomorfismo per il Corollario 10.5

$$H^{p,q}(M,E) \cong H^{n-p,n-q}(M,E^*)$$

ma è un isomorfismo $\mathbb{C}$-antilineare e dipendente da g ed h.
La dualità di Serre invece migliora entrambi gli aspetti.

Riferimenti bibliografici

[1] P. A. MOROIANU, *Lectures on Kähler Geometry*. Oxford Autumn term, 2012

[2] D. HUYBRECHTS, *Complex Geometry: An Introduction*. Springer, 2005

[3] R.O. WELLS, *Differential Analisys on Complex Manifolds*, 3rd ed., Springer, 2008

[4] P. GRIFFITHS, J. HARRIS, *Principles of algebraic geometry*. Wiley & Sons, 1978

[5] F. BRACCI, *Dispense sulla teoria dei fibrati*. Reperibili in rete al seguente indirizzo: `http://www.mat.uniroma2.it/~fbracci/download/teoriafibrati.pdf`