Dipartimento di Matematica 'Guido Castelnuovo'
Seminari di Geometria Superiore

Strutture complesse e quasi complesse

Prof. Paolo PICCINNI

Federico AMADIO
Cesare Giulio ARDITO
Ruggero FREDDI

16 Maggio 2014

Indice

Capitolo 1

Strutture quasi complesse

Ruggero Freddi

Questo lavoro si propone di introdurre la teoria delle varietà quasi complesse. Per semplicità, si presenteranno prima le definizioni per spazi vettoriali, per poi riferirle allo spazio tangente nei punti di una varietà differenziabile.

Al fine di mostrare un'ampia classe di esempi di varietà quasi complesse, definiremo le varietà complesse. In particolare, mostreremo come una varietà complessa sia dotata di una naturale struttura quasi complessa e accenneremo brevemente al problema di stabilire sotto quali ipotesi una struttura quasi complessa sia indotta da una struttura complessa.

Introdurremo le varietà simplettiche e definiremo quando una struttura simplettica sia compatibile con una struttura quasi complessa. Mostreremo inoltre come data una struttura simplettica sia sempre possibile costruire una struttura quasi complessa con essa compatibile.

Termineremo questa sezione con alcune curiosità. Più precisamente, ci porremo il problema di stabilire l'esistenza di strutture quasi complesse/complesse sulle sfere.

1.1 Caso lineare

In questa sezione costruiremo uno spazio vettoriale complesso a partire da uno spazio vettoriale reale di dimensione pari. L'idea che cercheremo di realizzare è quella di suddividere lo spazio in due sottospazi di uguali dimensioni e in qualche senso ortogonali. Realizzeremo il nostro scopo identificando questi due sottospazi con la parte reale e la parte immaginaria dello spazio vettoriale complesso.

Definizione 1.1.1. Un endomorfismo J di uno spazio vettoriale (reale) V si dice una *struttura lineare complessa* su V se soddisfa $J^2 = -\mathrm{Id}$.

È evidente che la struttura lineare complessa vuole realizzare nello spazio vettoriale reale la moltiplicazione per l'unitá immaginaria i.

Essendo il determinante di un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale di dimensione n reale a sua volta, e valendo per una struttura complessa $\det(J)^2 = (-1)^n$, abbiamo che la dimensione dello spazio deve essere pari. Quindi, da ora, supporremo sempre che V sia di dimensione pari.

Su di uno spazio vettoriale reale V munito di struttura lineare complessa J è possibile definire una struttura di spazio vettoriale complesso ponendo:

$$(\alpha + i\beta)x = \alpha x + J\beta x, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall\, x \in V.$$

Naturalmente dato uno spazio vettoriale complesso, questo può sempre essere pensato come indotto da una struttura lineare complessa. Infatti, prendendo per lo spazio complesso di dimensione n la base data da $x_1, x_2, \ldots, x_n, ix_1, ix_2, \ldots, ix_n$, possiamo costruire uno spazio vettoriale reale di dimensione doppia identificando i vettori $ix_1, ix_2, \ldots, ix_n$ con dei nuovi vettori $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Dotiamo tale spazio di una struttura lineare complessa che operi come l'unità immaginaria operava sui vettori dello spazio complesso. È facile convincersi che lo spazio vettoriale reale con la struttura lineare complessa appena costruiti inducono uno spazio vettoriale complesso isomorfo a quello dal quale eravamo partiti.

Inoltre, è immediato verificare che se x è un vettore di V allora x e Jx sono linearmente indipendenti.

Proposizione 1.1.1. *Siano $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ vettori di una base reale di V tale che, $x_{i+n} = Jx_i$ per ogni i tra 1 e n, allora $x_1 + Jx_1, x_2 + Jx_2, \ldots x_n + Jx_n = x_1 + ix_1, x_2 + ix_2, \ldots, x_n + ix_n$ costituiscono una base complessa di V.*

Dimostrazione. Procedendo in maniera induttiva è facile persuadersi del fatto che è sempre possibile costruire per V una base nella maniera sopra indicata. Infatti, fissato un vettore $x_1 \neq 0$ e posto $x_2 = Jx_1$ per quanto detto x_1 e x_2 sono linearmente indipendenti. Ora è possibile usare l'ipotesi induttiva sullo spazio V quozientato per quello generato da x_1 e x_2. □

Vediamo un semplicissimo esempio per fissare le idee.

Esempio 1.1.1. Prendiamo $V = \mathbb{R}^{2n}$ e consideriamo la base standard $e_1, e_2, \ldots, e_{2n} = x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Consideriamo l'endomorfismo rappresentato dalla matrice

$$J_0 := \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ -\mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix}.$$

È immediato che $J_0^2 = -\mathrm{Id}$ e quindi costituisce una struttura lineare complessa per V.

La base complessa di V indotta da J_0 è $x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, \ldots, x_n + iy_n$.

Teorema 1.1.2. *Siano V e V' spazi vettoriali reali con strutture lineari complesse rispettivamente J e J', allora un endomorfismo f da V a V' è lineare in senso complesso se e solo se $J' \circ f = f \circ J$.*

Dimostrazione. Notiamo che gli endomorfismi J e J' corrispondono alla moltiplicazione per i rispettivamente in V e in V'.

Essendo la seguente catena di eguaglianze vera se e solo se f è lineare in senso complesso, abbiamo la tesi.

$$\begin{aligned}\alpha f(x) + \beta J' f(x) &= \alpha f(x) + \beta i f(x) \\ &= (\alpha + i\beta) f(x) \\ &= f((\alpha + i\beta)x) \\ &= f(\alpha x + i\beta x) \\ &= f(\alpha x) + f \circ J(\beta x).\end{aligned}$$

□

Grazie a questo risultato possiamo rappresentare le matrici di $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ come matrici di $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ che commutano con la struttura quasi complessa

$$J_0 := \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ -\mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix}.$$

Da semplici calcoli segue che queste sono tutte e sole le matrici della forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix},$$

con A e B in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Proposizione 1.1.3. *L'insieme delle strutture lineari complesse su* $\mathbb{R}^{2n}$ *è in naturale corrispondenza biunivoca con il quoziente* $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})/\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$*. La classe laterale rappresentata dall'elemento* $S \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ *corrisponde alla struttura complessa* SJ_0S^{-1}*.*

Osservazione 1. Uno spazio vettoriale ammette una struttura lineare complessa se e solo se ha dimensione pari. Abbiamo visto come uno spazio che ammette struttura lineare complessa deve avere necessariamente essere di dimensione pari. Per quanto riguarda la sufficienza basta considerare la struttura lineare complessa data dal pull-back attraverso l'isomorfismo canonico dallo spazio V a $\mathbb{R}^n$ della struttura lineare complessa standard di $\mathbb{R}^n$.

Proposizione 1.1.4. *Sia* J *una struttura lineare complessa, uno sottospazio* V' *dello spazio vettoriale reale* V *è* J*-invariante se e solo se è un sottospazio vettoriale di* V *con la struttura complessa indotta da* J*.*

Dimostrazione. Basta ricordare che quando si considera V come spazio complesso, l'azione di J corrisponde alla moltiplicazione per i. □

1.2 Varietà quasi complesse

Abbiamo visto come tramite la definizione di un endomorfismo J sia possibile dare ad uno spazio vettoriale reale una struttura di spazio vettoriale complesso.

Vogliamo ora applicare questa idea agli spazi vettoriali tangenti alle varietà, tenendo presente che per rispettare la struttura $\mathcal{C}^\infty$ della varietà dovremo imporre che le strutture quasi complesse varino in maniera liscia.

Definizione 1.2.1. Una *struttura quasi complessa* su una varietà differenziabile M è un isomorfismo $\mathcal{C}^\infty$ di fibrati vettoriali reali

$$J : TM \to TM$$

tale che, per ogni $p \in M$, l'endomorfismo

$$J_p : T_pM \to T_pM$$

sia una struttura lineare complessa, ovvero $J_p^2 = -\mathrm{Id}$. La coppia (M, J) è detta un *varietà quasi complessa.*

Osservazione 2. Sia (M, J) una varietà quasi complessa. Allora, per ogni punto p di M, lo spazio tangente T_pM ha una naturale struttura di spazio vettoriale complesso indotta dalla struttura lineare complessa J_p.

Proposizione 1.2.1. *Ogni varietà quasi complessa ha dimensione pari ed è orientabile.*

Dimostrazione. Per ogni p in M, sia J_p una struttura quasi complessa su T_pM. Come abbiamo precedentemente mostrato affinché una tale J_p esista è necessario che la dimensione di T_pM sia pari.

Si fissi per ogni T_pM una base della forma $x_1, x_2, \dots, x_n, Jx_1, Jx_2, \dots, Jx_n$. Notiamo che per ogni coppia di tali basi la matrice di cambiamento di base risulta essere a determinante positivo.

Per definire un orientazione di M è quindi sufficiente considerare l'insieme dei sistemi di coordinate che inducano una base del tangente che differisca da quella precedentemente fissata per un endomorfismo con determinante positivo. È immediato verificare la compatibilità dell'atlante così definito con quella dell'atlante che definisce la struttura differenziale di M. $\square$

Osservazione 3. Sia M una varietà differenziabile di dimensione $2n$. La definizione di una struttura quasi complessa J su M equivale ad una riduzione del gruppo di struttura di TM da $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ a $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Osservazione 4. Sia M una varietà differenziabile di dimensione $2n$ e sia $\pi : F(M) \to M$ il fibrato dei riferimenti di M. L'insieme delle strutture quasi complesse su M è in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle sezioni del fibrato associato $F(M)/\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, con fibra $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})/\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Definizione 1.2.2. Siano M e M' varietà quasi complesse con strutture quasi complesse J e J'. Un'applicazione $f : M \to M'$ è detta *quasi complessa* se è $\mathcal{C}^\infty$ e soddisfa $J' \circ df = df \circ J$

Osservazione 5. La *categoria delle varietà quasi complesse* è la categoria che ha come oggetti le varietà quasi complesse, e come morfismi le applicazioni quasi complesse fra varietà quasi complesse. È chiaramente una sottocategoria della categoria delle varietà differenziabili.

1.3 Esempi

1.3.1 Varietà complesse

Richiamiamo la nozione di *funzione olomorfa* di più variabili complesse.

Siano $a \in \mathbb{C}^n$ e $r > 0$, denotiamo con $B_r(a)$ la palla di raggio r e centro a.

Definizione 1.3.1. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ aperto. Una funzione $f : U \to \mathbb{C}$ si dice *olomorfa* se, per ogni punto $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in U$, esistono $r > 0$ tale che $B_r(a) \subset U$, e $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ e $h_i : B_r(a) \to \mathbb{C}$ tali che

- $\lim_{z \to a} h_i(z) = 0$;
- per ogni $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in B_r(a)$, si ha:

$$f(z) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} c_i(z_i - a_i) + \sum_{i=1}^{n} h_i(z)(z_i - a_i).$$

Definizione 1.3.2. Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ aperto. Una funzione

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m, \text{ con } f_i : U \to \mathbb{C}, \text{ per } i = 1, 2, \dots, m$$

si dice olomorfa se f_i è olomorfa per $i = 1, 2, \dots, m$.

Ricordiamo che vale la seguente caratterizzazione delle funzioni olomorfe:

Proposizione 1.3.1. *Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto e $f : U \to \mathbb{C}$, allora sono equivalenti:*

1. *f è olomorfa;*
2. *f è olomorfa in ogni variabile;*
3. *f è analitica.*

Veniamo ora alla definizione di varietà complessa:

Definizione 1.3.3. Sia M una varietà topologica[1], un insieme

$$\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) \mid U_i \subset M, \phi_i : U_i \xrightarrow{\cong} \phi_i(U_i) \subset \mathbb{C}^n\}_{i \in I}$$

si dice un *atlante olomorfo* se valgono le seguenti proprietà:

- $M = \bigcup_{i \in I} U_i$;

[1] Assumiamo che M, come spazio topologico, sia Hausdorff, connesso (sebbene non sia necessario) e paracompatto.

- per ogni $i, j \in I$, o $U_i \cap U_j = \varnothing$, oppure

$$(\phi_i \circ \phi_j^{-1})|_{U_i \cap U_j} \colon \phi_j(U_i \cap U_j) \to \phi_i(U_i \cap U_j)$$

  è olomorfa.

Definizione 1.3.4. Due atlanti $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ si dicono *compatibili* se la loro unione è ancora un atlante.

È immediato verificare che la relazione di compatibilità è una relazione di equivalenza. Possiamo, dunque, definire:

Definizione 1.3.5. Una *struttura complessa* su una varietà topologica è una classe di equivalenza di atlanti olomorfi. Una *varietà complessa* è una varietà topologica munita di una struttura complessa.

Definizione 1.3.6. Sia M una varietà complessa, $p \in M$, $z_1, \dots, z_k$ coordinate locali intorno a p. Lo spazio tangente olomorfo a M in p è definito come

$$T_pM = \operatorname{span}_{\mathbb{C}} \left\{ \frac{\partial}{\partial z_k}\Big|_p \right\}_k$$

Il fibrato tangente olomorfo TM è il fibrato con fibre gli spazi T_pM.

Vediamo, ora, qualche esempio di varietà complessa.

Esempi 1.3.1.

1. Lo spazio $\mathbb{C}^n$ munito di un altante costituito dalla sola carta $(\mathbb{C}^n, \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})$.

2. Lo spazio proiettivo $\mathbb{CP}^n$ con l'atlante costituito dalle usuali carte affini.

3. La *grassmanniana* $G_k(\mathbb{C}^n)$ dei k-sottospazi di $\mathbb{C}^n$ con la struttura complessa descritta in [19].

4. Fissato il reticolo

$$\Lambda = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \,\middle|\, a_i \in \mathbb{Z} \right\}, \text{ dove } \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \text{ è una base di } \mathbb{C}^n \text{ su } \mathbb{R},$$

   in $\mathbb{C}^n$, poniamo $\mathbb{T}^n_\Lambda := \mathbb{C}^n/\Lambda$, con la topologia quoziente e $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{T}^n_\Lambda$ la proiezione al quoziente.

   Si può definire un atlante su $\mathbb{T}^n_\Lambda$ prendendo gli aperti U tali che $\pi^{-1}U$ sia unione disgiunta di aperti U_i di $\mathbb{C}^n$ per cui $\pi|_{U_i} \colon U_i \to U$ è un omeomorfismo, e $\phi := (\pi|_{U_i})^{-1} : U \xrightarrow{\cong} U_i \subset \mathbb{C}^n$. Essendo le funzioni di transizione date da traslazioni, esse sono olomorfe.

   La varietà $\mathbb{T}^n_\Lambda$ è detta un *toro complesso.*

Passiamo a definire i morfismi della nostra categoria:

Definizione 1.3.7. Una funzione $f : U \subset M \to \mathbb{C}$ si dice *olomorfa* se, per ogni i in I tale che $U \cap U_i \neq \varnothing$,

$$f \circ \phi_i^{-1}|_{U \cap U_i} \colon \phi_i(U \cap U_i) \to \mathbb{C}$$

è olomorfa. Denotiamo con $\mathcal{O}_M(U)$ l'insieme delle funzioni olomorfe su U.

Proposizione-Definizione 1.3.1. Associando ad ogni aperto U di M l'insieme delle funzioni olomorfe $\mathcal{O}_M(U)$ su U, e considerando come applicazioni di restrizione le usuali restrizioni di funzioni, otteniamo un fascio[2] su M, detto *fascio delle funzioni olomorfe* su M, e denotato con $\mathcal{O}_M$.

Osservazione 6. Si osservi che sarebbe stato possibile definire la struttura complessa di una varietà complessa M direttamente a partire dal suo fascio delle funzioni olomorfe $\mathcal{O}_M$.

Definizione 1.3.8. Siano M ed M' due varietà complesse, e siano $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ e $\mathcal{A}' = \{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ atlanti che rappresentano rispettivamente le strutture complesse di M ed M', un'applicazione $f : M \to M'$ si dice *olomorfa* se per ogni i in I e j in J la funzione di variabili complesse $\psi_j \circ f \circ \phi_i^{-1}$ è olomorfa.

Osservazione 7. Dunque, la *categoria delle varietà complesse* risulta essere quella in cui gli oggetti sono varietà complesse e i morfismi sono applicazioni olomorfe tra varietà complesse. Gli isomorfismi sono anche detti *biolomorfismi* o *isomorfismi analitici.* Anche in questo caso, abbiamo una sottocategoria della categoria delle varietà differenziabili.

Osservazione 8. Notiamo che date due varietà complesse con stessa struttura differenziabile soggiacente, queste hanno stessa struttura complessa se e solo se hanno stessa struttura quasi complessa.

Definizione 1.3.9. Sia M una varietà complessa, $S \subset M$ è una *sottovarietà analitica* se per ogni p in S esiste un aperto U contenente p ed esistono $f_1, f_2, \ldots, f_r$ in $\mathcal{O}_M(U)$ tali che

$$S \cap U = \{z \in U \mid f_1(z) = f_2(z) = \ldots = f_r(z) = 0\}.$$

Definizione 1.3.10. Un punto p di una sottovarietà analitica S di M si dice *liscio* se esistono U ed $f_1, f_2, \ldots, f_r$ come sopra, con differenziali $df_1(p), df_2(p), \ldots, df_r(p)$ linearmente indipendenti. Si dice *singolare* se non è liscio.

Definizione 1.3.11. Una sottovarietà analitica S di M si dice una *sottovarietà complessa* se tutti i suoi punti sono lisci.

Osservazione 9. Sia M una varietà complessa di dimensione n, allora una sottovarietà complessa S definita localmente come luogo degli zeri delle funzioni olomorfe $f_1, f_2, \ldots, f_r$ è una varietà complessa di dimensione $k = n - r$.

Un'importante classe di varietà complesse sono le varietà complesse proiettive.

[2] Più precisamente, un fascio di anelli locali.

Definizione 1.3.12. Un sottoinsieme S di $\mathbb{CP}^n$ si dice *varietà proiettiva* se esistono $p_1, p_2, \ldots, p_d$ polinomi omogenei tali che

$$S = \{[z_0, z_1, \ldots, z_n] \in \mathbb{CP}^n \mid p_i(z_0, z_1, \ldots, z_n) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, d\}.$$

Definizione 1.3.13. Sia S una varietà proiettiva che è anche una sottovarietà complessa, allora S si dice *varietà proiettiva complessa.*

Osservazione 10. In realtà, ogni sottovarietà complessa compatta di $\mathbb{CP}^n$ è proiettiva, come garantito dal *teorema di Chow.*

Teorema 1.3.2. *La struttura di varietà complessa induce sulla struttura di varietà sottostante una struttura di varietà quasi complessa.*

Dimostrazione. Lo spazio tangente ad ogni punto p della varietà M è munito di una naturale struttura di spazio vettoriale complesso e dunque di una naturale struttura lineare complessa J_p data dalla moltiplicazione per i. Quello che resta da verificare è che l'applicazione

$$J_p : T_p(M) \to T_p(M), \quad \forall p \in M,$$

induce un isomorfismo $\mathcal{C}^\infty$ di fibrati.

A tale proposito, scegliamo carte locali olomorfe (U, ϕ) su M in modo da ottenere una banalizzazione locale del fibrato tangente:

$$T(M)\,|_U \cong \phi(U) \times \mathbb{R}^{2n}.$$

Siano $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ coordinate su $\phi(U)$ in $\mathbb{R}^{2n}$. La mappa $J\,|_U$ è definina, rispetto alla banalizzazione, da

$$\mathrm{Id} \times J_0 : \phi(U) \times \mathbb{R}^{2n} \to \phi(U) \times \mathbb{R}^{2n}.$$

Tale J è ovviamente $\mathcal{C}^\infty$. □

Osservazione 11. Chiaramente, un'applicazione olomorfa fra varietà complesse è quasi complessa rispetto alle strutture quasi complesse indotte. Dunque, la categoria delle varietà complesse è una sottocategoria della categoria delle varietà quasi complesse.

Teorema 1.3.3. *Siano M ed M' varietà complesse. Un'applicazione $f : M \to M'$ è olomorfa se e solo se è quasi complessa rispetto alle strutture quasi complesse J e J' rispettivamente di M ed M'.*

Dimostrazione. Essendo sufficiente provare l'asserto su ogni coppia di carte degli atlanti di M e M' è possibile ridursi a presentare la dimostrazione per una funzione $f : U \subset \mathbb{C}^n \to V \subset \mathbb{C}^m$ con U e V aperti dell'atlante.

Siano $u_1, u_2, \ldots, u_m, v_1, v_2, \ldots, v_m$ e $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ rispettivamente coordinate su U e coordinate su V.

Esprimendo f in termini di queste coordinate, abbiamo:

$$\begin{aligned} u_k &= (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)\,, \\ v_k &= (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)\,, \end{aligned}$$

dove $k = 1, 2, \dots, m$.

Ricordiamo che una funzione f è olomorfa se e solo se valgono le seguenti condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{\partial v_k}{\partial y_j} &= 0, \\ \frac{\partial u_k}{\partial y_j} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} &= 0, \end{aligned}$$

con $j = 1, 2, \dots, n$ e $k = 1, 2, \dots, m$.

Ricordiamo inoltre che per qualsiasi funzione f abbiamo:

$$\begin{aligned} df\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) &= \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial u_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial v_k}\right), \\ df\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) &= \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u_k}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial u_k} + \frac{\partial v_k}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial v_k}\right), \end{aligned}$$

con $j = 1, 2, \dots, n$.

Dalla scelta delle basi per i tangenti alle varietà M ed M', l'azione di J è:

$$\begin{aligned} J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) &= \frac{\partial}{\partial y_j}, \\ J\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) &= -\frac{\partial}{\partial x_j}, \end{aligned}$$

con $j = 1, 2, \dots, n$.

Mentre l'azione di J' è:

$$\begin{aligned} J'\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right) &= \frac{\partial}{\partial v_j}, \\ J'\left(\frac{\partial}{\partial v_j}\right) &= -\frac{\partial}{\partial u_j}, \end{aligned}$$

con $j = 1, 2, \dots, m$.

Le rimanenti verifiche sono ora immediate. □

Osservazione 12. Questa proposizione ci permette di affermare che la categoria delle varietà complesse è in realtà una sottocategoria *piena* della categoria delle varietà quasi complesse.

In questa sezione abbiamo visto come una struttura complessa su di una varietà induca un ovvia struttura quasi complessa, risulta naturale domandarsi sotto quale ipotesi è vero il viceversa.

Definizione 1.3.14. Sia M una varietà differenziabile e sia J una struttura quasi complessa. Se esiste una struttura complessa su M che induce J come struttura quasi complessa, allora J si dice *integrabile* a una struttura complessa.

Ricordiamo che tutte le varietà lineari sono integrabili.

Il problema nel caso generale risulta più difficile e verrà affrontato nella seconda parte di questo seminario.

1.3.2 Varietà simplettiche

Introdurremo ora il concetto di varietà simplettica.

Benché non sia il contesto di questo lavoro, vogliamo menzionare l'importanza della geometria simplettica in ambito fisico. Infatti, questa risulta naturale nella formulazione hamiltoniana della meccanica classica.

Vedremo come una struttura quasi complessa possa essere compatibile con una struttura simplettica. Tale compatibilità è importante in diversi ambiti, tra i quali quello della teoria delle varietà kähleriane.

Anche in questo caso, cominceremo introducendo il concetto di struttura simplettica nel caso lineare per, poi passare alle varietà.

Definizione 1.3.15. Sia V uno spazio vettoriale, una due forma $\omega \in \bigwedge^2 V^*$ si dice una *forma simplettica* se è non degenere. Uno spazio vettoriale munito di una forma simplettica è detto uno *spazio vettoriale simplettico*.

Definizione 1.3.16. Siano V e V' spazi vettoriali simplettici con forme simplettiche rispettivamente ω ed ω'. Un applicazione $f : V \to V'$ si dice *isomorfismo simplettico* se è un isomorfismo di spazi vettoriali, ed inoltre $f^*\omega' = \omega$.

Questo significa che per ogni coppia di vettori v e w di V, vale

$$\omega'(fv, fw) = \omega(v, w).$$

Proposizione-Definizione 1.3.2. L'insieme degli isomorfismi simplettici dello spazio vettoriale V munito della forma simplettica ω in sé è un gruppo rispetto all'operazione di composizione, detto *gruppo simplettico* di (V, ω), e denotato con il simbolo $\mathrm{Sp}(V, \omega)$.

Un esempio ovvio, ma fondamentale, di spazio vettoriale simplettico è il seguente:

Esempio 1.3.1. Fissiamo nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{2n}$ la base canonica data da $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$, e denotiamo con $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*$ i vettori della base duale. Sia

$$\omega_0 := \sum_{i=1}^{n} x_i^* \wedge x_j^*.$$

È immediato verificare che la 2-forma ω_0 è una forma simplettica, detta *forma simplettica standard* su $\mathbb{R}^{2n}$. Il gruppo simplettico di $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ è il *gruppo simplettico standard*:

$$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) := \left\{ X \in \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{R}) \mid X^t J_0 X = J_0 \right\},$$

dove J_0 denota, al solito, la struttura quasi complessa standard di $\mathbb{R}^{2n}$.

L'esempio di $\mathbb{R}^{2n}$ suggerisce la seguente definizione:

Definizione 1.3.17. Sia V uno spazio simplettico, con forma simplettica ω. Sia $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ una base di V, e sia $\{x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*\}$ la corrispondente base duale. La base di V si dice una *base simplettica* se, in coordinate, ω assume la forma

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} x_i^* \wedge y_i^*.$$

Tale forma per ω è detta *forma canonica.*

Definizione 1.3.18. Sia V uno spazio simplettico, con forma simplettica ω, e sia S un suo sottospazio. Si definisce *complemento simplettico* di S in V il sottospazio

$$S^{\perp} = \{v \in V \mid \omega(v, w) = 0, \forall w \in S\}.$$

Definizione 1.3.19. Un sottospazio S di uno spazio simplettico V con forma simplettica ω si dice:

- *simplettico* se $S \cap S^{\perp} = \{0\}$;
- *isotropo* se $S \subset S^{\perp}$;
- *coisotropo* se $S^{\perp} \subset V'$;
- *lagrangiano* se $S = S^{\perp}$.

Osservazione 13. È banale dimostrare che un sottospazio è simplettico se e solo se la restrizione della forma simplettica è non degenere

Proposizione 1.3.4. *Sia V uno spazio vettoriale simplettico, allora V ha dimensione pari ed esiste una base simplettica.*

Dimostrazione. Una forma simplettica ω assume la forma canonica se e solo se detta $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ una base dello spazio V, allora l'azione di ω è data da

$$\omega(x_i, x_j) = \omega(y_i, y_j) = 0, \quad \omega(x_i, y_j) = -\omega(y_j, x_i) = \delta_{ij}, \quad \forall i, j.$$

Procediamo per induzione sulla dimensione m dello spazio V.

Se $m = 0$ non c'è nulla da dimostrare.

Sia $m \geqslant 1$ e la proposizione vera per ogni dimensione minore di m.

Preso un vettore non nullo x_1 in V per la non degeneratezza di ω deve esistere un vettore y_1 in V per cui $\omega(x_1, y_1) = 1$. Essendo inostre ω anisimmetrica abbiamo che x_1 ed y_1 non possono essere proporzionali. Quindi x_1 ed y_1 sono linearmente indipendenti e $m \geqslant 2$.

Poniamo $S := \operatorname{span}\{x_1, y_1\}$, quindi risulta[3] $\dim S^\perp = m-2$. Essendo $\omega|_S$ non degenere, si ha che S e dunque $S^\perp$ sono simplettiche. Per ipotesi induttiva si ha che $\dim S^\perp$ è pari e ammette una base simplettica. Detta $\{x_2, \ldots, x_n, y_2, \ldots, y_n\}$ tale base, segue facilmente che $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ è una base simplettica per V. $\square$

Passiamo, ora, al caso delle varietà differenziabili.

Definizione 1.3.20. Sia M una varietà differenziabile, una due forma differenziale $\omega \in \mathcal{C}^\infty(\bigwedge^2 T^*M)$ si dice *struttura simplettica* o equivalmentemente *forma simplettica* su M se valgono le seguenti condizioni:

- ω_p è non degenere per ogni punto p di M;
- ω è chiusa.

Una varietà differenziabile M munita di una struttura simplettica ω si dice una *varietà simplettica.*

Osservazione 14. Lo spazio tangente ad ogni punto p di una varietà simplettica M è uno spazio vettoriale simplettico, dunque ha dimensione pari. Ne segue che le varietà simplettiche hanno tutte dimensione pari.

Osservazione 15. Essendo una struttura simplettica non degenere, abbiamo che le varietà simplettiche sono orientabili, a tal fine basta prendere in considerazione la forma mai nulla $\omega^n = \omega \wedge \ldots \wedge \omega$ (n-volte).

Osservazione 16. Sia M una varietà differenziabile di dimensione $2n$. La definizione di una struttura simplettica ω su M implica una riduzione del gruppo di struttura di TM da $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ a $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$, ma non è ad essa equivalente[4].

Vediamo qualche esempio di varietà simplettica:

Esempi 1.3.2.

1. Lo spazio $\mathbb{R}^{2n}$ con la forma simplettica standard ω_0 è banalmente una varietà simplettica. Tale esempio risulterà rilevante alla luce di un fondamentale risultato, noto come *teorema di Darboux*, che presenteremo in seguito.

2. Su una superficie differenziabile orientabile Σ la forma di volume $d\mathrm{vol}_\Sigma$ è chiusa e non degenere. Essa definisce, dunque, in modo naturale una struttura simplettica.

3. Un esempio notevole di varietà simplettica è lo spazio totale del fibrato cotangente a una varietà differenziabile, con la *struttura simplettica canonica tautologica.*

[3] Si dimostra che la somma delle dimensioni di un sottospazio simplettico e del suo complemento simplettico è uguale alla dimensione dello spazio simplettico.

[4] Come nel caso delle varietà complesse, è richiesta un'ulteriore ipotesi di integrabilità. Strutture definite a partire da una riduzione del gruppo di struttura da $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ a $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ sono dette *quasi simplettiche.*

Data una varietà M, indichiamo con T^*M lo spazio totale del suo fibrato cotangente. Ogni punto di T^*M è un covettore ϕ in T_p^*M, per qualche punto p di M. Denotiamo dunque un punto di T^*M con (p, ϕ) e con $\pi : T^*M \to M$, $\pi(p, \phi) = p$, la naturale proiezione su M.

Il pull-back punto per punto di π è un'applicazione lineare

$$(d\pi(p, \phi))^* : T_p^*M \to T^*_{(p,\phi)}(T^*M).$$

Definiamo $\tau \in \bigwedge^1 (T^*M)$ come:

$$\tau_{(p,\phi)} := (d\pi(p, \phi))^* \, \phi.$$

In altre parole, il valore di τ in (p, ϕ) è il pull-back tramite π del covettore ϕ. Se v è un vettore tangente in $T_{(p,\phi)}(T^*M)$, allora

$$\tau_{(p,\phi)}(v) = \phi(d\pi(p, \phi)(v)).$$

La 1-forma τ è nota in letteratura come 1-*forma tautologica* su T^*M. Si verifica che τ è liscia, e che $\omega := -d\tau$ é una forma simplettica, detta *forma simplettica canonica* su T^*M.

Definizione 1.3.21. Siano M ed M' varietà simplettiche, con strutture simplettiche rispettivamente ω ed ω'. Un diffeomorfismo $f : M \to M'$ si dice un *isomorfismo simplettico* se $f^*\omega' = \omega$.

Definizione 1.3.22. Una sottovarietà differenziabile S di una varietà simplettica M con struttura simplettica ω si dice una *sottovarietà simplettica* se la restrizione di ω a S definisce una struttura simplettica su S.

Definizione 1.3.23. Una sottovarietà simplettica S di una varietà simplettica M si dice rispettivamente *isotropa, coisotropa* o *lagrangiana* se per ogni punto p in S, lo spazio tangente a S in p è un sottospazio isotropo, coisotropo o Lagrangiano dello spazio tangente in p ad M.

Definizione 1.3.24. Sia N una varità differenziabile ed M una variteà simplettica. Sia, inoltre, $f : N \to M$ un embedding. Allora, f si dice *isotropo, coisotropo* o *lagrangiano* se la sottovarietà $f(N)$ risulta essere rispettivamente isotropa, coisotropa o lagrangiana.

Enunciamo il già menzionato teorema di Darboux:

Teorema 1.3.5 (Darboux). *Sia M una varietà simplettica con struttura simplettica ω. Per ogni p in M, esiste un sistema di coordinate $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ centrate in p, tali che ω abbia rappresentazione in carte:*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_j$$

Evidentemente, il teorema di Darboux riveste di notevole importanza l'esempio di $\mathbb{R}^{2n}$. Infatti, tale teorema asserisce che, in un opportuno sistema di coordinate, ogni forma simplettica, localmente, è la forma simplettica standard di $\mathbb{R}^{2n}$. Introduciamo, pertanto, la seguente definizione:

Definizione 1.3.25. Sia M una varietà differenziabile, con forma simplettica ω. Un sistema di coordinate per M si definisce *sistema di coordinate canoniche* o, equivalentemente, *sistema di coordinate di Darboux* o *sistema di coordinate simplettiche* se in ogni carta ω assume la forma

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dx_j.$$

Come abbiano opportunamente osservato in questo seminario, su $\mathbb{R}^{2n}$ convivono naturalmente una struttura quasi complessa (la struttura lineare complessa standard J_0) e una struttura simplettica (la struttura simplettica standard ω_0). Ora, per il teorema di Darboux, ogni varietà simplettica è localmente $\mathbb{R}^{2n}$ con ω_0. È lecito chiedersi, dunque, quale sia, in generale, la relazione fra strutture quasi complesse e strutture simplettiche su una varietà.

Definizione 1.3.26. Sia M una varietà simplettica, con struttura simplettica ω. Una struttura quasi complessa J su M si dice *compatibile* con ω se:

- $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$ per ogni coppia X e Y di campi vettoriali su M;
- $\omega(X, JX) > 0$ per ogni campo vettoriale X su M tale che $X \neq 0$.

Vale il seguente risultato:

Proposizione 1.3.6. *Tutte le varietà simplettiche ammettono una struttura quasi complessa compatibile.*

Dimostrazione. Sia M una varietà simplettica, con forma simplettica ω, con coordinate simplettiche $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$. Allora si può definire una struttura quasi complessa J su M, localmente, come:

$$J := \sum_{i=1}^{n} \left(dx_i \otimes \frac{\partial}{\partial y_i} - dy_i \otimes \frac{\partial}{\partial x_i} \right).$$

Verifichiamo che J e ω sono compatibili.

In particolare, dobbiamo verificare che

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \omega\left(J\frac{\partial}{\partial x_i}, J\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = 0,$$
$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right) = \omega\left(J\frac{\partial}{\partial y_i}, J\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = 0,$$
$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right) = \omega\left(J\frac{\partial}{\partial x_i}, J\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = \delta_{ij},$$

ma essendo

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(dx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial y_i} - dy_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial y_j},$$
$$J\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(dx_i\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)\frac{\partial}{\partial y_i} - dy_i\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j},$$

le verifiche sono immediate. □

Siamo necessariamente portati ad introdurre la seguente definizione:

Definizione 1.3.27. Una varietà simpatetica M, con struttura simpatetica ω, munita di una struttura quasi complessa integrabile J compatibile con ω si dice una *varietà di Kähler.*

1.3.3 Sfere

Occupiamoci, ora, di stabilire l'esistenza o la non esistenza di strutture complesse e quasi complesse su sfere. Tratteremo, dapprima, il caso delle sfere di dimensione bassa, ovvero 2, 4 e 6, per poi passare ad enunciare il risultato generale, noto come *teorema di Borel-Serre.*

La sfera $\mathbb{S}^2$

Essendo la sfera $\mathbb{S}^2$ omeomorfa alla retta proiettiva complessa $\mathbb{CP}^1$, possiede la naturale struttura complessa indotta da tale omeomorfismo. Tale struttura complessa come abbiamo visto induce una struttura quasi complessa.

In maniera alternativa si può definire direttamente una struttura quasi complessa nel modo seguente:

$$J_p(v) := p \times v, \quad \forall p \in \mathbb{S}^2, \forall v \in T_p\mathbb{S}^2,$$

dove $\times$ denota l'usuale prodotto vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

Verificheremo nel seguito di questo lavoro che tale struttura è integrabile.

Osservazione 17. In maniera analoga è possibile definire una struttura quasi complessa su ogni superficie S bidimensionale orientata immersa in $\mathbb{R}^3$, imponendo

$$J_p(v) := N(p) \times v, \quad \forall p \in S, \forall v \in T_pS,$$

dove abbiamo indicato con N la mappa di Gauss che associa a ogni punto p il vettore normale esterno alla superficie.

La sfera $\mathbb{S}^4$

In questo caso, possiamo applicare un criterio di esistenza per strutture quasi complesse su 4-varietà[5], dovuto a Wen-Tsun Wu. Per la dimostrazione rimandiamo a [20].

Teorema 1.3.7 (Wu). *Sia M una 4-varietà e sia J una struttura quasi complessa su M. Allora,*

$$\begin{aligned} c_1(M) &\equiv w_2(M) \pmod 2, \\ c_1^2(M) &= 2\chi(M) + 3\sigma(M). \end{aligned}$$

Viceversa, se M è una 4-varietà, ed esiste $h \in H^2(M, \mathbb{Z})$ tale che

$$\begin{aligned} h &\equiv w_2(M) \pmod 2, \\ h &= 2\chi(M) + 3\sigma(M), \end{aligned}$$

allora esiste una struttura quasi complessa J su M tale che $h = c_1(M)$.

Osservazione 18. Se (M, J) è una varietà quasi complessa di dimensione $2n$, il suo fibrato tangente TM è un fibrato vettoriale *complesso* di rango n, dunque sono ben definite le classi di Chern $c_i(M) \in H^{2i}(M, \mathbb{Z})$.

Dal teorema, segue immediatamente che $\mathbb{S}^4$ non ammette una struttura quasi complessa. Infatti, per assurdo, avremmo $c_1(\mathbb{S}^4) \in H^2(\mathbb{S}^4, \mathbb{Z}) = (0)$. D'altra parte, tuttavia, $\chi(\mathbb{S}^4) = 2$ e $\sigma(\mathbb{S}^4) = 0$, dunque $2\chi + 3\sigma = 4$ non può essere c_1^2.

La sfera $\mathbb{S}^6$

Dalla costruzione effettuata per $\mathbb{S}^2$ abbiamo visto che, dato un prodotto vettoriale su $\mathbb{R}^k$, è possibile utilizzarlo per definire una struttura quasi complessa su ogni ipersuperficie immersa. È noto che gli unici spazi ad ammettere un prodotto vettoriale con le proprietà necessarie sono $\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^7$. Il caso $\mathbb{R}$ non è di alcun interesse (si avrebbe la struttura quasi complessa - banale - su un punto), perciò rimane da trattare il caso di $\mathbb{R}^7$.
Il prodotto vettoriale su $\mathbb{R}^7$ è bilineare e antisimmetrico, e ha inoltre le seguenti due proprietà:

- $\langle u \times v, w \rangle = \langle u, v \times w \rangle$, per ogni $u, v, w \in \mathbb{R}^7$;
- $(u \times v) \times w + u \times (v \times w) = 2 \langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u - \langle v, u \rangle w$, per ogni $u, v, w \in \mathbb{R}^7$.

Con il simbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotiamo il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^7$.
Osserviamo in particolare che la seconda proprietà implica $u \times (u \times v) = -v$ se $v \perp u$ e $|u| = 1$.

[5]Non esiste una teoria generale delle ostruzioni all'esistenza di strutture quasi complesse su varietà di dimensione pari, ma solo alcune condizioni necessarie. Si osservi, tuttavia, che tali ostruzioni sono esattamente quelle che impediscono l'esistenza di strutture quasi simplettiche.

In maniera analoga allora definiamo la struttura quasi complessa indotta su $\mathbb{S}^6$ come

$$J_p(v) := p \times v, \quad \forall p \in \mathbb{S}^6, \forall v \in T_p\mathbb{S}^6.$$

Di nuovo, tale definizione è generalizzabile a una qualsiasi ipersuperficie orientata $M \subset \mathbb{R}^7$ ponendo

$$J_p(v) := N(p) \times v, \quad \forall p \in M, \forall v \in T_pM,$$

dove N indica la mappa di Gauss.
Si deve a Calabi [4] la dimostrazione che la struttura complessa così definita su $\mathbb{S}^6$ non è integrabile; se $\mathbb{S}^6$ ammetta una struttura complessa è un problema aperto.

Caso generale

Combinando le osservazioni precedenti in dimensione bassa con risultati profondi di topologia algebrica per dimensioni $\geqslant 7$, si ha il seguente teorema, che enunciamo senza dimostrare (il lettore interessato può consultare [3]).

Teorema 1.3.8 (Borel-Serre)**.**
Le uniche sfere che possiedono una struttura quasi complessa sono $\mathbb{S}^2$ *e* $\mathbb{S}^6$*.*

Capitolo 2

Integrabilità di strutture quasi complesse

Cesare Giulio Ardito

Abbiamo visto che una struttura complessa su una varietà M ne induce sempre una quasi complessa, e che il viceversa è in generale falso.
In questo capitolo daremo una condizione necessaria e sufficiente per stabilire se una struttura quasi complessa sia indotta da una struttura complessa, dimostrando il teorema di Newlander-Nirenberg nel caso $\mathcal{C}^\omega$. Concluderemo con alcune considerazioni generali sulla quantità di strutture complesse e quasi complesse su una varietà M.

2.1 Diagonalizzazione di strutture quasi complesse

Sia (M, J) una varietà con una struttura quasi complessa. Per poter diagonalizzare l'endomorfismo J, è necessario complessificare il fibrato tangente, essendo $\pm i$ gli autovalori di J.
Definiamo

$$TM_{\mathbb{C}} := TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Tutti i morfismi reali e gli operatori differenziali di TM si estendono a $TM_{\mathbb{C}}$ per $\mathbb{C}$-linearità. Denotiamo con $T^{1,0}M$ il sottofibrato relativo all'autovalore i di J, e con $T^{0,1}M$ quello relativo a $-i$.

Lemma 2.1.1. *Valgono le seguenti caratterizzazioni:*

- $T^{1,0}M = \{X - iJX \mid X \in TM\}$;
- $T^{0,1}M = \{X + iJX \mid X \in TM\}$;
- $TM_{\mathbb{C}} = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$.

Dimostrazione.
È sufficiente osservare che

$\subset$) $J(X \mp iJX) = JX \mp iJ^2X = JX \pm iX = \pm i(X \mp iJX)$,

$\supset$) se $JX = \pm iX$, allora $X = Y + Y = Y \mp iJ(Y)$, con $2Y = X$,

per mostrare i primi due punti tramite doppia inclusione.
Ogni $Z \in TM_{\mathbb{C}}$ si esprime come $Z = X + i\widetilde{W}$ con $X, \widetilde{W} \in TM$, $\widetilde{W} = JW$, e dunque

$$Z = \frac{1}{2}[(V - W) - iJ(V - W)] + \frac{1}{2}[(V + W) + iJ(V + W)].$$

Avendo espresso Z come somma di un elemento in $T^{1,0}M$ e di uno in $T^{0,1}M$, essendo l'intersezione banalmente vuota (si tratta di sottofibrati relativi a autovalori distinti), anche il terzo punto è dimostrato. □

Osserviamo inoltre che $T^{1,0}M$ è canonicamente isomorfo a TM tramite Re (parte reale), e che tale isomorfismo identifica l'azione di J su $T^{1,0}M$ con quella della moltiplicazione per i su TM.
Si può allora facilmente verificare che $T^{0,1}M = \overline{T^{1,0}M}$.
Siamo dunque riusciti nell'intento di diagonalizzare J.

Definizione 2.1.1. I fibrati $T^{1,0}M$ e $T^{0,1}M$ sono detti rispettivamente *fibrato tangente olomorfo* e *fibrato tangente antiolomorfo* alla varietà M.

Osservazione 19. Sia (M, J) una varietà quasi complessa di dimensione reale $n = 2m$, e sia $TM_{\mathbb{C}} = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$ una decomposizione del fibrato tangente complessificato, come sopra. Denotiamo con $\Omega_M := \left(T^{1,0}M\right)^*$ il *fibrato cotangente olomorfo* alla varietà M, con $\Omega^k_M := \bigwedge^k \Omega_M$, per $k \geqslant 0$, il fibrato delle *k-forme differenziali olomorfe* su M, e con $K_M := \Omega^m_M$ il *fibrato lineare canonico* di M. È possibile definire su M una struttura quasi complessa equivalentemente assegnando la J, o la decomposizione $TM_{\mathbb{C}} = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$, o il fibrato lineare K_M. Questa osservazione sarà rilevante nella terza parte del nostro seminario.

2.2 Il teorema di Frobenius

Prima di poter enunciare il teorema principale di questo capitolo, occorre fissare alcuni prerequisiti. Il principale è il teorema di Frobenius, da cui poi faremo seguire facilmente la versione reale analitica del teorema di Newlander-Nirenberg. In realtà tale risultato riguarda una teoria molto più ampia di quella a cui siamo interessati; noi ci limiteremo a definire gli oggetti principali necessari a enunciare il teorema e a dimostrarne qualche semplice proprietà essenziale per la comprensione.

2.2.1 Il bracket di campi vettoriali

Un campo vettoriale X di classe $\mathcal{C}^\ell$ su una varietà M definisce una derivazione da $\mathcal{C}^k(M)$ a $\mathcal{C}^{k-1}(M)$, per ogni $k \leqslant \ell + 1$, nel seguente modo:

$$X : \mathcal{C}^k(M) \to \mathcal{C}^{k-1}(M), \quad X(f) := df(X).$$

Viceversa, data una derivazione, essa associa a ogni punto di M un vettore tangente, fornendo un campo vettoriale $\mathcal{C}^{k-1}$. Grazie a ciò possiamo definire il bracket di due campi vettoriali come il campo vettoriale corrispondente alla derivazione $X \circ Y - Y \circ X$. Il seguente lemma (che non dimostriamo) garantisce la buona definizione.

Lemma 2.2.1. *Siano X e Y due derivazioni da $\mathcal{C}^{\ell+1}(M)$ a $\mathcal{C}^{\ell}(M)$, con $l > 1$. Allora il bracket $[X, Y] := X \circ Y - Y \circ X$ è una derivazione da $\mathcal{C}^2(M)$ a $\mathcal{C}^0(M)$.*

Il seguente lemma dà un utile espressione locale del bracket di due campi vettoriali.

Lemma 2.2.2. *Siano $x_1, \ldots, x_n$ coordinate locali su M, e siano X e Y due campi vettoriali su M, descritti in tali coordinate da:*

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Allora, nelle suddette coordinate, il bracket $[X, Y]$ di X e Y è descritto da:

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^{n} (X(Y_i)) - Y(X_i)) \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{2.2.1}$$

Dimostrazione.
Sia f una funzione $\mathcal{C}^2$. Si ha

$$\begin{aligned}
(X \circ Y)(f) &= X \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(Y_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_j \left(\frac{\partial Y_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} Y_i \right),
\end{aligned}$$

e analogamente

$$(Y \circ X)(f) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} Y_j \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} X_i \right)$$

da cui, sempre in coordinate

$$[X, Y](f) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_i} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_i} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

che è evidentemente l'espressione cercata. □

2.2.2 Distribuzioni

Introduciamo ora un altro degli oggetti necessari ad enunciare il teorema di Frobenius.

Definizione 2.2.1. Sia M una varietà differenziabile n-dimensionale.

1. Una *distribuzione* E su M è un sottofibrato $\mathcal{C}^\infty$ di rango k del fibrato tangente alla varietà.

2. Una distribuzione E si dice *integrabile* se M è ricoperta da aperti U in modo che esista un'applicazione

$$\phi_U : U \to \mathbb{R}^{n-k}$$

di classe $\mathcal{C}^\ell$ tale che per ogni $p \in U$ il sottospazio vettoriale $E_p \subset TM_p$ sia uguale a $\ker d\phi_U(p)$.

Osservazione 20. Prima di procedere, apriamo una piccola parentesi su un eventuale approccio alternativo.
Una *foliazione* k-dimensionale è una decomposizione locale di una varietà come unione di sottovarietà parallele di dimensione inferiore (foglie) in modo che esista una parametrizzazione ϕ di ogni intorno aperto U tale che $\phi(U)$ è il prodotto di due aperti in $\mathbb{R}^k$ e $\mathbb{R}^{n-k}$.
Ogni foliazione k-dimensionale individua in modo naturale una distribuzione di rango k integrabile, identificando su ogni punto un sottospazio di dimensione k dello spazio tangente. Il teorema di Frobenius per foliazioni mostra che vale il viceversa, ovvero che ogni distribuzione integrabile dà luogo a una foliazione.
Vedremo che ogni struttura quasi complessa determina una distribuzione sulla varietà, e che esiste una struttura complessa che la induce se e solo se tale distribuzione risulta integrabile. C'è dunque un legame profondo tra i due problemi.
Il lettore interessato ad un approccio a questo problema tramite la teoria delle foliazioni può consultare [5].

È possibile dare una definizione analoga di distribuzione per una varietà complessa.

Definizione 2.2.2. Sia M una varietà complessa di dimensione n.

1. Una *distribuzione olomorfa* E su M è un sottofibrato olomorfo di rango k del fibrato tangente olomorfo alla varietà.

2. Una distribuzione olomorfa E si dice *integrabile* se M è ricoperta da aperti U in modo che esista un'applicazione

$$\phi_U : U \to \mathbb{C}^{n-k}$$

olomorfa tale che per ogni $p \in U$ il sottospazio vettoriale $E_p \subset TM_p$ sia uguale a $\ker d\phi_U(p)$.

2.2.3 Teoremi di Frobenius

Enunciamo ora il teorema di Frobenius nella forma che più si adatta ai nostri scopi. Teniamo a precisare che il teorema ha enunciati equivalenti e applicazioni in moltissimi ambiti anche molto diversi, tra cui la teoria delle equazioni alle derivate parziali.

Teorema 2.2.3 (Frobenius)**.** *Sia M una varietà differenziabile n-dimensionale. Una distribuzione E su M è integrabile se e solo se per ogni X, Y campi vettoriali $\mathcal{C}^\ell$ su M, contenuti in E, $[X, Y]$ è ancora contenuto in E, cioé se $[E, E] \subset E$.*

Non dimostriamo questo risultato in generale, essendo la dimostrazione molto tecnica e non pertinente agli scopi del seminario. Il lettore interessato può consultare [18].

Utilizzeremo anche un'altra versione del teorema, che segue da quello più generale e riguarda le distribuzioni olomorfe su varietà complesse. Anche in questo caso non entriamo nei dettagli della dimostrazione, limitandoci a fornirne l'idea generale.

Teorema 2.2.4 (Frobenius per distribuzioni olomorfe)**.** *Sia M una varietà complessa di dimensione n, e sia E una distribuzione olomorfa di rango k su M. Allora E è integrabile in senso olomorfo se e solo se $[E, E] \subset E$*

Idea di dimostrazione.
Per quanto visto in precedenza, l'integrabilità in senso olomorfo di E implica che la distribuzione reale di rango $2k$ $\mathrm{Re}\, E$ indotta su TM (fibrato tangente reale, vedendo M come varietà reale analitica di dimensione $2n$ con l'atlante reale analitico indotto in modo canonico da quello complesso) soddisfa la condizione del teorema di Frobenius, ed è dunque integrabile. Ne segue che M è ricoperto da aperti U tali che esistono

$$\phi_U : U \to V,$$

con V aperto in $\mathbb{R}^{2(n-k)}$, che soddisfano la condizione di integrabilità.

Si mostra che esiste una struttura complessa sull'immagine di ϕ rispetto alla quale ϕ_U è olomorfa.
Infatti, detto $v = \phi_U(u)$ essendo $\mathrm{Re}\, E$ stabile rispetto all'azione di J struttura quasi complessa indotta su TU, quest'ultima induce una struttura complessa su

$$T_v V = T_u U / \mathrm{Re}\, E$$

che non dipende dalla scelta di u nella fibra di ϕ_U sopra v.
Esiste dunque una struttura quasi complessa su V per la quale il differenziale di ϕ_U è $\mathbb{C}$-lineare in ogni punto. Per mostrarne l'integrabilità occorre considerare una sottovarietà complessa di U trasversa alle fibre di ϕ_U, che esiste a meno di restringere U. Tale sottovarietà è (localmente) isomorfa a V tramite ϕ_U, e l'isomorfismo risulta compatibile con le strutture quasi complesse dei due spazi. Allora V riceve la struttura complessa di tale sottovarietà, che in particolare ne induce la struttura quasi complessa. Essa è perciò integrabile.

2.3 Il teorema di Newlander-Nirenberg

Definizione 2.3.1. Dato un endomorfismo di fibrati $A : TM \to TM$, per ogni coppia X e Y di campi vettoriali su M, il tensore di tipo $(2,1)$ definito da:

$$N_A(X,Y) := -A^2[X,Y] + A([AX,Y] + [X,AY]) - [AX,AY]$$

si dice *tensore di Nijenhuis* associato ad A.

In particolare data una struttura quasi complessa J su una varietà M è dunque possibile associarle N_J definito come sopra. Tale tensore misura la *torsione* della struttura (è dunque nullo su una struttura complessa).

Enunciamo la versione del teorema di Newlander-Nirenberg per (M,J) reale analitica. Il teorema è vero anche assumendo una regolarità minore [10], ma quest'ipotesi più forte permette di far seguire il teorema dal teorema di Frobenius. In particolare osserviamo che una qualsiasi varietà con una struttura complessa ammette una struttura reale analitica, e che dunque aggiungere all'ipotesi tale condizione è solamente una facilitazione nel dimostrare un verso dell'equivalenza, non escludendo in realtà alcun caso.

Teorema 2.3.1 (Newlander-Nirenberg $\mathcal{C}^\omega$)**.** *Sia (M,J) una varietà quasi complessa reale analitica. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *J è integrabile;*
2. *Il sottofibrato $T^{0,1}M$ di $TM_{\mathbb{C}}$ è integrabile;*
3. *$[T^{0,1}M, T^{0,1}M] \subset T^{0,1}M$ (o equivalentemente $[T^{1,0}M, T^{1,0}M] \subset T^{1,0}M$);*
4. *$N_J(X,Y) = 0 \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$.*

Dimostrazione.

$\boxed{2 \Leftrightarrow 3}$ Il sottofibrato $T^{0,1}M$ è in particolare una distribuzione di rango n sul fibrato tangente complessificato. L'equivalenza è allora data dal teorema di Frobenius.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Sia $\phi_U : U \to W$, con $U \subset M$, $W \subset \mathbb{C}^m$ una carta locale, e siano $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$, con $\alpha = 1, \dots, n$, coordinate. Identificando $\mathbb{C}^n$ con $\mathbb{R}^{2n}$ nel modo consueto, detta $\{e_a\}_{\alpha=1}^{2n}$ la base canonica, per definizione

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} = (d\phi)^{-1}(e_\alpha), \quad \frac{\partial}{\partial y_\alpha} = (d\phi)^{-1}(e_{\alpha+m}).$$

Si verifica facilmente che

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial y_\alpha}, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}.$$

Come di consueto, definiamo

$$\frac{\partial}{\partial z_\alpha} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} - i\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_\alpha} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + i\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right).$$

Sia $p \in U$. Per il Lemma 2.1.1, le derivazioni

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}\Big|_p$$

formano una base di $T_pM_\mathbb{C}$, composta da un elemento di $T_p^{1,0}M$ e uno di $T_p^{0,1}M$.
Vogliamo ora mostrare che, dati $X, Y \in T^{0,1}M$, $[X,Y] \in T^{0,1}M$. Il calcolo si può svolgere facilmente in coordinate

$$[X,Y](p) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} X_\alpha \frac{\partial Y_\beta}{\partial \overline{z}_\alpha}\frac{\partial}{\partial \overline{z}_\beta}\Big|_p - \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} Y_\alpha \frac{\partial X_\beta}{\partial \overline{z}_\alpha}\frac{\partial}{\partial \overline{z}_\beta}\Big|_p$$

che è un espressione in coordinate di $[X,Y]$ solo in termini delle $\frac{\partial}{\partial \overline{z}_\alpha}$, il che conclude la dimostrazione.

$\boxed{3 \Rightarrow 4}$ Abbiamo visto che dato un campo vettoriale $X \in \mathcal{X}(M)$ possiamo sempre scomporlo nella somma di due elementi, uno in $T^{1,0}M$ (parte olomorfa) e uno in $T^{0,1}M$ (parte antiolomorfa). Li indichiamo rispettivamente con X^{o} e $\overline{X^{\mathrm{o}}}$. Ricordiamo che $X^{\mathrm{o}} = \frac{1}{2}(X - iJX)$.
Per bilinearità di N_J, vale

$$N_J(X,Y) = N_J(X^{\mathrm{o}}, Y^{\mathrm{o}}) + N_J(X^{\mathrm{o}}, \overline{Y^{\mathrm{o}}}) + N_J(\overline{X^{\mathrm{o}}}, Y^{\mathrm{o}}) + N_J(\overline{X^{\mathrm{o}}}, \overline{Y^{\mathrm{o}}}).$$

É sufficiente mostrare che ognuno dei quattro addendi è nullo.

$$\begin{aligned} 4N_J(\overline{X^{\mathrm{o}}}, Y^{\mathrm{o}}) &= [X + iJX, Y - iJY] + J[JX - iX, Y - iJY] + \\ &+ J[X + iJX, JY + iY] - [JX - iX, JY + iY] \\ &= [X,Y] - i[X,JY] + i[JX,Y] + [JX,JY] + \\ &- [JX,JY] + i[X,JY] - i[JX,Y] - [X,Y] = 0. \end{aligned}$$ [1]

Analogamente si mostra $N_J(X^{\mathrm{o}}, \overline{Y^{\mathrm{o}}}) = 0$.
Sviluppando gli altri due addendi si ottiene invece

$$\begin{aligned} N_J(\overline{X^{\mathrm{o}}}, \overline{Y^{\mathrm{o}}}) &= [\overline{X^{\mathrm{o}}}, \overline{Y^{\mathrm{o}}}] - iJ[\overline{X^{\mathrm{o}}}, \overline{Y^{\mathrm{o}}}], \\ N_J(X^{\mathrm{o}}, Y^{\mathrm{o}}) &= [X^{\mathrm{o}}, Y^{\mathrm{o}}] + iJ[X^{\mathrm{o}}, Y^{\mathrm{o}}]. \end{aligned}$$

[1] Infatti:

$$\begin{aligned} &J[JX,Y] + J[X,JY] = J([JX,Y] + [X,JY]) \\ &= J([JX,Y] - i[JX,JY] - i[X,Y] - [X,JY] + [X,JY] + i[JX,JY] + i[X,Y] - [JX,Y]) \\ &= J(0) = 0. \end{aligned}$$

Grazie all'ipotesi di integrabilità di $T^{0,1}M$ e $T^{1,0}M$ tali quantità sono nulle. Questo mostra l'annullarsi di N_J su $\mathcal{X}(M)$.

$\boxed{4 \Rightarrow 3}$ Vogliamo mostrare che $\forall A, B \in T^{0,1}M,\ [A, B] \in T^{0,1}M$.
Per la caratterizzazione 2.1.1 esistono $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ tali che

$$A = X + iJX, \quad B = Y + iJY.$$

Vogliamo dimostrare la seguente identità, che equivale alla tesi:

$$[A, B] - iJ[A, B] = N_J(X, Y) - iJN_J(X, Y).$$

Infatti essendo per ipotesi $N_J = 0$ si avrebbe

$$[A, B] = iJ[A, B] \iff -i[A, B] = J[A, B],$$

cioé $[A, B] \in T^{0,1}M$.
Sviluppando il primo membro si ha

$$\begin{aligned}
[A, B] - iJ[A, B] &= [X, Y] + i[JX, Y] + i[X, JY] - [JX, JY]+ \\
&\quad - iJ[X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] + iJ[JX, JY] \\
&= ([X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY]) + \\
&\quad + (-iJ[X, Y] + i[JX, Y] + i[X, JY] + iJ[JX, JY]) = \\
&= N_J(X, Y) - iJN_J(X, Y).
\end{aligned}$$

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$ Questa è la parte difficile del teorema, nonché l'unica in cui utilizzeremo la semplificazione di aver supposto che l'atlante di M e la struttura quasi complessa J siano reali analitici.
Essendo tutte le relazioni coinvolte locali, senza perdita di generalità possiamo dimostrare la tesi localmente, cioé su U aperto di $\mathbb{R}^{2n}$.
Sia dunque ϕ la carta locale relativa ad U. Essendo per ipotesi reale analitica, a meno di restringere U si può esprimere ϕ come serie di potenze. Consideriamo ora la medesima serie di potenze vista su $\mathbb{C}^{2n}$, e sia $U_{\mathbb{C}}$ un intorno in $\mathbb{C}^{2n}$ di U ove essa converge.

Osserviamo ora che la struttura quasi complessa J determina in particolare una mappa reale analitica

$$W : U \to \operatorname{End} \mathbb{R}^{2n}, \quad u \mapsto J_u,$$

dove $J_u^2 = -\mathrm{Id}$ per definizione. Con un ragionamento analogo al precedente è possibile estendere W a una mappa $\widetilde{W} : U_{\mathbb{C}} \to \operatorname{End} \mathbb{C}^{2n}$ olomorfa. Detto $\widetilde{J}_u := \widetilde{W}(u)$, è immediato osservare che vale ancora $\widetilde{J}_u^2 = -\mathrm{Id}$. Abbiamo dunque esteso la struttura quasi complessa a $U_{\mathbb{C}}$ in maniera olomorfa. Indichiamo tale estensione con $\widetilde{J}$.

Il morfismo $\widetilde{J}$ determina una distribuzione $E_{\mathbb{C}}$ di rango n su $U_{\mathbb{C}}$, definendo

$$E_{\mathbb{C},p} \subset T_p(U_{\mathbb{C}}) \cong \mathbb{C}^{2n} \quad ^2$$

come l'autospazio relativo all'autovalore $-i$ di $\widetilde{J}$.
Per definizione $\forall u \in U$, $E_{\mathbb{C},u} = T^{0,1}_u U \subset T_u U \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^{2n}$.
È allora immediato notare che la condizione $[T^{0,1}U, T^{0,1}U] \subset T^{0,1}U$ implica che $[E_{\mathbb{C}}, E_{\mathbb{C}}] \subset E_{\mathbb{C}}$: infatti così come le sezioni di $T^{0,1}U$ sono generate da $X + iJX$, con X campo vettoriale reale su U, le sezioni di $E_{\mathbb{C}}$ su $U_{\mathbb{C}}$ sono generate da $Z + i\widetilde{J}Z$ con Z campo vettoriale complesso su $U_{\mathbb{C}}$ (con dimostrazione identica al caso reale).

Allora per la versione olomorfa del teorema di Frobenius, sempre a meno di restringere $U_{\mathbb{C}}$, esiste una sommersione olomorfa

$$\phi : U_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}^{2n-n} = \mathbb{C}^n.$$

Se mostriamo che $\phi|_U$ è un diffeomorfismo, abbiamo dato una struttura complessa ad U.
Identificando $T_u U$ con $\mathbb{R}^{2n}$ in $T_u(U_{\mathbb{C}}) \cong \mathbb{C}^{2n}$, ricordando che $E_{\mathbb{C},u}$ si identifica con $T^{0,1}_u U$, si ha la trasversalità di questi due spazi. Questo implica che $d\phi(u)|_{T_u U}$ è un isomorfismo, da cui (per il teorema di inversione locale) $\phi|_U$ è un diffeomorfismo in un intorno di u.
Per concludere la dimostrazione dobbiamo infine mostrare che la struttura quasi complessa indotta dalla struttura complessa appena definita 1.3.2 coincide con J.
Questo equivale a verificare che

$$d\phi(u) : T_u U \to T_{\phi(u)}\mathbb{C}^n$$

identifica J con la struttura usuale di $\mathbb{C}^n$, ovvero con la moltiplicazione per i. Questo è equivalente a mostrare che

$$T_u U \hookrightarrow T_u(U_{\mathbb{C}}) \to T_u(U_{\mathbb{C}})/E_{\mathbb{C},u} \cong T_u U \quad ^3$$

è $\mathbb{C}$-lineare, dove $T_u U$ ha a sinistra la struttura $\mathbb{C}$-lineare data da J, e a destra eredita tramite il quoziente l'usuale struttura di $\mathbb{C}^{2n} \cong T_u(U_{\mathbb{C}})$.
Ricordando che, su U, $E_{\mathbb{C},u}$ è generato dagli elementi del tipo $X + iJX$, si ha che nel quoziente vale $Y = -iJY$, $\forall Y \in T_u U$, da cui $iY = JY$.

□

[2] Qui $T(U_{\mathbb{C}})$ indica il fibrato tangente olomorfo di $U_{\mathbb{C}}$.

[3] Più correttamente andrebbe scritto

$$T_u U \hookrightarrow T_u U_{\mathbb{C}} \to T_u U_{\mathbb{C}}/\mathrm{Re}\, E_u \cong T_u U.$$

Infatti qui stiamo considerando $E_{\mathbb{C}}$ come distribuzione **reale** $\mathrm{Re}\, E$ di rango $2n$ sullo spazio tangente reale a $U_{\mathbb{C}}$ (analogamente a quanto fatto nella dimostrazione del Teorema 2.2.4), per poi mostrare che tali applicazioni rispettano le strutture complesse date. Si è preferito omettere questa distinzione a beneficio della chiarezza.

Osservazione 21. Il teorema di Newlander-Nirenberg mostra come, data una struttura quasi complessa J su una varietà differenziabile M, con $N_J = 0$, o, equivalentemente, con $[T^{0,1}M, T^{0,1}M] \subset T^{0,1}M$, per ogni $p \in M$ sia possibile trovare un sistema di coordinate locali $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ attorno a p tali che J sia localmente della forma:

$$J = \sum_{i=1}^{n} \left(dx_i \otimes \frac{\partial}{\partial y_i} - dy_i \otimes \frac{\partial}{\partial x_i} \right).$$

In altri termini, ogni varietà quasi complessa con le suddette proprietà è localmente isomorfa al modello standard $(\mathbb{R}^{2n}, J_0)$, ovvero $\mathbb{C}^n$. È evidente, dunque, come questo teorema sia un analogo quasi complesso del teorema di Darboux per varietà simplettiche. Questa osservazione sarà di fondamentale importanza nella terza parte del seminario.

2.3.1 Esempi e controesempi

Superfici di Riemann

Nel caso delle superfici di Riemann dare una struttura quasi complessa equivale a dare una struttura complessa. La seguente proposizione lo dimostra usando il teorema di Newlander-Nirenberg

Proposizione 2.3.2. *Ogni struttura quasi complessa su una superficie di Riemann* Σ *è integrabile*

Dimostrazione.
Sia J una struttura quasi complessa su Σ.
È sufficiente considerare il tensore di Nijenhuis associato a J, e osservare che, per come è definito, ha le seguenti proprietà

- $N_J(X, X) = 0$;
- $N_J(X, JX) = 0$.

Allora $N_J = 0$ su una superficie di Riemann Σ.

□

Osservazione 22. Osserviamo che in particolare $\mathbb{S}^2$ è omeomorfa alla sfera di Riemann, pertanto deduciamo dalla proposizione che la struttura quasi complessa su $\mathbb{S}^2$ definita tramite il prodotto vettoriale di $\mathbb{R}^3$ nel Capitolo 1 è integrabile.

Varietà di Calabi-Eckmann

Si consideri $M = \mathbb{S}^{2n+1} \times \mathbb{S}^{2m+1}$. Dette n_1, n_2 le normali esterne delle sfere $\mathbb{S}^{2n+1}$ e $\mathbb{S}^{2m+1}$ immerse in $\mathbb{C}^{n+1}$ e $\mathbb{C}^{m+1}$ rispettivamente, e dette J_1, J_2 le strutture complesse canoniche sui due spazi complessi, risulta che J_1n_1 e J_2n_2 sono campi vettoriali globalmente definiti sulle corrispondenti sfere, da cui ogni campo vettoriale $X \in \mathcal{X}(\mathbb{S}^{2n+1} \times \mathbb{S}^{2m+1})$ si può scrivere come

$$X = X_1 + X_2 + a_1(X)J_1n_1 + a_2(X)J_2n_2,$$

con X_1 tangente a $\mathbb{S}^{2n+1}$ e perpendicolare a $J_1 n_1$, X_2 tangente a $\mathbb{S}^{2m+1}$ e perpendicolare a $J_2 n_2$.
Si definisce allora una struttura quasi complessa J come

$$JX := J_1 X_1 + J_2 X_2 - a_2 J_1 n_1 + a_1 J_2 n_2.$$

Questa struttura quasi complessa è in effetti integrabile, e dunque il prodotto di due sfere di dimensione dispari possiede una struttura complessa. Per verificarlo utilizziamo il teorema di Newlander-Nirenberg; è infatti possibile verificare (un calcolo semplice ma lungo che omettiamo) che il tensore di Nijenhuis associato a J è nullo [16].
Osserviamo che queste varietà sono una generalizzazione del caso $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \cong \mathbb{T}^2$.

Somme connesse di $\mathbb{CP}^2$

Il piano proiettivo complesso $\mathbb{CP}^2$ è un esempio di varietà complessa bidimensionale: pertanto, se ne considerassimo la struttura quasi complessa indotta, la condizione di Newlander-Nirenberg sarebbe verificata.

Vogliamo analizzare $W_k := \mathbb{CP}^2 \# \dots \# \mathbb{CP}^2$ (k addendi)[4], che ha naturalmente una struttura di varietà differenziabile reale 4-dimensionale orientata (ottenuta dalla struttura di $\mathbb{CP}^2$ come varietà reale 4-dimensionale orientata).
Dal Teorema 1.3.7 si ha che W_k possiede una struttura quasi complessa se e solo se k è dispari. Infatti un facile corollario del teorema mostra che una condizione necessaria perché una varietà M ammetta una struttura quasi complessa è $\chi(M) + \sigma(M) \equiv 0 \pmod 4$.
Poiché $\chi(\mathbb{CP}^2 \# \mathbb{CP}^2) = 4$ e $\sigma(\mathbb{CP}^2 \# \mathbb{CP}^2) = 2$, tale condizione non può essere verificata. Vale un ragionamento analogo per W_{2k} con k qualsiasi.
Con un procedimento simile si dimostra che se due varietà ammettono una struttura quasi complessa allora la loro somma connessa non ne ammette una (si veda [1] per una trattazione più dettagliata).

In realtà W_k non ammette una struttura complessa per ogni $k > 1$. Per la dimostrazione nel caso k dispari rimandiamo a [2]. Dunque la varietà W_k forniscono sia un esempio di varietà reale 4-dimensionale che non ammette strutture quasi complesse, sia un esempio di varietà con struttura quasi complessa che non ammette strutture complesse.

Considerando il caso generale, non appena si passa a dimensione complessa 2 (o superiore) cominciano ad apparire esempi di varietà che non ammettono strutture complesse ma ne ammettono di quasi complesse, evidentemente non integrabili. È degno di nota il fatto che tali esempi non appaiono come casi speciali; si può anzi affermare che una gran parte delle varietà reali di dimensione 4 non ammette una struttura complessa [17].

[4] È sottinteso che tutti gli addendi della somma connessa hanno la stessa orientazione.

2.4 Osservazioni conclusive

Grazie al teorema di Newlander-Nirenberg, sappiamo che data una struttura quasi complessa su una varietà differenziabile (M, J) non è detto che ne esista una complessa che la induce. Le domande che sorgono spontanee sono due:

- M ammette una struttura complessa?
- Se sì, quante delle strutture quasi complesse sono integrabili?

Abbiamo già risposto negativamente alla prima domanda, con il controesempio in dimensione reale 4. Ad oggi tuttavia non esiste un teorema che permetta di stabilire se una qualsiasi varietà M con J quasi complessa (non integrabile) ammetta o no una struttura complessa. Si pensi ad esempio che, come già detto, l'esistenza di una struttura complessa su $\mathbb{S}^6$ è un problema aperto.

Stabilire se una varietà ammetta o meno una struttura quasi complessa è una questione topologica: abbiamo visto nel Capitolo 1 (Osservazione 3) che l'esistenza di una struttura quasi complessa su una varietà M consente di operare una riduzione del gruppo di struttura di TM a $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. In realtà si può dimostrare che l'esistenza di una tale riduzione sul fibrato tangente implica che M ammette una struttura quasi complessa.
Una simile caratterizzazione lascia intuire che le strutture quasi complesse sono molte di più di quelle complesse[5]: questo è vero, e con strumenti di teoria delle deformazioni si riesce a dimostrare che le strutture complesse sono parametrizzate (localmente) da uno spazio di dimensione finita. Infatti data una piccola variazione $\varphi(t),\ t = (t_1, \dots, t_m)$ di una struttura complessa si ha una definizione precisa dei punti t per i quali $\varphi(t)$ è ancora una struttura complessa, ovvero $t \in B = \left\{ t | \overline{\partial}\varphi(t) = \frac{1}{2}[\phi(t), \phi(t)] \right\}$. Al contrario le strutture quasi complesse ammettono un numero molto maggiore di variazioni, tanto da riuscire a parametrizzarsi solo in uno spazio di dimensione infinita. La dimostrazione di questo fatto va ben al di là degli scopi di questo seminario; il lettore interessato può consultare [6].

[5]Non esiste ovviamente un criterio analogo per l'esistenza di strutture complesse, essendo questo un problema che necessita degli strumenti della geometria differenziale.

Capitolo 3

Strutture complesse e quasi complesse generalizzate

Federico Amadio

In quest'ultima parte del nostro seminario, presenteremo una breve introduzione alla geometria complessa generalizzata, con particolare attenzione ai fondamenti e agli aspetti di base. Più precisamente, ci occuperemo anzitutto della definizione rigorosa delle strutture, attraverso punti di vista equivalenti, discutendone in seguito gli esempi e le prime proprietà.

Le strutture complesse e quasi complesse generalizzate sono state introdotte da Nigel Hitchin [9], nel contesto delle varietà di Calabi-Yau, con l'intento di "unificare" i due ambiti della geometria complessa e della geometria simplettica. In seguito, la teoria ha avuto un ulteriore sviluppo e ha raggiunto una maggiore sistematizzazione con il lavoro di Marco Gualtieri [8].

L'approccio "unificante" proposto dalla geometria complessa generalizzata ha avuto delle fondamentali applicazioni nel campo della fisica teorica, in particolare in teoria delle stringhe e delle superstringhe. Il contesto più direttamente interessato riguarda la teoria della simmetria speculare, ove le relazioni fra strutture complesse e strutture simplettiche risultano maggiormente evidenti. Almeno intuitivamente, la simmetria speculare può essere pensata, da un punto di vista generalizzato, in termini di una trasformazione di strutture complesse generalizzate, semplificando notevolmente la visione originaria che prevedeva una qualche nozione di scambio fra strutture complesse e simplettiche.

Nella trattazione che segue, introdurremo dapprima (sezione 3.1) le definizioni e i risultati fondamentali nel caso lineare, come per le strutture complesse e le strutture simplettiche. Successivamente, passeremo al caso delle varietà differenziabili, cercando di riferire le costruzioni lineari precedentemente realizzate alle fibre di opportuni fibrati vettoriali. A tale proposito, sarà necessario introdurre, nella sezione 3.2, le nozioni, forse un po' tecniche, di algebroide di Courant, bracket di Courant e algebroide di Courant esatto su una varietà. Per semplicità, ci ridurremo al fibrato somma diretta del fibrato tangente e del fibrato cotangente alla varietà, su cui considereremo la struttura di algebroide di Courant esatto detta standard. Seguirà una classificazione delle simmetrie degli algebroidi di Courant esatti standard, che occuperà la sezione 3.3. Nelle sezioni 3.4 e 3.5, introdurremo le nozioni di struttura quasi di Dirac e di Dirac su una varietà, di struttura spin e del relativo fibrato di spinori. Nella sezione 3.6, passeremo finalmente a definire le strutture quasi complesse generalizzate, esaminandone le relazioni con le strutture di Dirac e con i fibrati di spinori. Introdurremo in seguito, nella sezione 3.7, le strutture quasi complesse generalizzate integrabili, ovvero le strutture complesse generalizzate. Concluderemo con un teorema di struttura locale per varietà con struttura complessa generalizzata, noto come teorema di Darboux generalizzato. Un enunciato rigoroso del suddetto risultato è contenuto nella sezione 3.8; la dimostrazione è omessa.

Per intraprendere uno studio di questa teoria suggeriamo la lettura del testo di Gualtieri [8], a cui faremo spesso riferimento.

3.1 Caso lineare

3.1.1 Spazi vettoriali doppi

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n. Consideriamo uno spazio vettoriale reale $\mathcal{D}V$ di dimensione $2n$, detto *doppio* di V, munito di un accoppiamento non degenere $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e di una proiezione suriettiva

$$\pi : \mathcal{D}V \to V$$

su V, con nucleo isotropo. L'accoppiamento non degenere di $\mathcal{D}V$, dunque, avrà necessariamente segnatura (n, n). Identificando $(\mathcal{D}V)^*$ con $\mathcal{D}V$ per mezzo del suddetto accoppiamento, otteniamo un morfismo iniettivo

$$\frac{1}{2}\pi^* : V^* \to \mathcal{D}V,$$

che ci permette di vedere V^* come un sottospazio di $\mathcal{D}V$. Inoltre, si verifica facilmente che $\pi^*(V^*) = \ker \pi$, dunque è definita una successione esatta

$$0 \to V^* \xrightarrow{\frac{1}{2}\pi^*} \mathcal{D}V \xrightarrow{\pi} V \to 0$$

di spazi vettoriali. Considerando uno splitting isotropo:

$$\nabla : V \to \mathcal{D}V$$

di π, ovvero tale che $\nabla(V)$ sia un sottospazio isotropo di $\mathcal{D}V$, abbiamo un isomorfismo di spazi vettoriali

$$\mathcal{D}V \cong V \oplus V^*,$$

e l'accoppiamento si riduce all'accoppiamento naturale:

$$\langle X + \xi, Y + \eta \rangle = \frac{1}{2} \left(\xi(Y) + \eta(X) \right), \quad \forall X, Y \in V,\, \xi, \eta \in V^*.$$

3.1.2 Simmetrie

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e sia $\mathcal{D}V$ il suo doppio, con accoppiamento non degenere $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e proiezione π su V. Esistono isomorfismi di gruppi di Lie:

$$\mathrm{O}(\mathcal{D}V) \cong \mathrm{O}_{n,n}(\mathbb{R}), \quad \mathrm{SO}(\mathcal{D}V) \cong \mathrm{SO}_{n,n}(\mathbb{R}).$$

Ci soffermeremo ora sullo studio di alcune particolari simmetrie di $\mathcal{D}V$. Osserviamo, anzitutto, che l'algebra di Lie di $\mathrm{SO}(\mathcal{D}V)$ è data da:

$$\mathfrak{so}(\mathcal{D}V) = \{T \in \mathfrak{gl}(\mathcal{D}V) \mid \langle Tx, y\rangle + \langle x, Ty\rangle = 0, \forall x, y \in \mathcal{D}V\}.$$

Fissando un isomorfismo $\mathcal{D}V \cong V \oplus V^*$, possiamo scrivere ogni $T \in \mathfrak{so}(\mathcal{D}V)$ nella forma:

$$T = \begin{pmatrix} A & \beta \\ B & -A^* \end{pmatrix},$$

dove $A \in \mathfrak{gl}(V)$, mentre $B : V \to V^*$ e $\beta : V^* \to V$ sono applicazioni lineari antiautoaggiunte, ovvero $B^* = -B$ e $\beta^* = -\beta$.

Possiamo pensare B e β rispettivamente come elementi di $\bigwedge^2 V^*$ e di $\bigwedge^2 V$, attraverso $B(X) = i_X B$ e $\beta(\xi) = i_\xi \beta$, con $X \in V$ e $\xi \in V^*$. In questo modo, otteniamo una decomposizione:

$$\mathfrak{so}(\mathcal{D}V) \cong \mathfrak{gl}(V) \oplus \bigwedge^2 V^* \oplus \bigwedge^2 V.$$

Le speciali simmetrie a cui siamo interessati sono:

1. Sia $A \in \mathfrak{gl}(V)$ pensato come elemento di $\mathfrak{so}(\mathcal{D}V)$. Allora:

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} \exp A & 0 \\ 0 & (\exp A^*)^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(\mathcal{D}V).$$

   Ogni trasformazione in $\mathrm{GL}^+(V)$ è della forma $\exp A$, per qualche $A \in \mathfrak{gl}(V)$. Dunque, possiamo vedere $\mathrm{GL}^+(V)$ come sottogruppo di $\mathrm{SO}(\mathcal{D}V)$. Inoltre, tale immersione può essere estesa a tutto il gruppo $\mathrm{GL}(V)$. Otteniamo, in questo modo, un'importante classe di trasformazioni di $\mathcal{D}V$.

2. Sia $B \in \bigwedge^2 V^*$ pensato come elemento di $\mathfrak{so}(\mathcal{D}V)$. Allora:

$$\exp(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(\mathcal{D}V).$$

   Una trasformazione di $\mathcal{D}V$ di questo tipo è detta una B-*trasformazione*.

3. Sia $\beta \in \bigwedge^2 V$ pensato come elemento di $\mathfrak{so}(\mathcal{D}V)$. Allora:

$$\exp(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(\mathcal{D}V).$$

   Una trasformazione di $\mathcal{D}V$ di questo tipo è detta una β-*trasformazione*.

3.1.3 Strutture di Dirac lineari

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e sia $\mathcal{D}V$ il suo doppio, con accoppiamento non degenere $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e proiezione π su V. Introduciamo la seguente definizione:

Definizione 3.1.1. Una *struttura di Dirac lineare* su V è un sottospazio vettoriale L di $\mathcal{D}V$ isotropo, rispetto a $\langle\cdot,\cdot\rangle$, e massimale.

Osservazione 23. L'accoppiamento non degenere $\langle\cdot,\cdot\rangle$ di $\mathcal{D}V$ ha segnatura (n,n), dunque la massima dimensione possibile per un sottospazio isotropo è n.

Esempi ovvi di strutture di Dirac lineari su V sono V e V^*. Un esempio più interessante è il seguente:

Esempio 3.1.1. Sia E un sottospazio vettoriale di V e sia $\epsilon \in \bigwedge^2 V^*$. Pensando la 2-forma ϵ come un'applicazione lineare da E a E^*, con $\epsilon^* = -\epsilon$, definiamo:

$$L(E,\epsilon) := \{X + \xi \in E \oplus V^* \mid \xi|_E = \epsilon(X)\}.$$

Fissato un isomorfismo $\mathcal{D}V \cong V \oplus V^*$, possiamo vedere $L(E,\epsilon)$ come un sottospazio isotropo massimale di $\mathcal{D}V$, dunque come una struttura di Dirac lineare su V.

In realtà, tutte le strutture di Dirac lineari su V sono di questa forma, come afferma la seguente proposizione:

Proposizione 3.1.1. *Ogni struttura di Dirac lineare su V è della forma $L(E,\epsilon)$.*

Dimostrazione. Fissiamo un isomorfismo $\mathcal{D}V \cong V \oplus V^*$. Continuiamo a denotare con π la proiezione canonica di $V \oplus V^*$ su V. Sia L un sottospazio isotropo massimale di $V \oplus V^*$ e sia $E := \pi(L)$. Sia π' la proiezione canonica di $V \oplus V^*$ su V^*. Definiamo:

$$\epsilon(e) := \pi'(\pi^{-1}(e) \cap L), \quad \forall e \in E.$$

Si verifica agevolmente che $L = L(E,\epsilon)$. □

Osservazione 24. Si osservi che, in particolare, $V = L(V,0)$ e $V^* = L(\{0\},0)$.

Sfruttando questa caratterizzazione, otteniamo:

Proposizione 3.1.2. *Immagini di strutture di Dirac lineari su V attraverso trasformazioni di tipo B e β di $\mathcal{D}V$ sono ancora strutture di Dirac lineari su V.*

Dimostrazione. Siano E e F sottospazi di V e siano $\epsilon \in \bigwedge^2 E^*$ e $\gamma \in \bigwedge^2 F^*$. Si verifica che:

$$\exp(B).L(E,\epsilon) = L(E, \epsilon + \imath^* B),$$
$$\exp(\beta).L(F,\gamma) = L(F, \gamma + \jmath^* \beta),$$

dove $\imath$ e $\jmath$ denotano le inclusioni rispettivamente di E e di F in V. Per la Proposizione 3.1.1, questo conclude la dimostrazione. □

Definizione 3.1.2. Sia L una struttura di Dirac lineare su V. Chiamiamo *tipo* di L la codimensione k, con $0 \leqslant k \leqslant n$, della sua proiezione $\pi(L)$ su V.

Consideriamo una complessificazione $\mathcal{D}V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ del doppio $\mathcal{D}V$ di V. L'accoppiamento non degenere $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su $\mathcal{D}V$ e la proiezione π su V si estendono in modo naturale ad un accoppiamento non degenere $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$ su $\mathcal{D}V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ e ad una proiezione $\pi_{\mathbb{C}}$ su $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Definiamo:

Definizione 3.1.3. Una *struttura di Dirac lineare complessa* su V è un sottospazio vettoriale L di $\mathcal{D}V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ isotropo, rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$, e massimale.

In modo del tutto analogo al caso reale, definiamo:

Definizione 3.1.4. Sia L una struttura di Dirac lineare complessa su V. Chiamiamo *tipo complesso* di L la codimensione k su $\mathbb{C}$, con $0 \leqslant k \leqslant n$, della sua proiezione $\pi_{\mathbb{C}}(L)$ su $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Nel caso complesso, tuttavia, vi è un'ulteriore nozione di indice per strutture di Dirac, motivata dalla seguente osservazione:

Osservazione 25. Sia L una struttura di Dirac lineare complessa su V. Allora, esiste un sottospazio vettoriale reale K di $\mathcal{D}V$ tale che $L \cap \overline{L} = K \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Definizione 3.1.5. Sia L una struttura di Dirac lineare complessa su V. Chiamiamo *indice reale* di L la dimensione:

$$r = \dim_{\mathbb{C}} L \cap \overline{L} = \dim_{\mathbb{R}} K,$$

dove K è un sottospazio vettoriale reale di $\mathcal{D}V$ che verifica $L \cap \overline{L} = K \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Ovviamente:

Esempio 3.1.2. Sia L una struttura di Dirac lineare su V. Allora, $L \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ è una struttura di Dirac lineare complessa di indice reale n.

3.1.4 Spinori

In questa sezione, tratteremo con relativa disinvoltura alcuni concetti algebrici non necessariamente noti al lettore. Più precisamente, assumeremo le definizioni e i risultati fondamentali relativi ad algebre di Clifford, spinori e gruppi di spin. A tale proposito, suggeriamo la consultazione di [7] e [13].

Sia $\mathrm{Cl}(\mathcal{D}V)$ l'algebra di Clifford di $\mathcal{D}V$ relativa alla forma quadratica definita dall'accoppiamento non degenere $\langle \cdot, \cdot \rangle$. L'isomorfismo $\mathcal{D}V \cong V \oplus V^*$ offre una decomposizione naturale di $\mathcal{D}V$ in sottospazi isotropi massimali (V e V^*), e dunque una scelta canonica di spinori su $\mathcal{D}V$, ovvero $S := \bigwedge^{\bullet} V^*$. La struttura di $\mathrm{Cl}(\mathcal{D}V)$-modulo di S è data semplicemente da:

$$(X + \xi).\phi = i_X \phi + \xi \wedge \phi, \quad \text{per } X \in V,\ \xi \in V^* \text{ e } \phi \in S.$$

Diciamo talvolta che S è la *rappresentazione spin standard* di $\mathrm{Cl}(\mathcal{D}V)$. Si osservi che $\mathfrak{so}(\mathcal{D}V)$ è in modo naturale una sottoalgebra di $\mathrm{Cl}(\mathcal{D}V)$.

L'elemento di volume ω di $\mathrm{Cl}(\mathcal{D}V)$ verifica $\omega^2 = 1$, dunque S si decompone, come spazio vettoriale, negli autospazi S^+ e S^- relativi rispettivamente agli autovalori $+1$ e -1 di ω. Tuttavia, tale decomposizione non è verificata a livello di $\mathrm{Cl}(\mathcal{D}V)$-moduli. Gli autospazi S^+ e S^-, infatti, non risultano invarianti per l'azione di $\mathrm{Cl}(\mathcal{D}V)$, ma per l'azione indotta del gruppo di spin $\mathrm{Spin}(\mathcal{D}V)$. Inoltre, si verifica che S^+ e S^- sono $\mathrm{Spin}(\mathcal{D}V)$-moduli irriducibili. Chiaramente, si ha l'isomorfismo di gruppi di Lie:

$$\mathrm{Spin}(\mathcal{D}V) \cong \mathrm{Spin}_{n,n}(\mathbb{R}).$$

Il gruppo $\mathrm{Spin}(\mathcal{D}V)$ è un rivestimento doppio del gruppo $\mathrm{SO}(\mathcal{D}V)$, dunque abbiamo un isomorfismo di algebre di Lie $\mathfrak{spin}(\mathcal{D}V) \cong \mathfrak{so}(\mathcal{D}V)$. Ora, ogni elemento dell'algebra $\mathfrak{spin}(\mathcal{D}V)$ agisce in modo naturale sul modulo degli spinori S. Sfruttando la decomposizione di $\mathfrak{so}(\mathcal{D}V)$, possiamo studiarne agevolmente l'azione sugli spinori così definita. Al solito, distinguiamo tra classi di simmetrie:

1. L'azione di $A \in \mathfrak{gl}(V)$ sugli spinori è data da:

   $$A.\phi = -A^*\phi + \frac{1}{2}\mathrm{tr}A\,\phi, \quad \forall \phi \in S,$$

   dove $A^*\phi$, assumendo che lo spinore ϕ abbia grado k, è data da:

   $$A^*\phi(X_1, \ldots, X_k) = \sum_{i=1}^{k} \phi(X_1, \ldots, AX_i, \ldots, X_k), \quad \forall X_1, \ldots, X_k \in V.$$

2. L'azione di $B \in \bigwedge^2 V^*$ sugli spinori è data da:

   $$B.\phi = -B \wedge \phi, \quad \forall \phi \in S.$$

3. L'azione di $\beta \in \bigwedge^2 V$ sugli spinori è data da:

   $$\beta.\phi = i_\beta \phi, \quad \forall \phi \in S.$$

Passiamo a definire una forma bilineare sugli spinori. Consideriamo l'applicazione di rovesciamento:

$$\sigma : S \to S, \quad \xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_k \mapsto \xi_k \wedge \cdots \wedge \xi_1.$$

Allora:

Definizione 3.1.6. Definiamo *accoppiamento di Mukai* su S la forma bilineare:

$$(\cdot,\cdot) : S \otimes S \to \mathbb{R}, \quad (\phi, \phi') \mapsto [\sigma(\phi) \wedge \phi']_n,$$

dove con $[\cdot]_n$ indichiamo la scelta della componente di grado n dello spinore. Si osservi, poi, che abbiamo identificato lo spazio degli spinori di grado n con $\mathbb{R}$.

L'accoppiamento di Mukai verifica le seguenti proprietà:

Proposizione 3.1.3.

1. $(\cdot,\cdot)$ *è non degenere;*

2. $(\cdot,\cdot)$ *è simmetrico se* $n \equiv 0, 1 \pmod 4$, *antisimmetrico altrimenti;*

3. $(\cdot,\cdot)$ *è invariante per l'azione di* $\mathrm{Spin}_0(\mathcal{D}V)$.

Dimostrazione. Omessa. Si rimanda a [8]. □

Sia ϕ uno spinore non nullo su $\mathcal{D}V$. Si dà la seguente definizione:

Definizione 3.1.7. Chiamiamo *zero-spazio* di ϕ il sottospazio di $\mathcal{D}V$ definito da:

$$L_\phi := \{X + \xi \in \mathcal{D}V \mid (X + \xi).\phi = 0\}.$$

La seguente osservazione è ovvia, ma risulterà utile in seguito:

Osservazione 26. Sia ϕ uno spinore non nullo e sia $c \in \mathbb{R}$ uno scalare non nullo. Allora, ϕ e $c\phi$ definiscono lo stesso zero-spazio.

Un'importante relazione fra zero-spazi si può esprimere in termini dell'accoppiamento di Mukai:

Proposizione 3.1.4. *Siano ϕ e ϕ' spinori. Allora:*

$$L_\phi \cap L_{\phi'} = (0) \iff (\phi, \phi') = 0.$$

Dimostrazione. Omessa. Si rimanda a [7]. □

Introduciamo la seguente definizione:

Definizione 3.1.8. Uno spinore ϕ si dice *puro* se L_ϕ è isotropo massimale.

Vediamo due semplici esempi:

Esempi 3.1.1.

1. Sia $1 \in S$ lo spinore unità. Si ha $L_1 = V$, dunque 1 è puro.

2. Sia $\theta \in S$ non nullo di grado 1. Si ha $L_\theta = L(\ker\theta, 0)$, dunque θ è puro.

Una retta di spinori puri definisce in modo naturale una struttura di Dirac lineare su V, considerando lo zero-spazio di un generatore. Viceversa, ad ogni struttura di Dirac lineare su V è possibile associare un'unica retta di spinori puri che la rappresenti. A tale proposito, consideriamo una struttura di Dirac lineare L su V. Sia:

$$U_L := \{\phi \in S \mid (X + \xi).\phi = 0, \forall X + \xi \in L\}.$$

È immediato verificare che U_L è una retta di spinori puri, e genera L. Possiamo essere più precisi:

Proposizione 3.1.5. *Sia L una struttura di Dirac lineare su V. Supponiamo che sia $L = L(E, \epsilon)$, con E sottospazio di V e $\epsilon \in \bigwedge^2 E^*$. Sia $\theta_1, \ldots, \theta_k$ una base dell'annullatore* $\mathrm{Ann}(E)$ *di E, e sia $B \in \bigwedge^2 V^*$ tale che $\imath^* B = \epsilon$, dove $\imath$ denota l'inclusione di E in V. Allora, lo spinore*

$$\phi_L = \exp(B)\, \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_k$$

è puro, e genera la retta U_L. Inoltre, ogni spinore puro può essere scritto in questa forma, al variare di E ed ϵ.

Dimostrazione. Omessa. Si rimanda a [7]. □

Abbiamo, pertanto, stabilito una corrispondenza biunivoca fra strutture di Dirac lineari su V e rette di spinori puri. Come risulterà evidente in seguito, siamo particolarmente interessati ad estendere tale corrispondenza al caso complessificato. A tale proposito, osserviamo che, data una complessificazione $\mathcal{D}V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ di $\mathcal{D}V$, sempre fissato un isomorfismo $\mathcal{D}V \cong V \oplus V^*$, le definizioni di spinore, di accoppiamento di Mukai e di spinore puro, con le relative proprietà, si estendono in modo ovvio. Riassumiamo i risultati del caso complessificato nel seguente teorema di caratterizzazione:

Teorema 3.1.6. *È equivalente assegnare:*

1. *una struttura di Dirac lineare complessa L su V di tipo complesso k;*
2. *una retta complessa di spinori puri $U_L \subset \bigwedge^\bullet V^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ generata da:*

$$\phi_L = \exp(B + i\omega)\, \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_k,$$

dove B e ω sono rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria di una 2-forma complessa, e $\theta_1, \cdots, \theta_k$ sono 1-forme complesse linearmente indipendenti.

Dimostrazione. È una semplice generalizzazione del caso reale, ma ometteremo i dettagli, per i quali si rinvia a [8]. □

3.1.5 Strutture lineari complesse generalizzate

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n. Vogliamo introdurre una struttura su V che generalizzi al tempo stesso le classiche nozioni di struttura lineare complessa e di struttura simplettica. A tale proposito, occorrerà passare al doppio di V. Sia esso $\mathcal{D}V$, con accoppiamento non degenere $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e sia π la proiezione su V.

Definizione 3.1.9. Una *struttura lineare complessa generalizzata* su V è una struttura lineare complessa $\mathbb{J}$ su $\mathcal{D}V$ che verifichi $\mathbb{J}^* = -\mathbb{J}$.

Osservazione 27. È del tutto equivalente definire $\mathbb{J}$ come una struttura lineare complessa su $\mathcal{D}V$ che sia ortogonale rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Vediamo due esempi fondamentali:

Esempio 3.1.3 (strutture lineari complesse)**.** Sia J una struttura lineare complessa su V. Consideriamo un isomorfismo $\mathcal{D}V \cong V \oplus V^*$. Sia:

$$\mathbb{J}_J := \begin{pmatrix} -J & 0 \\ 0 & J^* \end{pmatrix}.$$

È immediato verificare che $\mathbb{J}_J^2 = -\mathrm{Id}$ e $\mathbb{J}_J^* = -\mathbb{J}_J$. Dunque $\mathbb{J}_J$ è una struttura lineare complessa generalizzata su V.

Esempio 3.1.4 (strutture simplettiche)**.** Premettiamo un'osservazione fondamentale. Ricordiamo che una struttura simplettica su V è il dato di una forma simplettica $\omega \in \bigwedge^2 V^*$ su V. Essa può essere pensata come un'applicazione lineare da V a V^*, sempre attraverso $\omega(X) = i_X\omega$, per $X \in V$, che verifica $\omega^* = -\omega$. Consideriamo, ora, un isomorfismo $\mathcal{D}V \cong V \oplus V^*$. Sia ω una struttura simplettica su V. Definiamo:

$$\mathbb{J}_\omega := \begin{pmatrix} 0 & -\omega^{-1} \\ \omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Per l'osservazione precedente, $\mathbb{J}_\omega^2 = -\mathrm{Id}$ e $\mathbb{J}_\omega^* = -\mathbb{J}_\omega$, dunque $\mathbb{J}_\omega$ è una struttura lineare complessa generalizzata su V.

Come nel caso delle strutture lineari complesse e delle strutture simplettiche, vale il seguente risultato:

Proposizione 3.1.7. *Uno spazio vettoriale V possiede una struttura lineare complessa generalizzata se e solo se ha dimensione pari.*

Dimostrazione. Supponiamo che V abbia dimensione pari. Dal Capitolo 1 sappiamo che ogni spazio vettoriale di dimensione pari possiede una struttura lineare complessa. Nell'Esempio 3.1.3 abbiamo visto che una struttura lineare complessa definisce in modo naturale una struttura lineare complessa generalizzata[1].

Viceversa, sia $\mathbb{J}$ una struttura lineare complessa generalizzata su V. Ricordiamo che l'accoppiamento non degenere di $\mathcal{D}V$ è indefinito. Dunque, esiste uno zero-vettore x di $\mathcal{D}V$. Ora, $\mathbb{J}x$ è ancora uno zero-vettore di $\mathcal{D}V$, ortogonale a x. Ne segue che lo spazio vettoriale W generato da x e da $\mathbb{J}x$ è un sottospazio isotropo di $\mathcal{D}V$. Sia x' uno zero-vettore di $\mathcal{D}V$ ortogonale ad W e sia W' lo spazio vettoriale generato da x' e $\mathbb{J}x'$. Lo spazio vettoriale generato da W e W' è ancora un sottospazio isotropo di $\mathcal{D}V$. Precedendo in questo modo, otteniamo un sottospazio isotropo massimale L di $\mathcal{D}V$. Per massimalità, $\dim L = \dim V$. Ma L ha dimensione pari, per costruzione, dunque anche V ha dimensione pari. □

A questo punto, esaminiamo le relazioni che intercorrono fra strutture lineari complesse generalizzate, strutture di Dirac lineari complesse e spinori puri.

Sia $\mathcal{D}V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ una complessificazione di $\mathcal{D}V$. In analogia al caso lineare complesso, una struttura lineare complessa generalizzata $\mathbb{J}$ su V decompone lo

[1]In modo del tutto equivalente, avremmo potuto considerare la struttura lineare complessa generalizzata indotta da una struttura simplettica.

spazio doppio complessificato negli autospazi:

$$\mathcal{D}V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = L^{1,0} \oplus L^{0,1},$$

relativi rispettivamente agli autovalori $+i$ e $-i$ di $\mathbb{J}$. Osserviamo anzitutto che vale $L^{0,1} = \overline{L^{1,0}}$ e $L^{1,0} \cap L^{0,1} = \{0\}$. Inoltre, $L^{1,0}$ è isotropo, per ortogonalità di $\mathbb{J}$, e massimale. In altri termini, dunque, $\mathbb{J}$ individua in modo naturale (per diagonalizzazione) una struttura di Dirac lineare complessa su V di indice reale 0.

Viceversa, fissiamo un isomorfismo $\mathcal{D}V \cong V \oplus V^*$, e consideriamo una struttura di Dirac lineare L su V di indice reale 0. Definiamo l'operatore $\mathbb{J}$ come la moltiplicazione per $+i$ su L e per $-i$ su $\overline{L}$. È immediato verificare che in questo modo risulta ben definita una struttura lineare complessa generalizzata su V.

Sia L una struttura di Dirac lineare complessa su V della forma $L = L(E, \epsilon)$, con E sottospazio vettoriale di $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, e ϵ 2-forma complessa su E. La condizione di indice reale 0 può essere espressa in termini del dato di E ed ϵ come segue:

Proposizione 3.1.8. *La struttura di Dirac lineare complessa $L(E, \epsilon)$ su V ha indice reale 0 se e solo se $E + \overline{E} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ e la 2-forma $\omega_\Delta := \mathrm{Im}(\epsilon|_{E\cap\overline{E}})$ è non degenere su $E \cap \overline{E} = \Delta \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.*

Dimostrazione. Omessa. Si rimanda a [8]. □

Consideriamo, ora, la retta di spinori puri U_L associata a L, con generatore

$$\phi_L = \exp(B + i\omega)\, \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_k.$$

Per semplicità di notazione, scriviamo $\Omega = \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_k$. Vale la seguente proposizione:

Proposizione 3.1.9. *La struttura di Dirac lineare complessa $L(E, \epsilon)$ su V ha indice reale 0 se e solo sono verificate le seguenti condizioni sulla corrispondente retta di spinori puri:*

1. *le 1-forme $\theta_1, \ldots, \theta_k, \overline{\theta}_1, \ldots, \overline{\theta}_k$ sono linearmente indipendenti;*

2. *la 2-forma ω è non degenere se ristretta a $\ker(\Omega \wedge \overline{\Omega})$.*

Dimostrazione. Omessa. Si rimanda a [8]. □

Osservazione 28. In forma compatta, le condizioni 1 e 2 della Proposizione 3.1.9 si riassumono nella condizione $\omega^{n-k} \wedge \Omega \wedge \overline{\Omega} \neq 0$. Equivalentemente, in termini dell'accoppiamento di Mukai, $(\phi_L, \overline{\phi}_L) = 0$, essendo $\overline{\phi}_L = \phi_{\overline{L}}$.

In conclusione, dunque, otteniamo il seguente teorema di caratterizzazione:

Teorema 3.1.10. *È equivalente assegnare:*

1. *una struttura lineare complessa generalizzata $\mathbb{J}$ su V;*

2. *una struttura di Dirac lineare complessa L su V di indice reale 0;*

3. *una retta complessa di spinori puri $U \subset \bigwedge^\bullet V^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ generata da:*

$$\phi = \exp(B + i\omega)\, \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_k,$$

con le usuali notazioni, e con $\omega^{n-k} \wedge \Omega \wedge \overline{\Omega} \neq 0$.

Osserviamo che questo teorema ci permette di definire il *tipo complesso* di una struttura lineare complessa generalizzata $\mathbb{J}$ su V equivalentemente come il tipo complesso della corrispondente struttura di Dirac lineare complessa o come il grado della forma Ω che appare nella scrittura dello spinore puro che genera la retta associata a $\mathbb{J}$.

Definizione 3.1.10. La retta complessa di spinori puri U associata alla struttura lineare complessa generalizzata $\mathbb{J}$ è detta *retta canonica*.

Torniamo ai due esempi da cui siamo partiti:

Esempio 3.1.5 (strutture lineari complesse)**.** La struttura lineare complessa generalizzata $\mathbb{J}_J$ indotta da una struttura lineare complessa J su V ha tipo complesso $k = n$. La struttura di Dirac lineare complessa corrispondente è:

$$L = V^{1,0} \oplus V^{0,1},$$

dove $V^{1,0}$ e $V^{0,1}$ sono gli autospazi di J su $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ relativi rispettivamente agli autovalori $+i$ e $-i$. La retta di spinori puri individuata da $\mathbb{J}_J$ è generata da un qualunque generatore dello spazio delle $(n, 0)$-forme su $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Esempio 3.1.6 (strutture simplettiche)**.** La struttura lineare complessa generalizzata $\mathbb{J}_\omega$ indotta da una struttura simplettica ω su V ha tipo complesso $k = 0$. Ad essa corrispondono la struttura di Dirac lineare complessa:

$$L = \{X - i\omega(X) \mid X \in V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}\},$$

e la retta di spinori puri generata da:

$$\phi = \exp(i\omega).$$

Questi due esempi non si limitano esclusivamente ad essere molto esplicativi, ma, in un qualche senso, sono “alla base” di ogni possibile struttura lineare complessa generalizzata. Per chiarire tale affermazione, occorre anzitutto definire la *somma diretta* di strutture lineari complesse generalizzate:

Definizione 3.1.11. Siano V e V' spazi vettoriali reali e siano p e p' le proiezioni di $V \oplus V'$ rispettivamente su V e su V'. Siano $\mathbb{J}$ e $\mathbb{J}'$ strutture lineari complesse generalizzate rispettivamente su V e su V' e siano L e L' e ϕ e ϕ' le corrispondenti strutture di Dirac lineari complesse e i corrispondenti spinori puri. La *somma diretta* $\mathbb{J} \oplus \mathbb{J}'$ di $\mathbb{J}$ e $\mathbb{J}'$ è semplicemente la somma diretta di $\mathbb{J}$ e $\mathbb{J}'$ come operatori. A livello di strutture di Dirac lineari complesse e di spinori puri, essa corrisponde rispettivamente a $p^*L \oplus (p')^*L'$ e a $p^*\phi \wedge (p')^*\phi'$.

Supponiamo che V abbia dimensione $2n$. Vale il seguente risultato fondamentale:

Teorema 3.1.11. *Ogni struttura lineare complessa generalizzata su V di tipo complesso k può essere espressa come B-trasformazione della somma diretta di una struttura lineare complessa generalizzata indotta da una struttura lineare complessa su uno spazio vettoriale di dimensione complessa k e di una struttura lineare complessa generalizzata indotta da una struttura simplettica su uno spazio vettoriale di dimensione reale $2n - 2k$.*

Dimostrazione. Omessa. Si rimanda a [8]. □

Questa è la versione lineare (globale) di un teorema (locale) per varietà noto come *teorema di Darboux generalizzato.*

3.2 Algebroidi di Courant

Passiamo finalmente alle varietà differenziabili[2]. Chiaramente, in analogia al caso delle strutture quasi complesse classiche, una struttura quasi complessa in questo contesto dovrà essere in qualche modo legata al doppio del fibrato tangente della varietà considerata. Inoltre, sempre in analogia al caso classico, la condizione di integrabilità di strutture quasi complesse generalizzate necessita la definizione di un opportuno concetto di bracket, che chiameremo *bracket di Courant.* Un approccio assiomatico allo studio del bracket di Courant conduce inevitabilmente alla definizione di *algebroide di Courant* su una varietà.

Sia M una varietà differenziabile di dimensione reale n. Introduciamo immediatamente le definizioni che abbiamo appena menzionato:

Definizione 3.2.1. Un *algebroide di Courant* sulla varietà M è un fibrato vettoriale E su M munito di un accoppiamento non degenere $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e di un bracket antisimmetrico[3] $[\cdot, \cdot]$ su $\mathcal{C}^\infty(E)$, detto *bracket di Courant*, e di un morfismo di fibrati $\pi : E \to TM$, che verifichino le seguenti proprietà:

1. $[s, s'] = [\pi(s), \pi(s')]$, per ogni $s, s' \in \mathcal{C}^\infty(E)$;

2. $J(s, s', s'') = DN(s, s', s'')$, per ogni $s, s', s'' \in \mathcal{C}^\infty(E)$;

3. $[s, fs'] = f[s, s'] + (\pi(s)f)s' - \langle s, s' \rangle Df$, per ogni $s, s' \in \mathcal{C}^\infty(E)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$;

4. $\pi \circ D = 0$, ovvero $\langle Df, Dg \rangle = 0$, per ogni $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$;

5. $\pi(s) \langle s', s'' \rangle = \langle s \bullet s', s'' \rangle + \langle s', s \bullet s'' \rangle$, per ogni $s, s', s'' \in \mathcal{C}^\infty(E)$.

Nel punto 1, il bracket al secondo membro dell'identità è l'usuale parentesi di Lie di campi vettoriali. Nel punto 2, gli operatori J e N sono rispettivamente

[2] In questo contesto, ogni oggetto considerato sarà assunto di classe $\mathcal{C}^\infty$.

[3] Non richiediamo la validità dell'identità di Jacobi.

l'*operatore di Jacobi* e l'*operatore di Nijenhuis*:

$$
\begin{aligned}
J(s,s',s'') &:= [[s,s'],s''] + [[s',s''],s] + [[s'',s],s'],\\
N(s,s',s'') &:= \frac{1}{3}(\langle [s,s'],s''\rangle + \langle [s',s''],s\rangle + \langle [s'',s],s'\rangle), \quad \forall s,s',s'' \in \mathcal{C}^\infty(E).
\end{aligned}
$$

L'operatore differenziale D da $\mathcal{C}^\infty(M)$ a $\mathcal{C}^\infty(E)$ nei punti 2, 3 e 4, è definito da:

$$\langle Df, s\rangle := \frac{1}{2}\pi(s), \quad \forall s \in \mathcal{C}^\infty(E),\ f \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Infine, l'operazione $\bullet$ nel punto 5 è semplicemente:

$$s \bullet s' := [s,s'] + D\langle s,s'\rangle, \quad \forall s,s' \in \mathcal{C}^\infty(E).$$

Identifichiamo E con E^* per mezzo di $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Definizione 3.2.2. Un algebroide di Courant E su M si dice *esatto* se la successione di fibrati vettoriali

$$0 \to T^*M \xrightarrow{\frac{1}{2}\pi^*} E \xrightarrow{\pi} TM \to 0$$

è esatta.

Sia E un algebroide di Courant esatto su M. Fissato uno splitting isotropo

$$\nabla : TM \to E,$$

con 3-forma (chiusa) di curvatura $H_\nabla \in \mathcal{C}^\infty(\bigwedge^3 T^*M)$ definita da:

$$H_\nabla(X,Y,Z) := \frac{1}{2}\langle [\nabla(X),\nabla(Y)],\nabla(Z)\rangle, \quad \forall X,Y,Z \in \mathcal{C}^\infty(TM),$$

possiamo trasportare la struttura di algebroide di Courant di E su $TM \oplus T^*M$. Qui, l'accoppiamento non degenere è semplicemente:

$$\langle X+\xi, Y+\eta\rangle = \frac{1}{2}(\xi(Y) + \eta(X)), \quad \forall X,Y \in \mathcal{C}^\infty(TM),\ \xi,\eta \in \mathcal{C}^\infty(T^*M),$$

e il bracket di Courant diventa:

$$
\begin{aligned}
[X+\xi, Y+\eta] = [X,Y] + \mathcal{L}_X\eta - \mathcal{L}_Y\xi - \frac{1}{2}d(i_X\eta - i_Y\xi) +&\\
+ i_Y i_X H_\nabla, \quad \forall X,Y \in \mathcal{C}^\infty(TM),\ \xi,\eta \in \mathcal{C}^\infty(T^*M),&
\end{aligned}
$$

dove il bracket al secondo membro è il classico bracket di Lie su $\mathcal{C}^\infty(M)$. Il morfismo π è la proiezione naturale di $TM \oplus T^*M$ su TM.

Osservazione 29. La classe di coomologia $[H_\nabla] \in H^3_{\mathrm{dR}}(M)$ della 3-forma di curvatura è indipendente dalla scelta dello splitting ∇. Tale classe, che d'ora in poi, dunque, denoteremo semplicemente con il simbolo $[H]$, è detta *classe caratteristica*, o *classe di Ševera*, di $TM \oplus T^*M$, e determina completamente la struttura di algebroide di Courant esatto di $TM \oplus T^*M$.

3.3 Simmetrie

Sia E un algebroide di Courant esatto su M, e sia ∇ uno splitting, con $H_\nabla = 0$. La struttura di algebroide di Courant esatto su $TM \oplus T^*M$ così definita è detta *standard*. Chiaramente, l'accoppiamento $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e il bracket di Courant $[\cdot, \cdot]$ sono invarianti per diffeomorfismi. A differenza del caso classico[4], tuttavia, esiste una simmetria aggiuntiva.

Generalizziamo al caso di varietà un'importante classe di trasformazioni lineari. Sia $B \in \mathcal{C}^\infty(\bigwedge^2 T^*M)$ una 2-forma su M. Possiamo pensare B come un morfismo di fibrati da TM a T^*M attraverso il prodotto interno $B(X) = i_X B$, per X campo vettoriale su M. Consideriamo B come endomorfismo di $T^*M \oplus TM$. Esponenziando, otteniamo:

$$\exp(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B & 1 \end{pmatrix} : X + \xi \mapsto X + \xi + i_X B, \quad \forall X \in \mathcal{C}^\infty(TM), \, \xi \in \mathcal{C}^\infty(T^*M).$$

Chiaramente, $\exp(B)$ è un automorfismo di $TM \oplus T^*M$ ortogonale rispetto all'accoppiamento non degenere $\langle \cdot, \cdot \rangle$, essendo $B^* = -B$. Inoltre:

Proposizione 3.3.1. *L'automorfismo ortogonale* $\exp(B)$ *di* $TM \oplus T^*M$ *preserva il bracket di Courant* $[\cdot, \cdot]$ *sulle sezioni se e solo se* B *è una forma chiusa.*

Dimostrazione. È verificata la seguente catena di identità:

$$\begin{aligned}
[\exp(B)(X+\xi), \exp(B)(Y+\eta)] &= [X + \xi + i_X B, Y + \eta + i_Y B] \\
&= [X+\xi, Y+\eta] + [X, i_Y B] + [i_X B, Y] \\
&= [X+\xi, Y+\eta] + \mathcal{L}_X i_Y B - \frac{1}{2} d i_X i_Y B - \mathcal{L}_Y i_X B + \frac{1}{2} d i_Y i_X B \\
&= [X+\xi, Y+\eta] + \mathcal{L}_X i_Y B - i_Y \mathcal{L}_X B + i_Y i_X dB \\
&= [X+\xi, Y+\eta] + i_{[X,Y]} B + i_Y i_X dB \\
&= \exp([X+\xi, Y+\eta]) + i_Y i_X dB, \quad \forall X, Y \in \mathcal{C}^\infty(TM), \, \xi, \eta \in \mathcal{C}^\infty(T^*M).
\end{aligned}$$

Dunque, $\exp(B)$ preserva $[\cdot, \cdot]$ se e solo se $dB = 0$. □

Introduciamo la seguente definizione:

Definizione 3.3.1. Una *B-trasformazione* di $T^*M \oplus TM$ è una trasformazione della forma $\exp(B)$, per qualche 2-forma $B \in \mathcal{C}^\infty(\bigwedge^2 T^*M)$ chiusa.

Ogni struttura geometrica definita in termini del bracket di Courant può essere naturalmente trasformata attraverso una B-trasformazione.

È lecito domandarsi, a questo punto, se i diffeomorfismi della varietà M e le B-trasformazioni esauriscano l'intera classe degli automorfismi ortogonali del fibrato $TM \oplus T^*M$ che preservano il bracket di Courant. La risposa è contenuta nella seguente proposizione:

[4] Ogni automorfismo del fibrato tangente ad una varietà differenziabile che preservi il bracket di Lie sulle sezioni è indotto da un diffeomorfismo della varietà.

Proposizione 3.3.2. *Ogni automorfismo ortogonale di $TM \oplus T^*M$ che preservi il bracket di Courant $[\cdot,\cdot]$ sulle sezioni è composizione dell'automorfismo indotto da un diffeomorfismo di M e di una B-trasformazione. Più precisamente, il gruppo degli automorfismi ortogonali di $TM \oplus T^*M$ che preservano $[\cdot,\cdot]$ è il prodotto semidiretto del gruppo dei diffeomorfismi di M e del gruppo delle 2-forme differenziali chiuse su M.*

Dimostrazione. Omessa. Si rimanda a [8]. □

3.4 Strutture di Dirac

Sia E un algebroide di Courant esatto su M. Allora:

Definizione 3.4.1. Una *struttura quasi di Dirac* su E è un sottofibrato L di E isotropo, rispetto a $\langle\cdot,\cdot\rangle$, e massimale. Se L è involutiva, ovvero se $[L, L] \subset L$, allora è detta una *struttura di Dirac* su E.

Al solito, denotiamo con J ed N rispettivamente l'operatore di Jacobi e l'operatore di Nijenhuis. Abbiamo la seguente caratterizzazione dell'involutività per strutture quasi di Dirac:

Proposizione 3.4.1. *Sia L una struttura quasi di Dirac su E. Allora, le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *L è involutiva;*
2. *$J|_L = 0$;*
3. *$N|_L = 0$.*

Dimostrazione. Supponiamo L involutiva. Allora, dalla definizione di N segue immediatamente $N|_L = 0$, e dunque $J|_L = 0$, essendo $J = DN$. Resta da provare che se $J|_L = 0$, allora J è integrabile. A tale proposito, procediamo per assurdo. Siano $s, s', s'' \in \mathcal{C}^\infty(L)$ tali che $\langle [s, s'], s''\rangle \neq 0$. Per ogni $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, si ha:

$$\begin{aligned} 0 = J(s, s', fs'') &= DN(s, s', fs'') \\ &= \frac{1}{3}\left\langle [s, s'], s'' \right\rangle Df, \end{aligned}$$

dunque una contraddizione. Ne segue che L è involutiva. □

Supponiamo che M abbia dimensione n. Come nel caso lineare, definiamo la nozione di *tipo* di una struttura quasi di Dirac in un punto:

Definizione 3.4.2. Sia L una struttura quasi di Dirac su E e sia p in M. Chiamiamo *tipo* di L in p la codimensione k, con $0 \leqslant k \leqslant n$, della fibra su p della sua proiezione $\pi(L)$ su TM.

Allora:

Definizione 3.4.3. Diciamo che un punto p di M è *regolare* rispetto ad L se il tipo di L è localmente costante intorno a p.

Sia $E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ una complessificazione del fibrato E. Possiamo estendere in modo naturale l'accoppiamento non degenere $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e il bracket di Dirac $[\cdot, \cdot]$ sulle sezioni $\mathcal{C}^\infty(E)$ rispettivamente ad un accoppiamento non degenere $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$ e ad un bracket antisimmetrico $[\cdot, \cdot]_{\mathbb{C}}$ sulle sezioni $\mathcal{C}^\infty(E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$. Inoltre, possiamo estendere il morfismo π ad un morfismo $\pi_{\mathbb{C}}$ da $E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ a $TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Le proprietà fondamentali di algebroide di Courant esatto di E continuano a valere anche in questo contesto. Possiamo, dunque, introdurre le seguenti definizioni:

Definizione 3.4.4. Una *struttura quasi di Dirac complessa* su E è un sottofibrato complesso L di $E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ isotropo, rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$, e massimale. Se L è involutiva, ovvero se $[L, L]_{\mathbb{C}} \subset L$, allora è detta una *struttura di Dirac complessa* su E.

La Proposizione 3.4.1 si estende naturalmente anche al caso complessificato.

Passiamo, dunque, a definire la nozione di *tipo complesso* di una struttura quasi di Dirac complessa in un punto:

Definizione 3.4.5. Sia L una struttura quasi di Dirac complessa su E e sia p in M. Chiamiamo *tipo complesso* di L in p la codimensione k su $\mathbb{C}$, con $0 \leqslant k \leqslant n$, della fibra su p della sua proiezione $\pi_{\mathbb{C}}(L)$ su $TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Allora:

Definizione 3.4.6. Diciamo che un punto p di M è *regolare* rispetto ad L se il tipo complesso di L è localmente costante intorno a p.

È possibile dimostrare che l'insieme dei punti regolari, sia nel caso reale sia nel caso complessificato, è un insieme denso in M.

Osservazione 30. Fissato uno splitting ∇, la struttura di algebroide di Courant di $TM \oplus T^*M$ è determinata dalla classe fondamentale $[H]$. Le strutture quasi di Dirac e le strutture di Dirac reali e complesse, dunque, non sono univocamente determinate da M, ma differiscono al variare di $[H]$. In generale, per evitare di riferirci all'algebroide di Courant $TM \oplus T^*M$, possiamo parlare di strutture quasi di Dirac e di Dirac reali e complesse *H-twistate* su M. Se $H_\nabla = 0$, parleremo semplicemente di strutture quasi di Dirac e di strutture di Dirac reali e complesse su M. Questa questione è del tutto assente nel caso lineare.

3.5 Spinori

La teoria che ci accingiamo ad esporre presenta degli aspetti tecnici che non intendiamo chiarire nei dettagli, e per i quali rinviamo il lettore a [8] e [13].

Sia E un algebroide di Courant esatto su M, e sia ∇ uno splitting con $H_\nabla = 0$. Limitiamoci, dunque, a considerare il fibrato $TM \oplus T^*M$ con la struttura di algebroide di Courant standard.

In generale, è noto in letteratura che un fibrato vettoriale orientato munito di una metrica riemanniana ammette una struttura spin se e solo se si annulla la sua seconda classe di Stiefel-Whitney. Tuttavia, nel nostro caso, una struttura spin esiste sempre.

Proposizione 3.5.1. *Il fibrato $TM \oplus T^*M$ ammette una $\mathrm{Spin}_{n,n}(\mathbb{R})$-struttura.*

Dimostrazione. Omessa. Si rimanda a [8]. □

Consideriamo una $\mathrm{Spin}_{n,n}(\mathbb{R})$-struttura su $TM \oplus T^*M$. Sia S il corrispondente fibrato degli spinori. Una scelta naturale è data da $S = \bigwedge^\bullet T^*M$. Consideriamo il fibrato di algebre di Clifford $\mathrm{Cl}(TM \oplus T^*M)$ definito assegnando le fibre:

$$\mathrm{Cl}(TM \oplus T^*M)_p := \mathrm{Cl}(T_pM \oplus T_p^*M), \quad \forall p \in M.$$

La naturale struttura di $\mathrm{Cl}(T_pM \oplus T_p^*M)$-modulo della fibra $S_p = \bigwedge^\bullet T_p^*M$, per ogni $p \in M$, induce su S una struttura di fibrato di moduli sul fibrato di algebre di Clifford $\mathrm{Cl}(TM \oplus T^*M)$. In particolare, lo spazio delle sezioni di S è un modulo sullo spazio delle sezioni di $\mathrm{Cl}(TM \oplus T^*M)$, con azione data da:

$$(X + \xi).\phi = i_X\phi + \xi \wedge \phi, \quad \text{per } X \in \mathcal{C}^\infty(TM),\ \xi \in \mathcal{C}^\infty(T^*M) \text{ e } \phi \in \mathcal{C}^\infty(S).$$

La definizione di accoppiamento di Mukai sugli spinori, ovvero sulle sezioni del fibrato S, è una naturale estensione della definizione nel caso lineare.

Analogamente, la definizione di zero-sottofibrato e di spinore puro e l'equivalenza fra strutture quasi di Dirac e fibrati lineari di spinori puri si ottengono in modo ovvio a partire dal caso lineare, ragionando puntualmente sulle fibre.

Passando al caso complessificato, le definizioni si ottengono agevolmente. Inoltre, come è ormai del tutto lecito attendersi, si ha un equivalenza fra strutture quasi di Dirac complesse e fibrati lineari complessi di spinori puri.

Il risultato di caratterizzazione appena menzionato suggerisce di tradurre la condizione di involutività per strutture quasi di Dirac complesse in termini di spinori. Otteniamo:

Proposizione 3.5.2. *Sia L una struttura quasi di Dirac complessa, e sia U_L il corrispondente fibrato lineare complesso di spinori puri. Allora, L è involutiva se e solo se, per ogni $\phi \in \mathcal{C}^\infty(U_L)$, esiste $X + \xi \in \mathcal{C}^\infty((TM \oplus T^*M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ sezione locale tale che:*

$$d\phi = i_X\phi + \xi \wedge \phi.$$

Dimostrazione. Omessa. Si confronti [8]. □

3.6 Strutture quasi complesse generalizzate

Sia E un algebroide di Courant esatto su M. Osserviamo che la fibra di E su un punto p di M è lo spazio vettoriale doppio $\mathcal{D}T_pM$. È naturale, dunque, dare la seguente definizione:

Definizione 3.6.1. Una *struttura quasi complessa generalizzata* su un algebroide di Courant esatto E su M è un isomorfismo di fibrati

$$\mathbb{J} : E \to E$$

tale che, per ogni $p \in M$, l'endomorfismo

$$\mathbb{J}_p : E_p \to E_p$$

sia una struttura lineare complessa generalizzata su T_pM.

Segue un'osservazione ovvia:

Osservazione 31. Sia $\mathbb{J}$ una struttura quasi complessa generalizzata su un algebroide di Courant esatto su M. Allora, per ogni $p \in M$, abbiamo una struttura lineare complessa generalizzata $\mathbb{J}_p$ su T_pM. Ogni spazio tangente, dunque, per la Proposizione 3.1.7, ha dimensione pari. Da questo segue che M ha dimensione pari.

Ed ora un chiarimento terminologico:

Osservazione 32. Come nel caso delle strutture di Dirac, le strutture quasi complesse generalizzate su $TM \oplus T^*M$, fissato uno splitting ∇, dipendono dalla classe caratteristica $[H]$. Dunque, parleremo di strutture quasi complesse generalizzate *H-twistate* su M riferendoci alle strutture quasi complesse generalizzate sull'algebroide di Courant $TM \oplus T^*M$. Se $H_\nabla = 0$, parleremo semplicemente di strutture quasi complesse generalizzate su M.

Fissiamo uno splitting ∇ con $H_\nabla = 0$. D'ora in poi, in questa sezione, ci limiteremo a considerare il caso standard.

Osservazione 33. Sia M una varietà differenziabile di dimensione $2n$. La definizione di una struttura quasi complessa generalizzata $\mathbb{J}$ su M equivale ad una riduzione del gruppo di struttura di $TM \oplus T^*M$ da $\mathrm{O}_{2n,2n}(\mathbb{R})$ a $\mathrm{U}_{n,n}(\mathbb{C})$. Si osservi, inoltre, che vi è il seguente isomorfismo di gruppi di Lie:

$$\mathrm{U}_{n,n}(\mathbb{C}) \cong \mathrm{U}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{U}_n(\mathbb{C}).$$

Esaminiamo le relazioni che intercorrono fra strutture quasi complesse generalizzate, strutture quasi di Dirac complesse e spinori puri. La trattazione procede in analogia al caso lineare. Percorriamola sinteticamente.

Sia $\mathbb{J}$ una struttura quasi complessa su M. Diagonalizziamo $\mathbb{J}$ considerando la decomposizione di $(TM \oplus T^*M) \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$ negli autospazi:

$$(TM \oplus T^*M) \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C} = L^{1,0} \oplus L^{0,1},$$

relativi rispettivamente agli autovalori $+i$ e $-i$ di $\mathbb{J}$ sul fibrato complessificato. Il sottofibrato $L^{1,0}$ di $(TM \oplus T^*M) \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$ verifica $L^{0,1} = \overline{L^{1,0}}$ e $L^{1,0} \cap L^{0,1} = \{0\}$. Inoltre, è isotropo e massimale, dunque è una struttura quasi di Dirac complessa su M con la proprietà richiesta.

Viceversa, data, una struttura quasi di Dirac complessa L su M, che verifichi la proprietà $L \cap \overline{L} = \{0\}$, possiamo definire $\mathbb{J}$ come moltiplicazione per $+i$ su L e come moltiplicazione per $-i$ su $\overline{L}$.

Passiamo agli spinori puri. Siano $\mathbb{J}$ e L rispettivamente una struttura quasi complessa generalizzata e una struttura quasi di Dirac complessa, con $L \cap \overline{L} = \{0\}$, su M. Definiamo U come il sottofibrato lineare di $\bigwedge^\bullet T^*M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ la cui fibra su un punto p di M sia la retta complessa di spinori puri associata alla struttura lineare complessa generalizzata $\mathbb{J}_p$ su T_pM, o, equivalentemente, alla struttura di Dirac lineare complessa L_p su T_pM. Si osservi che la condizione $L \cap \overline{L} = \{0\}$ garantisce che ogni L_p ha indice reale 0, e dunque $(\phi, \overline{\phi}) = 0$ per ogni generatore $\phi \in U_p$.

Viceversa, definiamo una struttura quasi di Dirac complessa L con la proprietà richiesta a partire da un fibrato lineare U di spinori puri sfruttando la nozione di zero-sottofibrato.

In conclusione, pertanto, si ha:

Teorema 3.6.1. *È equivalente assegnare:*

1. *una struttura quasi complessa generalizzata $\mathbb{J}$ su M;*
2. *una struttura quasi di Dirac complessa L su M tale che $L \cap \overline{L} = \{0\}$;*
3. *un sottofibrato lineare complesso di spinori puri $U \subset \bigwedge^\bullet T^*M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, tale che $(\phi, \overline{\phi}) = 0$ per ogni $p \in M$ e per ogni generatore $\phi \in U_p$.*

Tale caratterizzazione ci permette di definire le nozioni di *tipo complesso* e di *punto regolare* per una struttura quasi complessa generalizzata semplicemente riferendole alla corrispondente struttura quasi di Dirac complessa.

Definizione 3.6.2. Il fibrato lineare complesso di spinori puri U associato alla struttura quasi complessa generalizzata $\mathbb{J}$ è detto *fibrato lineare canonico.*

Vediamo i due esempi fondamentali delle strutture quasi complesse e delle strutture quasi simplettiche:

Esempio 3.6.1 (strutture quasi complesse)**.** Una struttura quasi complessa J su una varietà M di dimensione pari induce una struttura quasi complessa generalizzata:

$$\mathbb{J}_J := \begin{pmatrix} -J & 0 \\ 0 & J^* \end{pmatrix}$$

su M di tipo complesso $k = n$. La corrispondente struttura quasi di Dirac complessa è:

$$L = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M.$$

Il fibrato lineare complesso di spinori puri è il fibrato lineare canonico $U = K_M$.

Esempio 3.6.2 (strutture quasi simplettiche)**.** Sia ω una struttura quasi simplettica[5] su una varietà M di dimensione pari. Consideriamo:

$$\mathbb{J}_\omega := \begin{pmatrix} 0 & -\omega^{-1} \\ \omega & 0 \end{pmatrix}.$$

[5]Ricordiamo che una *struttura quasi simpatetica* su una varietà M di dimensione $2n$ è una una 2-forma ω non degenere su M. Chiaramente, fissare ω equivale ad una riduzione del gruppo di struttura di TM da $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ a $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$. Se ω è chiusa, diciamo che è *integrabile* a una struttura simplettica su M.

Si verifica che $\mathbb{J}_\omega$ è una struttura quasi complessa generalizzata su M di tipo complesso $k = 0$, con struttura quasi di Dirac complessa associata:

$$L = \{X - i\omega(X) \mid X \in TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}\},$$

e fibrato lineare complesso di spinori puri generato dallo spinore puro:

$$\phi = \exp(i\omega).$$

Analogamente al caso lineare, vedremo come, sotto ulteriori ipotesi e in un qualche senso locale a meno di opportune trasformazioni, questi due esempi siano sufficienti per costruire ogni struttura quasi complessa generalizzata.

Nel nostro seminario, non abbiamo trattato rigorosamente la teoria delle ostruzioni all'esistenza di strutture quasi complesse su varietà di dimensione pari, fatta eccezione per il caso delle 4-varietà. Trascureremo l'argomento anche per le strutture quasi complesse generalizzate. Tuttavia, limitiamoci ad accennare al seguente risultato:

Teorema 3.6.2. *Le ostruzioni all'esistenza di strutture quasi complesse generalizzate su varietà differenziabili di dimensione pari sono le stesse delle strutture quasi complesse, o, equivalentemente, delle strutture quasi simplettiche.*

Dimostrazione. Un'implicazione è ovvia: una struttura quasi complessa J, infatti, come abbiamo mostrato nell'Esempio 3.6.1, induce in modo naturale una struttura quasi complessa generalizzata $\mathbb{J}_J$. Quanto al viceversa, rimandiamo a [8]. □

3.7 Integrabilità

Tornando per un momento al caso classico, osserviamo come su una varietà differenziabile M di dimensione $2n$ sia del tutto equivalente, per il teorema di Newlander-Nirenberg, introdurre una struttura complessa considerando classi di equivalenza di atlanti olomorfi, seguendo l'approccio più consueto, o considerando una struttura quasi complessa con fibrato tangente olomorfo associato involutivo (o con tensore di Nijenhuis nullo). Nella definizione di *struttura complessa generalizzata* adotteremo questo secondo punto di vista.

Sia E un algebroide di Courant esatto su M. Allora:

Definizione 3.7.1. Una struttura quasi complessa generalizzata $\mathbb{J}$ su E si dice *integrabile* a una *struttura complessa generalizzata* se la corrispondente struttura quasi di Dirac L è involutiva.

Per la Proposizione 3.5.2, la nozione di integrabilità può naturalmente esprimersi in termini di spinori.

Consideriamo i seguenti esempi:

Esempio 3.7.1 (strutture complesse)**.** La struttura quasi complessa generalizzata $\mathbb{J}_J$ su M associata alla struttura quasi complessa J su M è integrabile se e solo se J è integrabile, ovvero se e solo se $T^{1,0}M$ è una distribuzione involutiva rispetto all'ordinario bracket di Lie.

Esempio 3.7.2 (strutture simplettiche)**.** Sia $\mathbb{J}_\omega$ la struttura quasi complessa generalizzata su M indotta dalla struttura quasi complessa ω. Si verifica che $\mathbb{J}_\omega$ è integrabile se e solo se ω è integrabile, ovvero se e solo se ω è chiusa.

3.8 Teorema di Darboux generalizzato

Supponiamo di aver definito una struttura quasi complessa integrabile su una varietà differenziabile M di dimensione $2n$ come una struttura quasi complessa J su M tale che $T^{1,0}M$ sia involutivo. Per il teorema di Newlander-Nirenberg, allora, la varietà quasi complessa (M, J) è localmente isomorfa, attraverso un diffeomorfismo, a $(\mathbb{R}^{2n}, J_0)$, ovvero a $\mathbb{C}^n$.

Analogamente, se (M, ω) è una varietà simplettica di dimensione $2n$, il teorema di Darboux afferma che essa è isomorfa, attraverso un diffeomorfismo, a $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

Nelle sezioni precedenti, abbiamo osservato come il caso quasi complesso integrabile e il caso simplettico rappresentino i "casi limite" della definizione di una struttura più generale su una varietà differenziabile M, ovvero una struttura quasi complessa generalizzata integrabile.

Il teorema che intendiamo presentare a conclusione di questo nostro seminario afferma che ogni varietà differenziabile M di dimensione $2n$, con struttura quasi complessa generalizzata integrabile, è localmente isomorfa, attorno ad un punto regolare in cui la struttura ha tipo complesso k, attraverso un diffeomorfismo e una B-trasformazione, ad un aperto di $\mathbb{C}^k$ e ad un aperto di $(\mathbb{R}^{2n-2k}, \omega_0)$.

In un qualche senso, dunque, questo teorema, che chiameremo *teorema di Darboux generalizzato*, generalizza i teoremi di Newlander-Nirenberg e di Darboux, e mostra come gli esempi delle varietà quasi complesse con struttura quasi complessa integrabile e delle varietà simplettiche siano "alla base" di ogni varietà con struttura quasi complessa generalizzata integrabile.

Il teorema di Darboux generalizzato, inoltre, è chiaramente la versione per varietà del Teorema 3.1.11 per spazi vettoriali.

Definiamo dapprima il *prodotto* di varietà munite di strutture quasi complesse generalizzate. Anche in questo caso, introdurremo la definizione in termini delle corrispondenti strutture di Dirac. È verificata la seguente proposizione:

Proposizione 3.8.1. *Siano M e M' varietà, con strutture di Dirac complesse rispettivamente L e L'. Dette p e p' le proiezioni di $M \times M'$ rispettivamente su M e su M', allora $p^*L \oplus (p')^* L'$ è una struttura di Dirac complessa su $M \times M'$.*

Dimostrazione. Omessa. Si confronti [8]. □

Definiamo, dunque:

Definizione 3.8.1. Siano M e M' varietà, con strutture quasi complesse generalizzate integrabili rispettivamente $\mathbb{J}$ e $\mathbb{J}'$, e con strutture di Dirac complesse associate rispettivamente L e L'. Dette p e p' le proiezioni di $M \times M'$ rispettivamente su M e su M', definiamo il *prodotto* delle varietà M e M' munite delle strutture quasi complesse generalizzate integrabili $\mathbb{J}$ e $\mathbb{J}'$ come la varietà differenziabile $M \times M'$ munita della struttura quasi complessa generalizzata integrabile associata a $p^* L \oplus (p')^* L'$.

Possiamo, finalmente, enunciare il teorema di Darboux generalizzato. Sia M una varietà differenziabile di dimensione $2n$, munita di una struttura quasi complessa generalizzata integrabile $\mathbb{J}$. Allora:

Teorema 3.8.2 (Darboux generalizzato)**.** *Ogni punto p di M regolare, in cui la struttura $\mathbb{J}$ ha indice complesso k, possiede un intorno aperto isomorfo, attraverso un isomorfismo e una B-trasformazione, al prodotto di un aperto di $\mathbb{C}^k$ e di un aperto di $(\mathbb{R}^{2n-2k}, \omega_0)$.*

Dimostrazione. La dimostrazione di questo teorema non può prescindere dalla teoria delle foliazioni, esclusa programmaticamente dalla trattazione del nostro seminario. Rinviamo, pertanto, il lettore a [8]. □

Bibliografia

[1] Michèle Audin, *Exemples de variétés presque complexes*, Enseign. Math. (2), 37, 1991.

[2] Wolf P. Barth, Klaus Hulek, Chris A. M. Peters e Antonius Van de Ven, *Compact Complex Surfaces - Second Enlarged Edition*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), 4, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2004.

[3] Armand Borel e Jean-Pierre Serre, *Groupes de Lie et puissances réduites de Steenrod*, Amer. J. Math., 75, 1953.

[4] Eugenio Calabi, *Construction and Properties of Some* 6*-Dimensional Almost Complex Manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc., 87 (2), 1958.

[5] Alberto Candel e Lawrence Conlon, *Foliations I*, Grad. Stud. Math., 23, American Mathematical Society, Providence, 2000.

[6] Fabrizio Catanese, *Moduli of Algebraic Surfaces*, in *Theory of Moduli*, Edoardo Sernesi (editor), Lecture Notes in Math., 1337, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1988.

[7] Claude C. Chevalley, *The algebraic theory of spinors*, Columbia University Press, New York, 1954.

[8] Marco Gualtieri, *Generalized complex geometry*, arXiv: math/0401221v1, 2004.

[9] Nigel Hitchin, *Generalized Calabi-Yau manifolds*, arXiv: math/0209099v1, 2002.

[10] Lars Hörmander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam London, 1973.

[11] Dominic Joyce, *Complex Manifolds and Kähler Geometry*, 2012. Note: disponibile alla pagina web: `https://people.maths.ox.ac.uk/joyce/KahlerGeometry2012/KahlerGeom.html` (consultato in data 10 maggio 2014).

[12] Shoshichi Kobayashi e Katsumi Nomizu, *Foundations of Differential Geometry - Volume II*, John Wiley & Sons, Inc. (Interscience Division), New York, 1969.

[13] H. Blaine Lawson, Jr. e Marie-Louise Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton, 1989.

[14] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds - Second Edition*, Grad. Texts in Math., 218, Springer, New York, 2013.

[15] Andrei Moroianu, *Lectures on Kähler Geometry*, London Math. Soc. Stud. Texts, 69, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[16] Santiago R. Simanca, *Canonical metrics on compact almost complex manifolds*, Publicações Matemáticas do IMPA, IMPA, Rio de Janeiro, 2004.

[17] Antonius Van de Ven, *On the Chern numbers of certain complex and almost complex manifolds*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 55 (6), 1966.

[18] Claire Voisin, *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry, I*, Cambridge Stud. Adv. Math., 76, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[19] Raymond O. Wells, Jr., *Differential Analysis on Complex Manifolds - Third Edition*, Grad. Texts in Math., 65, Springer, New York, 2008.

[20] Wen-Tsun Wu, *Sur les classes caractéristiques des structures fibrées sphériques*, Actualités Sci. Indust., 1183, Hermann & Cie, Paris, 1952.