Vladimiro Benedetti, Valerio Proietti, Edoardo Spadolini, Gianmarco Stefanelli

FORMA DI RICCI

Note per il seminario di geometria superiore

Docente: Prof. Paolo Piccinni

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Dipartimento di Matematica "Guido Castelnuovo"

Geometry is the science of correct reasoning on incorrect figures.

— George Polya

INDICE

INTRODUZIONE

Obiettivo di queste note è quello di presentare le principali proprietà della *forma di Ricci*, e alcune delle sue principali applicazioni. Si è deciso di sacrificare la completezza in favore della semplicità di lettura (e di comprensione), tenendo a mene il *target* delle dispense, cioè studenti di Laurea magistrale in Matematica, che si avvicinano per la prima volta allo studio della geometria kähleriana.

Questo approccio ci ha permesso di presentare e dimostrare (parzialmente) risultati piuttosto avanzati, come i teoremi di Calabi-Yau e Aubin-Yau, che rappresentano il punto di arrivo di queste note.

Il contenuto risulta suddiviso in tre capitoli.

IL PRIMO CAPITOLO si propone di richiamare brevemente tutto l'armamentario teorico che verrà impiegato nel seguito. In particolare, ci siamo soffermati su alcune costruzioni di algebra lineare e sul concetto di tensore, per poi passare alla definizione di struttura quasi complessa e ai princiali oggetti di studio della geometria riemanniana, con particolare attenzione al tensore di curvatura. Al termine di questo capitolo, il lettore viene introdotto al concetto di metrica di kähler.

IL SECONDO CAPITOLO è dedicato all'introduzione della connessione di Chern e allo studio della sua curvatura. L'obiettivo è quello di caratterizzare le metriche kähleriane in termini di questi oggetti, al fine di descrivere in modo completo e "geometricamente intuibile" la condizione di varietà kähleriana.

IL TERZO CAPITOLO comincia definendo il nostro oggetto di interesse, cioè la forma di Ricci. Dopo averne studiato le proprietà più importanti, si passa ad analizzare il collegamento con la prima classe di Chern, fino ad arrivare ai teoremi di Calabi-Yau e Aubin-Yau, che forninscono informazioni "tangibili" sulla geometria della varietà.

1 PRELIMINARI

In questo capitolo ci occupiamo di fissare notazioni e definizioni che verranno usate ripetutamente nel seguito. Gli obiettivi sono due: richiamare le nozioni di base di geometria riemanniana, in particolar modo il *tensore di curvatura di Ricci*, e introdurre nel modo più diretto possibile il concetto di *metrica kähleriana*.

1.1 RICHIAMI DI ALGEBRA LINEARE

Nel seguito V e W saranno spazi vettoriali di dimensione finita. Assumeremo che il lettore abbia familiarità con la definizione di prodotto tensoriale. Ricordiamo i seguenti isomorfismi canonici:

- $V^{**} \simeq V$;
- $V \otimes W \simeq W \otimes V$;
- $(V \otimes W)^* \simeq V^* \otimes W^*$;
- $V^* \otimes W \simeq \mathsf{Hom}(V, W)$;
- $V \simeq_g V^*$, dove il pedice indica la dipendenza dall'esistenza di una forma bilineare non degenere g definita su $V \times V$.

Nel caso in cui V sia definito sul campo dei numeri complessi, è possibile definire lo spazio vettoriale (formale) *complesso coniugato* $\overline{V} = \{\overline{v} | v \in V\}$, dotato delle seguenti operazioni di somma e prodotto per scalare:

- $\overline{v} + \overline{w} = \overline{v + w}$;
- $\alpha\overline{v} = \overline{\overline{\alpha}v}$.

È facile verificare che una applicazione *antilineare* (i.e., una applicazione additiva f tale che $f(\alpha v) = \overline{\alpha}v$) diventa lineare quando definita su $\overline{V}$, in modo che $\overline{v} \mapsto f(v)$. Come conseguenza, applicando la proprietà universale del prodotto tensoriale, una forma sesquilineare g è un funzionale lineare su $V \otimes \overline{V}$. Si osservi che non esiste un isomorfismo naturale tra V e il suo coniugato (la mappa $v \mapsto \overline{v}$ è antilineare), invece lo spazio $\overline{\overline{V}}$ è canonicamente identificato con V stesso.

1.1.1 Struttura lineare complessa

Se V indica uno spazio vettoriale reale, una *struttura lineare complessa* è un automorfismo J di V tale che $J^2 = -\operatorname{id}_V$ (dove a sinistra è intesa la composizione). Avendo J è possibile dotare V di una struttura di spazio vettoriale *complesso*, denotato V_J, semplicemente definendo

$$(\alpha + i\beta)v = \alpha v + \beta J v$$

Affinché questo sia possibile, è necessario che V abbia dimensione pari, se così non fosse il polinomio caratteristico di J ammetterebbe una radice reale, dunque un autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$ con relativo autovettore v_λ; dovrebbe valere $J^2 v_\lambda = \lambda^2 v = -v$, che è assurdo. In effetti, si verifica subito che che se $\dim V_J = n$ allora $\dim V = 2n$.

Una applicazione lineare *reale* di V, corrisponde ad una applicazione lineare *complessa* di V_J se e solo se commuta con J. In modo analogo, un sottospazio U di V, è un sottospazio di V_J se e solo se è invariante rispetto a J; diciamo inoltre che J *preserva* la forma bilineare g se vale $g(Jv, Jw) = g(v, w)$. Se V è uno spazio vettoriale reale, è possibile definire una struttura lineare complessa in modo canonico su $V \oplus V$, imponendo

$$J(v, w) = (-w, v)$$

Passando all'applicazione trasposta J^*, è possibile dotare V^* di una struttura lineare complessa.

Naturalmente in uno spazio vettoriale complesso la moltiplicazione per i fornisce una struttura lineare complessa.

Ricordiamo che, dato uno spazio vettoriale reale V, è possibile definire la sua *complessificazione* $V^{\mathbb{C}}$ tramite l'usuale procedimento di estensione degli scalari, cioè $V^{\mathbb{C}} = V \otimes \mathbb{C}$. Tale spazio possiede una naturale coniugazione, data da $\overline{v \otimes z} = v \otimes \overline{z}$.

Se V possiede una struttura lineare complessa, questa si trasporta su $V^{\mathbb{C}}$, definendo $J(v \otimes z) = Jv \otimes z$. Data la chiusura algebrica di $\mathbb{C}$, J possiede autovalori $\lambda = \pm i$, e dunque possiamo scomporre

$$V^{\mathbb{C}} = V^+ \oplus V^-$$

dove a destra sono indicati gli autospazi relativi a i e $-i$. Esiste un isomorfismo (complesso) naturale tra V_J e V^+, mentre V^- si identifica a $\overline{V_J}$.

Infine, si ha $(V^*)^{\mathbb{C}} \simeq (V^{\mathbb{C}})^*$, poiché lo spazio a sinistra è isomorfo a $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{C})$, che è a sua volta isomorfo a $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$ tramite l'estensione $\phi(v \otimes z) = z\phi(v)$.

1.1.2 Tensori e forme

Un (p,q)-*tensore* è un elemento dello spazio vettoriale $V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$, che è una scrittura abbreviata per

$$\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{p \text{ volte}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{q \text{ volte}}$$

Più esplicitamente, essendo $V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q} \simeq (V^{*\otimes p} \otimes V^{\otimes q})^*$, applicando la proprietà universale del prodotto tensoriale otteniamo che un tensore è un funzionale *multilineare* definito sul prodotto cartesiano $V^{\times p} \times V^{*\times q}$.

Quando $q = 0$ parliamo di tensore *controvariante*, mentre per $p = 0$ abbiamo tensori *covarianti*. Si osservi che una forma bilineare su V è un tensore 2-covariante; alla luce degli isomorfismi che aprono il capitolo, possiamo anche dire che un tensore $(1,1)$ è un endomorfismo di V.

Un tensore p-covariante f si dice *alternante* o *antisimmetrico* quando, per ogni permutazione σ nel gruppo simmetrico di ordine p, vale

$$f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) = \mathsf{sgn}(\sigma) f(v_1, \ldots, v_p)$$

I tensori di questo tipo sono chiamati *p-forme*. Naturalmente, è possibile dare una definizione "universale" anche per questi oggetti; è sufficiente costruire l'*algebra tensoriale* e l'ideale $I(V)$ generato dagli elementi del tipo $v \otimes v$:

$$T(V) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} V^{\otimes p} \qquad I(V) = \langle v \otimes v | v \in V \rangle$$

(dove il prodotto tensoriale vuoto si identifica al campo degli scalari). Passando al quoziente otteniamo la *p-esima potenza esterna* e l'*algebra esterna* di V:

$$\Lambda^p(V) = \frac{V^{\otimes p}}{I(V) \cap V^{\otimes p}} \qquad \Lambda(V) = \frac{T(V)}{I(V)} = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \Lambda^p(V)$$

Con queste notazioni, possiamo pensare una p-forma come un funzionale lineare definito su $\Lambda^p(V)$. Per una forma ϕ, abbiamo legittimato la scrittura $\phi \in \Lambda^p(V)^* \simeq \Lambda^p(V^*)$.

Lasciamo al lettore la verifica che la complessificazione "commuta" con le operazioni di prodotto tensoriale e potenza esterna.

Una struttura lineare complessa su V induce una scomposizione

$$\Lambda^r(V)^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=r} \Lambda^{p,q}(V_J) \qquad \Lambda^{p,q}(V_J) = \Lambda^p(V^+) \otimes \Lambda^q(V^-)$$

Gli elementi di $\Lambda^{p,q}(V_J^*)$ sono chiamati (p,q)-*forme*.

1.2 CONNESSIONE E CURVATURA

In questa sezione M sarà una varietà differenziabile $\mathcal{C}^\infty$ (i.e., liscia). Assumeremo note le nozioni basilari di geometria differenziale e in particolare la definizione di fibrato vettoriale, che denoteremo con la tripla (E, π, M); naturalmente, le costruzioni che abbiamo visto per uno spazio vettoriale (e.g., l'algebra esterna) hanno senso anche per un fibrato, se le si riferisce alle singole fibre.

Ricordiamo che una *sezione* è una applicazione *liscia* $s\colon M \to E$ per cui vale $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$, scriveremo $s \in \Gamma(E)$. Esempi di fibrati sono il fibrato tangente TM e cotangente T^*M, le cui sezioni sono rispettivamente campi vettoriali e 1-forme differenziali.

Definizione 1.1. Una *connessione* è un operatore differenziale lineare

$$\nabla\colon \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$$

che soddisfa la *regola di Leibniz*

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty$$

La *curvatura* di ∇ è la 2-forma differenziale a valori in $E^* \otimes E$ (i.e., gli endomorfismi di E) definita, per campi di vettori X, Y e sezione s, dalla seguente:

$$R^\nabla(X,Y)s = \nabla_X\nabla_Y s - \nabla_Y\nabla_X s - \nabla_{[X,Y]}s$$

Si osservi che, dato un campo di vettori X, una connessione definisce una *derivata covariante* ∇_X semplicemente ponendo $\nabla_X(s) = \nabla(s)(X)$.

Inoltre, su tutte le costruzioni di algebra lineare che interessano E, ∇ induce canonicamente una connessione; ad esempio, su E^* abbiamo

$$(\nabla_X s^*)(s) = X(s^*(s)) - s^*(\nabla_X s)$$

per ogni campo di vettori X, e sezioni s, s^* rispettivamente di E, E^*. Un secondo esempio è il fibrato tensoriale $E \otimes E$, dove la connessione soddisfa

$$\nabla(s \otimes s') = (\nabla s) \otimes s' + s \otimes (\nabla s')$$

per ogni coppia di sezioni s, s'.

Supponiamo che M sia una varietà riemanniana con tensore metrico g (in altre parole, g è una sezione del fibrato $T^*M \otimes T^*M$, cioè un campo tensoriale 2-covariante). Il seguente fondamentale teorema riguarda le connessioni *affini*, cioè riferite al fibrato tangente.

Teorema 1.2. *Su M esiste una unica connessione affine che soddisfi le seguenti proprietà:*

1. $\nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) = [X, Y]$;
2. $\nabla g = 0$.

La proprietà 1 dice che ∇ è *libera da torsione*, mentre la proprietà 2 si esprime dicendo che ∇ è *g-metrica* (oppure g è *parallela* a ∇). L'unica connessione che soddisfi questi due requisiti è denominata *connessione di Levi-Civita*.

Quando riferito a tale connessione R^∇ è espresso nella forma di un campo tensoriale $(0, 4)$ chiamato *tensore di curvatura di Riemann-Christoffel*, definito dalla seguente equazione:

$$R(X, Y, Z, T) = g(R^\nabla(X, Y)Z, T)$$

Riportiamo di seguito le simmetrie del tensore R, per le quali si rimanda a [Hic65]:

- $R(X, Y, Z, T) = -R(X, Y, T, Z)$;
- $R(X, Y, Z, T) = R(Z, T, X, Y)$;
- $R(X, Y, Z, T) + R(Y, Z, X, T) + R(Z, X, Y, T) = 0$ (*prima identità di Bianchi*);
- $(\nabla_X R)(Y, Z, T, W) + (\nabla_Y R)(Z, X, T, W) + (\nabla_Z R)(X, Y, T, W)$ (*seconda identità di Bianchi*).

A questo punto, siamo pronti per definire l'oggetto del nostro interesse.

Definizione 1.3. Il *tensore di curvatura di Ricci* è il campo tensoriale (liscio) 2-covariante

$$\mathsf{Ric}(X, Y) = \mathsf{Tr}\{Z \mapsto R(Z, X)Y\}$$

dove $\mathsf{Tr}(\cdot)$ indica la traccia.

Equivalentemente, è possibile prendere una base locale ortonormale $\{e_i\}_{i=1}^n$ ($\dim M = n$) e definire

$$\mathsf{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^n R(e_i, X, Y, e_i)$$

A partire dalle simmetrie sopra esposte, si può dedurre la simmetria del tensore $\mathsf{Ric}(\cdot, \cdot)$.

Il tensore di Ricci riveste un ruolo importante anche in fisica, in quanto esso appare nella equazione di campo di Einstein nella teoria della relatività generale. Proprio da questo contesto, deriva il nome di *varietà di Einstein* per indicare quelle varietà riemanniane il cui tensore di Ricci è proporzionale al tensore metrico g per ogni punto di M:

$$\mathsf{Ric}(X, Y) = \lambda g(X, Y) \quad \forall X, Y \in T_p M$$

per $n \geq 3$ si può verificare che λ non dipende da p e dunque è costante (si veda [KN63]).

1.3 VARIETÀ KÄHLERIANE

Per introdurre la nozione di metrica kähleriana dobbiamo innanzitutto parlare di varietà quasi complesse.

1.3.1 Struttura quasi complessa

Sia M una varietà liscia. Una struttura quasi complessa è una struttura lineare complessa su ogni spazio tangente, che varia in modo $\mathcal{C}^\infty$ sulla varietà. In altre parole, è dato un campo tensoriale liscio J di tipo $(1,1)$ che soddisfa $J^2 = -\operatorname{id}_V$ quando visto come automorfismo di ogni spazio tangente. La coppia (M, J) diventa così una varietà *quasi complessa*.

In questa situazione, si può verificare che M deve avere dimensione pari e ammette una orientazione. Abbiamo visto che ogni spazio vettoriale di dimensione pari ammette una struttura lineare complessa, ciò corrisponde all'esistenza *puntuale* di un tensore J con le proprietà desiderate. Quando risulta possibile "incollare" questi tensori e giungere a una definizione globale, siamo in presenza di una varietà quasi complessa.

Come applicazione di quanto vista in precedenza, abbiamo una scomposizione del fibrato tangente complessificato. Le sezioni di TM^+ si diranno campi vettoriali di tipo $(1,0)$, mentre le sezioni di TM^- si diranno campi vettoriali di tipo $(0,1)$. Come prima, J induce una scomposizione sulle potenze esterne del fibrato:

$$\Lambda^r(T^*M)^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=r} \Lambda^{p,q}(T^*M)$$

Indichiamo com $\pi_{p,q}$ la proiezione canonica $\Lambda^r(T^*M) \to \Lambda^{p,q}(T^*M)$ e com d la derivata esterna $\Gamma(\Lambda^r T^*M \to \Gamma(\Lambda^{r+1}T^*M)$. Possiamo rifinire l'azione di d definendo

$$\partial = \pi_{p+1,q} \circ d \qquad \overline{\partial} = \pi_{p,q+1} \circ d$$

in modo che ∂ incrementi la *parte olomorfa* di uno (i.e., (p,q)-forme $\mapsto (p+1,q)$-forme), e $\overline{\partial}$ incrementi analogamente la parte *antiolomorfa*.

Questi operatori sono detti *di Dolbeaut*.

Si osservi che vale la scrittura

$$d = \sum_{r+s=p+q+1} \pi_{r,s} \circ d = \partial + \overline{\partial} + \cdots$$

Ogni varietà complessa possiede una struttura quasi complessa. In coordinate locali olomorfe $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$ è possibile definire le mappe

$$J\frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \qquad J\frac{\partial}{\partial y_\alpha} = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$$

o equivalentmente

$$J\frac{\partial}{\partial z_\alpha} = i\frac{\partial}{\partial z_\alpha} \qquad J\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha} = -i\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha}$$

Non è difficile verificare che con queste definizioni si ha una varietà quasi complessa, la cui struttura si dice *compatibile* con la struttura complessa.

La questione, opposta, se esista una struttura complessa a partire da una quasi complessa, è piuttosto difficile da affrontare e in generale si ha risposta negativa. Su ogni punto p della varietà quasi complessa, è possibile trovare coordinate per cui la struttura assume la forma canonica sopra esposta. Tuttavia, in generale questo non garantisce che J assuma tale forma canonica su un *intero intorno* di p. Coordinate del genere, quando esistono, vengono chiamate *coordinate locali olomorfe per* J, e danno la possibilità di definire globalmente un atlante olomorfo per M che diventa così una varietà complessa la cui struttura induce J. In questo caso, si dice che J è *integrabile*.

Dato un campo tensoriale A di tipo $(1,1)$, il *tensore di Nijenhuis* associato è un campo tensoriale $(1,2)$ dato da

$$N_A(X,Y) = -A^2[X,Y] + A([AX,Y] + [X,AY]) - [AX,AY]$$

(stiamo implicitamente usando l'identificazione $E^* \otimes E \simeq \operatorname{End} E$).

Il *teorema di Newlander-Nirenberg* (per il quale rimandiamo a [Hör90]) afferma che una struttura quasi complessa J è integrabile se e solo se $N_J = 0$.

Teorema 1.4. *Una qualsiasi delle condizioni sottostanti implica l'esistenza di una unica struttura complessa:*

- $N_J = 0$;
- $d = \partial + \bar{\partial}$;
- $\bar{\partial}^2 = 0$.

Concludiamo la sottosezione con due risultati importanti (per il primo si veda [GH78]).

Lemma 1.5 ($\bar{\partial}$-lemma di Poincaré)**.** *Una* $(0,1)$*-forma* $\bar{\partial}$*-chiusa è localmente* $\bar{\partial}$*-esatta.*

Lemma 1.6 ($i\partial\bar{\partial}$-lemma locale)**.** *Sia* $\omega \in \Gamma(\Lambda^{1,1}T^*M) \cap \Gamma(\Lambda^2 T^*M)$ *una* 2*-forma reale di tipo* $(1,1)$ *su una varietà complessa* M*. Allora* ω *è chiusa se e solo se ogni punto* $p \in M$ *possiede un intorno aperto* U *tale che* $\omega|_U = i\partial\bar{\partial}u$ *per qualche funzione reale* u*.*

Dimostrazione. Una implicazione è chiara:

$$d(i\partial\overline{\partial}) = i(\partial + \overline{\partial})\partial\overline{\partial} = i(\partial^2\overline{\partial} - \partial\overline{\partial}^2) = 0$$

Ora sia ω una $(1,1)$-forma reale. Dal lemma di Poincaré, esiste localmente una 1-forma τ con $d\tau = \omega$. Sia $\tau = \tau^{1,0} + \tau^{0,1}$ la scomposizione di τ in forme di tipo $(1,0)$ e $(0,1)$.

Chiaramente, si ha $\tau^{1,0} = \overline{\tau^{0,1}}$. Confrontando i tipi nell'uguaglianza

$$\omega = d\tau = \overline{\partial}\tau^{0,1} + (\partial\tau^{0,1} + \overline{\partial}\tau^{1,0}) + \partial\tau^{1,0}$$

otteniamo $\overline{\partial}\tau^{0,1} = 0$ e $\omega = \partial\tau^{0,1} + \overline{\partial}\tau^{1,0}$. Allora il lemma precedente restituisce una funzione locale f tale che $\tau^{0,1} = \overline{\partial} f$. Per coniugazione, otteniamo $\tau^{1,0} = \partial\overline{f}$, quindi $\omega = \partial\tau^{0,1} + \overline{\partial}\tau^{1,0} = \partial\overline{\partial} f + \overline{\partial}\partial\overline{f} = i\partial\overline{\partial}(2\,\mathrm{Im}\, f)$, dunque la tesi con $u = 2\,\mathrm{Im}\, f$. □

1.3.2 Struttura hermitiana e metrica kähleriana

Sia (E, π, M) un fibrato vettoriale complesso, per il momento non assumiamo l'esistenza di una struttura quasi complessa per M.

Definizione 1.7. Una *struttura hermitiana* su E è un campo liscio di prodotti hermitiani sulle fibre di E, cioè, per ogni $p \in M$, $H\colon E_p \otimes \overline{E_p} \to \mathbb{C}$ soddisfa:

- $H(u,v) = \overline{H(v,u)}$ per ogni $v, u \in E_p$;
- $H(u,u) > 0$ per ogni $u \neq 0$.

L'ultima condizione ci dice che H è non degenere, talvolta sarà utile pensare $H\colon E \to E^*$ come un isomorfismo $\mathbb{C}$-antilineare.

Ogni fibrato vettoriale di rango k ammette una struttura hermitiana. Per vederlo, si prenda una banalizzazione (U_i, ψ_i) di E e una partizione dell'unità f_i subordinata al ricoprimento aperto $\{U_i\}$ di M. Per ogni $p \in U_i$, denotiamo con $(H_i)_p$ il pullback del prodotto hermitiano standard su $\mathbb{C}^k$ dato dalla mappa $\mathbb{C}$-lineare $\psi_i|_{E_p}$. Allora $H = \sum f_i H_i$ è una struttura hermitiana ben definita su E.

Definizione 1.8. Una *metrica hermitiana* su una varietà quasi complessa (M, J) è una metrica riemanniana h preservata da J, cioè $h(X,Y) = h(JX, JY)$ per ogni $X, Y \in TM$. La *forma fondamentale* di una metrica hermitiana è definita da $\Omega(X,Y) = h(JX, Y)$.

Possiamo estendere la metrica hermitiana per $\mathbb{C}$-linearità su $TM^{\mathbb{C}}$ in modo che valgano:

- $h(\overline{Z}, \overline{W}) = \overline{h(Z, W)}$ per ogni $Z, W \in TM^{\mathbb{C}}$;
- $h(Z, \overline{Z}) > 0$ per ogni $Z \in TM^{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$;
- $h(Z, W) = 0$ per ogni $Z, W \in TM^{+}$ e per ogni $Z, W \in TM^{-}$.

Il lettore potrà verificare che ogni tensore simmetrico su $TM^{\mathbb{C}}$ soddisfacente tali proprietà definisce una metrica hermitiana per restrizione a TM.

Si osservi che il fibrato tangente di una varietà quasi complessa è in particolare un fibrato vettoriale complesso. Se h è una metrica hermitiana su M, allora $H(X, Y) = (h - i\Omega)(X, Y)$ definisce una struttura hermitiana sul fibrato (TM, J). Al contrario, una struttura hermitiana H su TM come fibrato complesso definisce una metrica hermitiana h ponendo $h = \operatorname{Re} H$.

Ogni varietà quasi complessa ammette una metrica hermitiana. Si sceglie una metrica riemanniana g e si pone $h(X, Y) = g(X, Y) + g(JX, JY)$.

Siano z_α coordinate olomorfe su una varietà hermitiana (M^{2m}, J, h) (l'esponente indica la dimensione). Denotiamo con $h_{\alpha\overline{\beta}}$ i coefficienti del tensore metrico in queste coordinate locali:

$$h_{\alpha\overline{\beta}} = h\left(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_\beta}\right)$$

Il seguente lemma è immediato.

Lemma 1.9. *La forma fondamentale è data da*

$$\Omega = i \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} h_{\alpha\overline{\beta}} dz_\alpha \wedge d\overline{z}_\beta$$

Supponiamo ora che la forma fondamentale di una varieta complessa hermitiana sia chiusa. Dal lemma 1.6 otteniamo localmente una funzione reale u tale che $\Omega = i\partial\overline{\partial}u$, che in coordinate locali si legge

$$h_{\alpha\overline{\beta}} = \frac{\partial^2 u}{\partial z_\alpha \partial \overline{z}_\beta}$$

Questa espressione particolarmente semplice ci porta finalmente alla definzione centrale del capitolo.

Definizione 1.10. Una metrica hermitiana h su una varietà quasi complessa (M, J) si dice *metrica kähleriana* se J è una struttura complessa e la forma fondamentale Ω è chiusa.

$$h \text{ è kähleriana} \iff \begin{cases} N_J = 0 \\ d\Omega = 0 \end{cases}$$

Una funzione reale locale u che soddisfi $\Omega = i\partial\overline{\partial}u$ si chiama *potenziale di Kähler* della metrica h.

2 METRICHE KÄHLERIANE

In questo capitolo introduciamo la *connessione di Chern* e le proprietà della sua curvatura. Successivamente, il nostro obiettivo sarà quello di caratterizzare le metriche kähleriane, in particolare vogliamo esprimere le condizioni di varietà kähleriana in termini della derivata covariante associata alla connesione di Levi-Civita di h.

2.1 CONNESSIONE DI CHERN

Dato un fibrato vettoriale olomorfo (E, π, M) (con M varietà complessa) possiamo definire il fibrato $\Lambda^{p,q}E = \Lambda^{p,q}(T^*M) \otimes E$ delle (p,q)-forme a valori in E e l'operatore $\bar\partial \colon \Gamma(\Lambda^{p,q}E) \to \Gamma(\Lambda^{p,q+1}E)$ nel modo seguente. Se una sezione σ di $\Lambda^{p,q}(E)$ è data da $\sigma = (\omega_1, \dots, \omega_k)$ in una certa banalizzazione locale (dove le ω_i sono (p,q)-forme locali), definiamo

$$\bar\partial\sigma = (\bar\partial\omega_1, \dots, \bar\partial\omega_k)$$

Se in un'altra banalizzazione del fibrato $\sigma = (\tau_1, \dots, \tau_k)$, allora si ha $\tau_j = \sum g_{jk}\omega_k$ per certe funzioni olomorfe g_{jk}, e dunque $\bar\partial\tau_j = \sum g_{jk}\bar\partial\omega_k$; questo dimostra che $\bar\partial\sigma$ non dipende dalla banalizzazione scelta. Per costruzione si ha $\bar\partial^2 = 0$ e la regola di Leibniz:

$$\bar\partial(\omega \wedge \sigma) = (\bar\partial\omega) \wedge \sigma + (-1)^{p+q}\omega \wedge (\bar\partial\sigma) \quad \forall \omega \in \Gamma(\Lambda^{p,q}T^*M), \sigma \in \Gamma(\Lambda^{r,s}E)$$

Si osservi che i fibrati $\Lambda^{p,q}T^*M$ in generale *non* sono olomorfi quando $q \neq 0$.

Un operatore $\bar\partial \colon \Gamma(\Lambda^{p,q}E) \to \Gamma(\Lambda^{p,q+1}E)$ su un fibrato vettoriale complesso E che soddisfi la regola di Leibniz è detto *struttura pseudo-olomorfa*. Se si ha anche $\bar\partial^2 = 0$, allora $\bar\partial$ si dice *struttura olomorfa*.

Vale il seguente risultato, per la cui dimostrazione rimandiamo a [Mor07].

Teorema 2.1. *Un fibrato vettoriale E è olomorfo se e solo se possiede una struttura olomorfa.*

Sia ora M una varietà differenziabile (non necessariamente complessa) e (E, π, M) un fibrato vettoriale complesso. A partire da una connessione $\mathbb{C}$-lineare

$$\nabla \colon \Gamma(E) \to \Gamma(\Lambda^1 E)$$

è possibile definire una *derivata esterna covariante* (o *di gauge*)

$$d^{\nabla}\colon \Gamma(\Lambda^r E) \to \Gamma(\Lambda^{r+1}E)$$

nel modo seguente.

Per $r = 0$ (quando $\Lambda^r E = E$), poniamo $d^{\nabla} = \nabla$. Per le r-forme a valori in E poniamo

$$d^{\nabla}(\omega \otimes \sigma) = d\omega \otimes \sigma + (-1)^r \omega \wedge \nabla\sigma$$

dove il prodotto wedge è inteso

$$\omega \wedge \nabla\sigma = \sum_{i=1}^{n} \omega \wedge \varepsilon_i \otimes \nabla_{e_i}\sigma$$

per una qualsiasi base locale $\{e_i\}_{i=1}^n$ di TM con base duale $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$.

È importante osservare che, a differenza della derivata esterna "usuale", l'applicazione $(d^{\nabla})^2$ *non* è nulla. Essa è comunque rilevante poiché risulta legata alla curvatura dalla formula

$$(d^{\nabla})^2\sigma = R^{\nabla} \wedge \sigma \quad \forall \sigma \in \Gamma(\Lambda^r E)$$

In particolare, vediamo che $\nabla^2 = \nabla \circ \nabla$ coincide con la curvatura. In seguito, per non appesantire la notazione, useremo ancora ∇ al posto di d^{∇}.

Supponiamo ora (M, J) varietà complessa. Ancora una volta possiamo considerare le proiezioni $\pi^{1,0}\colon \Lambda^1 E \to \Lambda^{1,0}E$ e $\pi^{0,1}\colon \Lambda^1 E \to \Lambda^{0,1}E$ definire $\nabla^{1,0} = \pi^{1,0} \circ \nabla$ e $\nabla^{0,1} = \pi^{0,1} \circ \nabla$. Chiaramente non c'è alcuna difficoltà ad estendere tali operatori in modo che

$$\begin{aligned} \nabla^{1,0}\colon \Gamma(\Lambda^{p,q}E) &\to \Gamma(\Lambda^{p+1,q}E) \\ \nabla^{0,1}\colon \Gamma(\Lambda^{p,q}E) &\to \Gamma(\Lambda^{p,q+1}E) \\ \nabla^{1,0}(\omega \otimes \sigma) &= \partial\omega \otimes +(-1)^{p+q}\omega \wedge \nabla^{1,0} \\ \nabla^{0,1}(\omega \otimes \sigma) &= \bar{\partial}\omega \otimes +(-1)^{p+q}\omega \wedge \nabla^{0,1} \end{aligned}$$

per ogni $\omega \in \Gamma(\Lambda^{p,q}T^*M), \sigma \in \Gamma(E)$. Si osservi che $\nabla^{0,1}$ è una struttura pseudo-olomorfa.

Per ogni sezione σ di E possiamo scrivere

$$\begin{gathered} R^{\nabla}(\sigma) = \nabla^2\sigma = (\nabla^{1,0} + \nabla^{0,1})^2(\sigma) = \\ (\nabla^{1,0})^2(\sigma) + (\nabla^{0,1})^2(\sigma) + (\nabla^{1,0}\nabla^{0,1} + \nabla^{0,1}\nabla^{1,0})(\sigma) \end{gathered}$$

quindi la parte $\Lambda^{0,2}$ della curvatura è data da

$$(R^{\nabla})^{0,2} = (\nabla^{0,1})^2$$

da cui vediamo, grazie al teorema 2.1, che E è un fibrato vettoriale olomorfo con struttura olomorfa $\bar{\partial} = \nabla^{0,1}$ quando la parte $\Lambda^{0,2}$ della curvatura svanisce. Questo è vero anche nella direzione opposta: basta scegliere una struttura hermitiana su E e applicare il prossimo (importante) teorema.

Teorema 2.2. *Data comunque una struttura hermitiana H su un fibrato vettoriale olomorfo E con struttura olomorfa $\overline{\partial}$, esiste una unica connessione H-metrica ∇ tale che $\nabla^{0,1} = \overline{\partial}$.*

La connessione data dal teorema è la *connessione di Chern*.

Dimostrazione. Supponiamo che ∇ sia una connessione H-metrica con $\nabla^{0,1} = \overline{\partial}$. L'isomorfismo $H\colon E \to E^*$ è parallelo, quindi per ogni sezione σ di E e ogni vettore *reale* X abbiamo

$$\nabla_X(H(\sigma)) = \nabla_X(H)(\sigma) + H(\nabla_X \sigma) = H(\nabla_X \sigma)$$

Grazie all'antilinearità di H, per un vettore complesso $Z \in TM^{\mathbb{C}}$ otteniamo

$$\nabla_Z(H(\sigma)) = H(\nabla_{\overline{Z}} \sigma)$$

Per $Z \in TM^+$ questo mostra

$$\nabla^{1,0}(\sigma) = H^{-1} \circ \nabla^{0,1}(H(\sigma)) = H^{-1} \circ \overline{\partial}(H(\sigma))$$

e dunque $\nabla = \overline{\partial} + H^{-1} \circ \overline{\partial} \circ H$, che prova l'esistenza e unicità di ∇. □

La componente $(0,2)$ della curvatura della connessione di Chern è nulla. In effetti,

$$R^{0,2}(\sigma) = \nabla^{0,1}(\nabla^{0,1}(\sigma)) = \overline{\partial}^2(\sigma) = 0.$$

Analogamente per la componente $(2,0)$:

$$\nabla^{1,0}(\nabla^{1,0}(\sigma)) = \nabla^{1,0}(H^{-1} \circ \overline{\partial}(H(\sigma))) = H^{-1} \circ \overline{\partial}^2(H(\sigma)) = 0$$

abbiamo così mostrato che la curvatura è una $(1,1)$-forma.

2.2 CARATTERIZZAZIONI DI h

Fino ad ora abbiamo introdotto due connessioni che hanno una importanza rilevante nei rispettivi contesti. Questi due oggetti sono in stretta relazione quando le strutture su cui sono definite lo permettono, ed hanno buone proprietà.

In effetti, come vedremo in questa sezione, confrontando le due connessioni si ottiene che esse coincidono su varietà kähleriane (i.e., su cui la metrica h è kähleriana).

Vale il seguente teorema.

Teorema 2.3. *Data una metrica hermitiana h su una varietà quasi complessa* (M, J) *con connessione di Levi-Civita* ∇*, si può dotare M di una struttura complessa* ($N_J = 0$) *se e solo se*

$$(\nabla_{JX}J)Y = J(\nabla_X J)Y$$

per ogni X, Y *in* TM.

La metrica h è kähleriana se e solo se J è parallelo rispetto alla connessione di Levi-Civita, ovvero $\nabla J = 0$.

Questo teorema, in sostanza, dice che condizione necessaria e sufficiente affinché la metrica sia kähleriana è che l'operatore J abbia derivata (covariante) nulla rispetto a ∇, che è una richiesta molto naturale, essendo J un operatore "intrinseco"nella struttura della varietà complessa.

Il prossimo lemma è ciò di cui abbiamo bisogno per concludere.

Lemma 2.4. *Per ogni vettore Y in TM, vale la seguente relazione fra la connessione di Levi-Civita e* $\bar{\partial}$:

$$\bar{\partial}Y(X) = \frac{1}{2}(\nabla_X Y + J\nabla_{JX}Y - J(\nabla_Y J)X)$$

Siamo infine arrivati al risultato che ci interessa; in realtà per i nostri scopi sarebbe sufficiente provare che per una varietà kähleriana le connessioni di Chern e di Levi-Civita coincidono, ma il teorema, più forte, afferma che vale anche il viceversa:

Teorema 2.5. *Su una varietà complessa hermitiana* (M, J, h)*, la connessione di Levi-Civita* ∇ *e la connessione di Chern* $\overline{\nabla}$ *coincidono se e solo se h è di Kähler.*

Dimostrazione. ($\nabla = \overline{\nabla}$): sappiamo che $\overline{\nabla}$ è una connessione $\mathbb{C}$-lineare, quindi vale $\nabla iX = i\nabla X$. Questo, per X in TM equivale a $\nabla(JX) = J\nabla X$, che è come dire, data la definizione di ∇ per i tensori di tipo $(1,1)$, che $(\nabla J) = 0$. Per il teorema precedente ciò implica che la varietà sia Kähler con metrica h.

Viceversa, supponiamo che h sia kähleriana. Allora in particolare la varietà è complessa, e vale $\nabla J = 0$. Inoltre $\nabla h = 0$ per definizione. Quindi

$$\begin{gathered}
-i(\nabla H)(X,Y) = (\nabla\Omega)(X,Y) = d(\Omega(X,Y)) - \Omega(\nabla X, Y) - \Omega(X, \nabla Y) = \\
d(h(JX,Y)) - h(J\nabla X, Y) - h(JX, \nabla Y) = \\
d(h(JX,Y)) - h(\nabla(JX), Y) + h((\nabla J)X, Y) - h(JX, \nabla Y) = \\
d(h(JX,Y)) - h(\nabla(JX), Y) - h(JX, \nabla Y) = (\nabla h)(JX, Y) = 0
\end{gathered}$$

e dunque $\nabla H = 0$.

Inoltre, per il lemma precedente e per l'uguaglianza $(\nabla_{JX}J)Y = J(\nabla_X J)Y$, si ha (per Y in TM),

$$\bar{\partial}Y(X) = \frac{1}{2}(\nabla_X Y + J\nabla_{JX}Y) = \frac{1}{2}(\nabla_X + i\nabla_{JX})Y = \nabla_X^{(0,1)}Y$$

Quindi, ∇ soddisfa le proprietà soddisfatte dall'unica connessione di Chern, cioè $\nabla = \overline{\nabla}$. □

Per completezza, informiamo il lettore che è possibile provare anche la seguente caratterizzazione: una metrica h su una varietà complessa è di Kähler se e solo se esistono coordinate olomorfe che "coprono" la varietà tali per cui h si approssima fino al secondo ordine con la metrica hermitiana standard.

3 FORMA DI RICCI E APPLICAZIONI

In questo capitolo introduciamo e studiamo nel dettaglio la *forma di Ricci*. Innanzitutto, ne daremo una descrizione in termini di coordinate, che ci permetterà di ricavare proprietà particolari di questo oggetto. Successivamente richiameremo in forma sintetica i lineamenti essenziali della *teoria di Chern-Weil*, soffermandoci sulla prima classe di Chern, intimamente collegata con la forma di Ricci.

Infine, daremo una parziale dimostrazione della *congettura di Calabi* e del teorema di Aubin-Yau, risultato di fondamentale importanza per stabilire relazioni tra le proprietà della forma e la geometria di una varietà kähleriana compatta.

3.1 PRIME PROPRIETÀ

Sia (M^{2m}, J, h) una varietà complessa con h metrica di Kähler, e ∇ connessione di Chern e di Levi-Civita relativa ad h. Abbiamo definito precedentemente l'operatore di curvatura R, e ne abbiamo delineato le proprietà basilari. Vogliamo far vedere che il tensore di Ricci relativo a R definisce in maniera naturale una forma, detta *forma di Ricci*.

Per questo scopo notiamo che

$$\nabla_X \nabla_Y JZ = \nabla_X J \nabla_Y Z = J \nabla_X \nabla_Y Z$$

perché $\nabla J = 0$.

Quindi segue direttamente l'uguaglianza

$$R(X,Y)JZ = JR(X,Y)Z$$

e utilizzando le simmetrie del tensore di curvatura,

$$\begin{aligned} R(JW, JZ, X, Y) &= R(X, Y, JW, JZ) = \\ &= (R(X,Y)JW, JZ) = (JR(X,Y)W, JZ) = \\ &= (R(X,Y)W, Z) = R(X,Y,W,Z) = R(W,Z,X,Y) \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il tensore di Ricci, scelta una base locale ortonormale $\{e_i\}$ di TM,

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \sum_{i=1}^{2m} (R(Je_i, X)Y, Je_i) = \sum_{i=1}^{2m} (R(e_i, JX)JY, e_i) = \mathrm{Ric}(JX, JY)$$

perché anche $\{Je_i\}$ è un sistema ortonormale.

Questo comporta che sia possibile definire una 2-forma nel modo seguente.

Definizione 3.1. La *forma di Ricci* è la forma ρ che risulta definita dalla seguente uguaglianza:

$$\rho(X,Y) = \mathrm{Ric}(JX,Y)$$

La definizione è ben posta perché $\mathrm{Ric}(JX,Y)$ è antisimmetrico per ogni X,Y in TM.

Il nostro prossimo obiettivo è dare una caratterizzazione ben precisa della forma di Ricci in coordinate.

Si ottiene un risultato globale, che mostra come la forma di Ricci sia completamente determinata dalla struttura olomorfa del fibrato tangente e dalla matrice che rappresenta h (con le sue derivate seconde).

Ciò non deve sorprendere in quanto la curvatura stessa dipende dalle derivate prime e seconde della metrica.

Anticipiamo un risultato che ci sarà utile nel seguito.

Lemma 3.2. *Vale la seguente uguaglianza:*

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \frac{1}{2}Tr(R(X,JY)\circ J)$$

Dimostrazione. Ricordiamo l'identità di Bianchi:

$$R(X,Y,Z,T) + R(Y,Z,X,T) + R(Z,X,Y,T) = 0$$

Mettiamoci in un sistema ortonormale $\{e_i\}$. Allora vale, sfruttando le prime proprietà della forma, le simmetrie della curvatura e la prima identità di Bianchi:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(X,Y) &= \sum_{i=1}^{2m} R(e_i,X,Y,e_i) = \\
&= \sum_{i=1}^{2m} R(e_i,X,JY,Je_i) = \\
&= \sum_{i=1}^{2m}(-R(X,JY,e_i,Je_i) - R(JY,e_i,X,Je_i)) = \\
&= \sum_{i=1}^{2m}(R(X,JY,Je_i,e_i) + R(Y,Je_i,X,Je_i)) = \\
&= \sum_{i=1}^{2m}(R(X,JY,Je_i,e_i) - R(Je_i,X,Y,Je_i)) = \\
&= \mathrm{Tr}(R(X,JY)\circ J) - \mathrm{Ric}(X,Y)
\end{aligned}$$

□

Ancora una volta entrano in gioco le simmetrie del tensore di curvatura, proprietà fondamentali e utili, che utilizzeremo di nuovo fra poco.

Vogliamo ora calcolare la forma di Ricci in coordinate. Da una parte questo ci permette di familiarizzare con strumenti (quali i *simboli di Christoffel*) utili nelle applicazioni relative alla curvatura (la teoria della relatività generale, ad esempio), dall'altra avremo una formula esplicita per la forma di Ricci, calcolabile direttamente a partire dalla metrica, che implicherà tra l'altro la *chiusura* della forma stessa.

Sia dunque (M^{2m}, J, h) una varietà kähleriana (quindi complessa). Abbiamo, naturalmente, delle coordinate olomorfe che indicheremo con z_α, e coordinate dello spazio tangente che indicheremo

$$Z_\alpha = \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \qquad Z_{\overline{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}_\alpha}$$

e in generale, quando non ci interesserà distinguere tra coordinate z_α o $\overline{z}_\alpha$, con Z_A. Infine indicheremo con h_{AB} le quantità $h(Z_A, Z_B)$, mentre le entrate relative alla matrice inversa saranno denotate h^{AB}.

Vogliamo di nuovo sottolineare che la curvatura (e la connessione di Levi-Civita) è univocamente determinata dalla matrice della metrica, e ciò sarà vero anche per la forma di Ricci.

Iniziamo col determinare la curvatura (i calcoli che seguono possono essere anche interpretati come una dimostrazione dell'esistenza e unicità della connessione di Levi-Civita).

Innanzitutto la metrica è hermitiana, perciò

$$\begin{gathered} h_{\alpha\beta} = h_{\overline{\alpha}\overline{\beta}} = 0 \\ h_{\overline{\beta}\alpha} = h_{\alpha\overline{\beta}} = \overline{h_{\beta\overline{\alpha}}} \end{gathered}$$

ad esempio la prima uguaglianza segue subito da

$$h(X,Y) = h(JX, JY) \Longrightarrow h(Y - iJY, X - iJX) = 0$$

e anche la seconda

$$h(X - iJX, Y + iJY) = h(Y + iJY, X - iJX) = \overline{h(Y - iJY, X + iJX)}$$

Nel seguito utilizzeremo la convenzione di Einstein. Definiamo i simboli di Christoffel Γ^C_{AB}, che rappresentano l'azione dell'operatore di curvatura in coordinate, in concreto

$$\nabla_{Z_A} Z_B = \Gamma^C_{AB} Z_C$$

Poiché servirà nel seguito, mostriamo l'analoga convenzione che utilizzeremo per il tensore di curvatura:

$$R(Z_A, Z_B) Z_C = R^E_{ABC} Z_E$$

$$R(Z_A, Z_B, Z_C, Z_D) = h_{DE} R^E_{ABC}$$

Dalla proprietà di assenza di torsione e poiché $[Z_A, Z_B] = 0$ si ha

$$\Gamma^C_{AB} = \Gamma^C_{BA}$$

Inoltre, coniugando e per linearità

$$\Gamma^C_{AB} = \overline{\Gamma^{\overline{C}}_{\overline{BA}}}$$

Infine, per il fatto che la connessione di Levi-Civita è anche una connessione di Chern, si ha $\nabla^{1,0}(X + iJX) = 0$ e quindi

$$\Gamma^{\gamma}_{A\overline{\beta}} = 0$$

Si può far vedere che le simmetrie appena dimostrate implicano che gli unici simboli di Christoffel non nulli sono $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ e $\Gamma^{\overline{\gamma}}_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}$.

In particolare $\Gamma^C_{\alpha\overline{\beta}} = 0$ implica $\nabla_{Z_\alpha} Z_{\overline{\beta}} = 0$ e ancora, per la compatibilità con la metrica h della connessione,

$$\frac{\partial h_{\beta\overline{\gamma}}}{\partial z_\alpha} = h(\nabla_{Z_\alpha} Z_\beta, Z_{\overline{\gamma}}) = \Gamma^{\delta}_{\alpha\beta} h_{\delta\overline{\gamma}}$$

e quindi invertendo la matrice h.

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = h^{\gamma\overline{\delta}} \frac{\partial h_{\beta\overline{\delta}}}{\partial z_\alpha}$$

Soffermiamoci un attimo sulla precedente formula per notare che la curvatura della varietà non può dipendere dai coefficienti di Christoffel, ma deve dipendere da una qualche combinazione di loro derivate.

Questo perché, dalla caratterizzazione delle metriche kähleriane, si possono scegliere coordinate che osculano alla metrica hermitiana standard fino al secondo ordine.

È utile per il seguito scrivere in un'altra forma i simboli di Christoffel. In particolare, utilizziamo ora un lemma di cui non riportiamo la dimostrazione (si veda [Mor07], si tratta semplicemente di un calcolo):

Lemma 3.3. *Data una mappa* $(h_{ij}) = (h_{ij}(t)) \colon \mathbb{R} \to GL_m(\mathbb{C})$, *denotando con* (h^{ij}) *la sua inversa e con* det *il determinante di* (h_{ij}), *risulta:*

$$\frac{d(\det)}{dt} = \det \sum_{i,j=1}^{m} \frac{dh_{ij}}{dt} h^{ij}$$

Con questo lemma vediamo come si trasformano i simboli di Christoffel $\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta}$, che entreranno nella formula della forma di Ricci:

$$\begin{aligned}\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} = h^{\alpha\overline{\gamma}}\frac{\partial h_{\alpha\overline{\gamma}}}{\partial z_\beta} = \\ = \frac{1}{\det}\frac{\partial \det}{\partial z_\beta} = \frac{\partial \log\det}{\partial z_\gamma}\end{aligned}$$

dove det indica il determinante della matrice $h_{\alpha\overline{\beta}}$.

A questo punto vediamo cosa succede alla curvatura. Essendo, di nuovo, ∇ una connessione di Chern, risulta

$$R^{\overline{\delta}}_{AB\gamma} = R^{\delta}_{AB\overline{\gamma}} \Longrightarrow R_{AB\gamma\delta} = R_{AB\overline{\gamma}\overline{\delta}} = 0$$

Si lascia al lettore di verificare le (facili) conseguenze delle simmetrie appena descritte e delle altre relative al tensore di curvatura, associate alle uniche componenti del tensore di curvatura non nulle:

$$\begin{array}{cccc} R^{\delta}_{\alpha\overline{\beta}\gamma} & R^{\overline{\delta}}_{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}} & R^{\overline{\delta}}_{\alpha\overline{\beta}\overline{\gamma}} & R^{\delta}_{\overline{\alpha}\beta\gamma} \\ R_{\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}\delta} & R_{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta}} & R_{\alpha\overline{\beta}\overline{\gamma}\delta} & R_{\overline{\alpha}\beta\gamma\overline{\delta}} \end{array}$$

Possiamo ora calcolare gli elementi del tensore di curvatura. Si ha:

$$\begin{aligned} R^{\delta}_{\alpha\overline{\beta}\gamma}Z_\delta = R(Z_\alpha, Z_{\overline{\beta}})Z_\gamma = \nabla_{Z_\alpha}\nabla_{Z_{\overline{\beta}}}Z_\gamma - \nabla_{Z_{\overline{\beta}}}\nabla_{Z_\alpha}Z_\gamma - \nabla_{[Z_\alpha, Z_{\overline{\beta}}]} = \\ = -\nabla_{Z_{\overline{\beta}}}\nabla_{Z_\alpha}Z_\gamma = -\nabla_{Z_{\overline{\beta}}}\Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma}Z_\delta = -\frac{\partial\Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma}}{\partial\overline{z}_\beta}Z_\delta \end{aligned}$$

e uguagliando componente per componente

$$R^{\delta}_{\alpha\overline{\beta}\gamma} = -\frac{\partial\Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma}}{\partial\overline{z}_{\overline{\beta}}}$$

Siamo ora pronti per mostrare come la forma di Ricci dipende dalla metrica kähleriana h. Infatti, sempre tenendo presente la convenzione di Einstein:

$$\mathrm{Ric}_{\alpha\overline{\beta}} = \mathrm{Ric}_{\overline{\beta}\alpha} = R^{A}_{A\overline{\beta}\alpha} = R^{\alpha}_{\gamma\overline{\beta}\alpha} = -\frac{\partial\Gamma^{\gamma}_{\gamma\alpha}}{\partial\overline{z}_\beta} = -\frac{\partial^2\log\det}{\partial z_\alpha\partial\overline{z_\beta}}$$

$$\mathrm{Ric} = -\sum_{\alpha,\beta=1}^{m}\left(\frac{\partial^2\log\det}{\partial z_\alpha\partial\overline{z_\beta}}dz_\alpha d\overline{z_\beta}\right)$$

da cui risulta:

$$\rho = -i\partial\overline{\partial}\log\det$$

dove gli operatori ∂ e $\overline{\partial}$ sono definiti da:

$$\partial \equiv \sum_{\alpha=1}^{m} dz_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha}$$
$$\overline{\partial} \equiv \sum_{\alpha=1}^{m} d\overline{z_\alpha} \frac{\partial}{\partial \overline{z_\alpha}}$$

e valgono le seguenti identità:

$$d = \partial + \overline{\partial}$$
$$\partial\partial = \overline{\partial\partial} = 0$$

Grazie a questa particolare espressione della forma di Ricci è facile verificare che si tratta di una forma chiusa:

$$d\rho = -i(\partial + \overline{\partial})\partial\overline{\partial} \log \det = -i\partial\partial\overline{\partial} \log \det - i\overline{\partial}\partial\overline{\partial} \log \det = 0$$

Studieremo ora la relazione che c'è tra la forma di Ricci e la prima classe di Chern, e vedremo una caratterizzazione delle varietà Ricci-piatte (*Ricci-flat*) in termini della forma stessa.

3.2 CLASSI DI CHERN

La teoria di Chern-Weil permette di definire le classi di Chern come certi polinomi invarianti della matrice di una connessione sulla varietà. La sua potenza sta nel fatto che tali classi, oltre ad essere chiuse, non dipendono dalla connessione scelta per calcolarle. Ciò vuol dire che questi polinomi sono caratteristici della struttura differenziale della varietà stessa, e non dipendono dalla connessione, ovvero struttura riemanniana, che stiamo considerando.

La teoria di Chern-Weil ci permette di trovare in maniera esplicita le classi di Chern a partire da una connessione, ad esempio quella di Levi-Civita, direttamente calcolabile a partire da una metrica sulla varietà.

Le classi di Chern sono definite in generale su qualsiasi fibrato; a noi interesserà in seguito soprattutto il caso del fibrato tangente, dando particolare attenzione alla prima classe di Chern, che è strettamente collegata alla forma di Ricci per varietà kähleriane.

Sia $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ un riferimento locale del fibrato E. Possiamo esprimere l'operatore di connessione tramite una matrice (ω_{ij}) di 1-forme:

$$\nabla \sigma_i = \sum_{j=1}^{k} \omega_{ij} \otimes \sigma_j$$

da cui si può ricavare l'espressione del tensore di curvatura:

$$R^{\nabla}\sigma_i = \sum_{j=1}^{k} \Omega_{ij} \otimes \sigma_j = \sum_{j=1}^{k} (d\omega_{ij} - \sum_{l=1}^{k} \omega_{il} \wedge \omega_{lj})\sigma_j$$

in cui (Ω_{ij}) è una matrice di 2-forme

Poiché la matrice (Ω_{ij}) si trasforma, al variare del sistema di riferimento, tramite una relazione di similitudine, ha senso definire delle forme (globali) sulla varietà a partire dai coefficienti del suo polinomio caratteristico; queste saranno poi le classi di Chern. In particolare, la prima classe di Chern $c_1(E)$ è data dalla traccia di $\frac{i}{2\pi}(\Omega_{ij}) = \frac{1}{2\pi}\,\mathsf{Tr}(R^{\nabla})$ e vale la seguente proprietà:

Teorema 3.4. *La classe di coomologia reale su un fibrato complesso (E, π, M) di $[\frac{i}{2\pi}\,\mathsf{Tr}(R^{\nabla})]$ è uguale all'immagine di $c_1(E)$ in $H^2(M, \mathbb{R})$*

Questo teorema mette in evidenza la stretta relazione tra la prima classe di Chern e la forma di Ricci. Saremmo tentati di dire, a questo punto, che $c_1(TM) = \frac{1}{2\pi}\rho$; prima però dovremo stabilire l'uguaglianza tra le due definizioni di curvatura R e R^{∇}.

Riportiamo ora, senza dimostrazione (si veda [Moro7]), un lemma che ci sarà utile nella prossima sezione, riguardo le proprietà della prima classe di Chern.

Lemma 3.5. *Sia M una varietà, E ed F due fibrati su di essa. Allora:*

- $c_1(E) = c_1(\wedge^k E)$ *dove k è il rango di E;*
- $c_1(E \otimes F) = \mathsf{rk}(F)c_1(E) + \mathsf{rk}(E)c_1(F)$*;*
- $c_1(E^*) = -c_1(E)$.

Concludiamo questa sezione con una uguaglianza che mette in relazione la curvatura su un fibrato e sul suo duale. Dato un fibrato E ed una connessione ∇, ricordiamo che su di esso è possibile definire una connessione su E^* in modo naturale; basta trasportare l'azione della connessione ∇ del fibrato tangente sul fibrato cotangente:

$$(\nabla_X^*\sigma^*)(\sigma) \equiv \partial_X(\sigma^*(\sigma)) - \sigma^*(\nabla_X\sigma)$$

Definiamo inoltre l'aggiunto A^* di un endomorfismo A di E:

$$A^*(\sigma^*)(\sigma) \equiv \sigma^*(A(\sigma))$$

Vogliamo quindi dimostrare che

$$R^{\nabla^*} = -(R^{\nabla})^*$$

Consideriamo un riferimento $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$, e indichiamo con $(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_k^*)$ la base duale tale che $\sigma_i^* \sigma_j = \delta_{ij}$. Inoltre ricordiamo che

$$R^\nabla \sigma_i = \Omega_{ij} \otimes \sigma_j = (d\omega_{ik} - \omega_{ij} \wedge \omega_{jk}) \otimes \sigma_k$$

e quindi si ha:

$$(R^\nabla)^* \sigma_l = \Omega_{jl} \otimes \sigma_j^* = (d\omega_{kl} - \omega_{jl} \wedge \omega_{kj}) \otimes \sigma_k^*$$

Per dimostrare l'affermazione vogliamo calcolare Ω_{ij}^*, con ovvia interpretazione dei simboli, dalla definizione. Ma la matrice delle 2-forme della connessione ∇^* è determinata direttamente dalla matrice delle 1-forme ω_{ij}^*, quindi abbiamo concluso se dimostriamo che $\omega_{ij}^* = \omega_{ji}$. Questo è vero proprio per come è definita ∇^*. Infatti risulta che:

$$\nabla^* \sigma_l^* = d\sigma_l^* - \omega_{jl} \otimes \sigma_j^*$$

A questo punto notiamo che otteniamo il risultato desiderato quando $\nabla^* \sigma_l^*$ agisce sulle combinazioni $\mathbb{R}$-lineari di $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ (poiché $d(\delta_{ij}) = 0$). Poiché R^{∇^*} è un operatore C^∞-lineare, l'uguaglianza vale su tutto E.

3.3 LA FORMA DI RICCI COME UNA FORMA DI CURVATURA

Premettiamo un lemma che non dimostreremo (si può verificare direttamente mettendosi in coordinate locali, oppure a partire dalla formula di Cartan, si cosulti [Mor07])

Lemma 3.6. *Sia M una varietà. Se ω è una 1-forma del fibrato tangente, e X, Y sono elementi di $\Gamma(TM)$ risulta:*

$$d\omega(X, Y) = \partial_X(\omega(Y)) - \partial_Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])$$

Come prima cosa vogliamo mostrare che in una varietà kähleriana gli operatori R e R^∇ coincidono, dove ∇ indica la connessione di Levi-Civita. Come al solito, il fibrato TM sarà interpretato come un fibrato complesso dove la moltiplicazione per i corrisponde all'azione dell'operatore J.

Lemma 3.7. *Nelle ipotesi fatte, gli operatori R e R^∇ sono legati da:*

$$R^\nabla_{X,Y} \xi = R(X, Y) \xi$$

dove X, Y sono campi vettoriali su M e ξ una sezione di TM.

Dimostrazione. Fissiamo una base locale (e_i) dei campi vettoriali su M con base duale (e_i^*). Denotando $X_I = e_i^*(X)$, $Y_I = e_i^*(Y)$, otteniamo:

$$R^\nabla \xi = \nabla^2 \xi = \sum_{i=1}^{2m} \nabla(e_i^* \otimes \nabla_{e_i}\xi) = \sum_{i=1}^{2m} de_i^* \otimes \nabla_{e_i}\xi - \sum_{i,j=1}^{2m} e_i^* \wedge e_j^* \otimes \nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\xi$$

Quindi, possiamo scrivere

$$R^\nabla_{X,Y}\xi = \sum_{i=1}^{2m} de_i^*(X,Y)\nabla_{e_i}\xi - \sum_{i,j=1}^{2m}(e_i^* \wedge e_j^*)(X,Y)\nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\xi$$

e, per il lemma precedente e per la definizione dell'azione di $e_i^* \wedge e_j^*$

$$R^\nabla_{X,Y}\xi = (\partial_X(Y_i) - \partial_Y(X_i) - e_i^*([X,Y]))\nabla_{e_i}\xi - (X_iY_j - X_jY_i)\nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\xi$$

poi, sfruttando la linearità di ∇

$$R^\nabla_{X,Y}\xi = -\nabla_{[X,Y]}\xi + (\partial_X(Y_i) - \partial_Y(X_i))\nabla_{e_i}\xi - X_i\nabla_Y\nabla_{e_i}\xi + Y_i\nabla_X\nabla_{e_i}\xi$$

e, infine, per la definizione di connessione

$$R^\nabla_{X,Y}\xi = -\nabla_{[X,Y]}\xi - \nabla_Y\nabla_X\xi + \nabla_X\nabla_Y\xi = R(X,Y)\xi \qquad \square$$

Quindi, mettendo insieme i risultati delle sezioni precedenti abbiamo che

$$\begin{aligned}[\rho(X,Y)] = [\mathrm{Ric}(JX,Y)] = [\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}^{\mathbb{R}}(R(JX,JY)\circ J] = \\ = [\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}^{\mathbb{R}}(R(X,Y)\circ J] = [i\,\mathrm{Tr}^{\mathbb{C}}(R^\nabla) = 2\pi c_1(TM)\end{aligned}$$

da cui $c_1(TM) = [\frac{1}{2\pi}\rho(X,Y)]$. Possiamo quindi dimostrare la seguente caratterizzazione della forma di Ricci su varietà kähleriane:

Lemma 3.8. *La curvatura della connessione di Chern del fibrato canonico K è uguale a $i\rho$ che agisce come moltiplicazione su K.*

Dimostrazione. Denotiamo con r e r^* le curvature delle connessioni di Chern di $K = \Lambda^{m,0}M$ e $K^* = \Lambda^{0,m}M$. Si può verificare che $r = -r^*$, e sappiamo che che $\Lambda^m(TM)$ è isomorfo a K^*. Segue dunque dai lemmi 3.5 e 3.7 che

$$r^*(X,Y) = \mathrm{Tr}(R^\nabla(X,Y)) = \mathrm{Tr}(R(X,Y))$$

e, per il lemma 3.2, otteniamo (facendo attenzione a distinguere le tracce reali e complesse)

$$\begin{aligned} i\rho(X,Y) = i\,\mathrm{Ric}(JX,Y) = \frac{i}{2}\,\mathrm{Tr}^{\mathbb{R}}(R(X,Y)\circ J) = \\ = \frac{i}{2}(2i\,\mathrm{Tr}^{\mathbb{C}}(R(X,Y)) = -\,\mathrm{Tr}^{\mathbb{C}}(R(X,Y)) = \\ = -r^*(X,Y) = r(X,Y)\end{aligned}$$

facendo uso del fatto che $\mathrm{Tr}^{\mathbb{R}}(A^{\mathbb{R}} \circ J) = 2i\,\mathrm{Tr}^{\mathbb{C}}(A)$ per ogni endomorfismo antihermitiano A.

3.4 VARIETÀ KÄHLERIANE RICCI-PIATTE

Sia (M^{2m}, J, h) una varietà kähleriana con fibrato canonico K (dotato della struttura hermitiana indotta dalla metrica kähleriana su TM) e forma di Ricci ρ. Se M è semplicemente connessa allora vale il seguente risultato.

Teorema 3.9. *M è Ricci-piatta se e solo se la connessione di Chern del fibrato canonico K è piatta.*

La dimostrazione segue immediatamente dal lemma 3.8.

È da notare che, per questo teorema e per il teorema 3.4, l'annullarsi della prima classe di Chern di una varietà kähleriana è condizione necessaria per l'esistenza di una metrica kähleriana Ricci-piatta sulla varietà compatibile con la struttura complessa; vedremo nelle sezioni successive che se la varietà è compatta allora questa è anche sufficiente.

Vogliamo invece ora, senza entrare troppo nei dettagli, dare qualche caratterizzazione geometrica della proprietà di una varietà di essere kähleriana e Ricci-piatta. Ricordiamo innanzitutto velocemente la definizione di fibrato principale:

Definizione 3.10. Un fibrato G-principale su M è una terna (P, π, M), con $\pi : P \to M$ sommersione, dotata di un'azione di gruppo di G su P che è libera e transitiva su ogni fibra di π^{-1}.

Facciamo notare (si veda [Mor07]) che se abbiamo una rappresentazione del gruppo in $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ possiamo associare al fibrato principale un fibrato vettoriale (il viceversa è sempre possibile). Sostanzialmente il fibrato principale fornisce informazioni sul sottogruppo di $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ definito dagli elementi del cociclo $g_{\alpha\beta}$ del fibrato vettoriale.

Ogni volta che dotiamo una varietà di qualche struttura supplementare, possiamo vedere questa struttura come una *restrizione* sul fibrato principale tangente, ottenendo così quella che viene detta una G-struttura. Ad esempio, una orientazione su M è una $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$-struttura, una struttura quasi-complessa è una $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$-struttura, con $n = 2m$, mentre una metrica riemanniana è una O_n-struttura.

Nel linguaggio dei fibrati principali e delle strutture vale la seguente caratterizzazione delle metriche kähleriane.

Proposizione 3.11. *Sia M una varietà dotata di una struttura quasi-complessa J e una metrica hermitiana h. La U_m-struttura (dove $\mathrm{U}_m = \mathrm{O}_{2m} \cap \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$) generata da queste è geometrica (ossia è dotata di una connessione a torsione nulla) se e solo se h è una metrica kähleriana.*

Dimostrazione. La struttura definita è geometrica se e solo se J è parallelo rispetto alla connessione di Levi-Civita (che è l'unica connessione a torsione nulla su O_{2m}). Dai teoremi visti in precedenza, questo è equivalente a richiedere che h sia kähleriana. □

Riportiamo infine anche una caratterizzazione geometrica della proprietà di essere Ricci-piatta per una varietà. Prima di essa è utile richiamare:

Definizione 3.12. Sia (P, π, M) un fibrato G-principale, e sia $p \in P$. Il gruppo di olonomia $\mathsf{Hol}_p(\omega)$ è il sottogruppo di G definito dagli elementi che trasportano p parallelamente, rispetto alla connessione ω, lungo una curva liscia. Se P ed M sono connessi allora $\mathsf{Hol}_p(\omega)$ è indipendente da p a meno di coniugio in G.

Detto ciò, vale la seguente caratterizzazione, che non dimostreremo (cfr. [Mor07]).

Proposizione 3.13. *Sia data una varietà kähleriana (M, J, h). Allora sono equivalenti:*

- *M è Ricci-piatta;*
- *M ha una SU_m-struttura geometrica;*
- *il gruppo di olonomia riemanniano di M (il gruppo di olonomia sul fibrato tangente relativo alla connessione di Levi-Civita) è un sottogruppo di SU_m.*

Abbiamo così visto anche qualche conseguenza di kählerianità e Ricci-piattezza riguardo le G-strutture sulla varietà e il gruppo di olonomia. In particolare, lo studio del gruppo di olonomia è importante quando si vogliono considerare, ad esempio, le *varietà di Calabi-Yau*.

3.5 TEOREMI DI CALABI–YAU E AUBIN–YAU

In questa sezione ci proponiamo di presentare il seguente risultato sulla forma di Ricci.

Teorema 3.14. *Sia M^m una varietà kähleriana compatta con forma fondamentale Ω e forma di Ricci ρ. Allora, per ogni forma $(1,1)$ reale chiusa ρ_1 nella classe di coomologia di $2\pi c_1(M)$, esiste una unica metrica kähleriana con forma fondamentale Ω_1 nella stessa classe di coomologia di Ω, la cui forma di Ricci sia esattamente ρ_1.*

In letteratura, talvolta ci si riferisce a questo teorema col nome di *congettura di Calabi*; essa fu posta nel 1954 da Eugenio Calabi. La prima dimostrazione completa è dovuta a Yau ([Yau77; Yau78]), nel 1976.[1] Precedentemente, lo

1 Questo risultato è valso a Yau la medaglia Fields nel 1982.

stesso Calabi aveva provato l'unicità della soluzione.

Questo risultato è di estrema importanza in geometria riemanniana, perché permette di costruire famiglie di metriche kähleriane *Ricci-piatte* su varietà complesse compatte. Inoltre, si può usare il teorema per trovare metriche con curvatura di Ricci definita positiva (o negativa), fatto che ha conseguenze importanti sul gruppo fondamentale della varietà e su quello dei suoi biolomorfismi. Infine, aggiungiamo che ci sono risultati sull'esistenza di *metriche di Kähler-Einstein*, per cui rimandiamo il lettore interessato a [Bes87].

La strategia standard per dimostrare la congettura è quella di ridursi alla considerazione di una equazione ellittica non lineare alle derivate parziali in una funzione reale u. Tale equazione è detta di *Monge-Ampère*.

Premettiamo un lemma basilare che utilizzeremo spesso nel seguito.

Lemma 3.15 ($i\partial\bar{\partial}$-lemma globale)**.** *Sia ϕ una $(1,1)$-forma reale esatta su una varietà di Kähler compatta. Allora esiste una funzione reale u tale che $\phi = i\partial\bar{\partial}u$.*

Dimostrazione. Il lemma è una interessante conseguenza della decomposizione di Hodge[2] per varietà di Kähler compatte e, come vedremo, le applicazioni sono utilissime.

Prendiamo una (p,q)- forma α che sia d-esatta. Questo implica, per la decomposizione, che α è ortogonale allo spazio delle (p,q)-forme armoniche, qualunque sia l'armonicità considerata (rispetto a d, ∂, $\bar{\partial}$). Inoltre α è ∂-chiusa, quindi si ha $\alpha = \partial\beta$. Di nuovo per la decomposizione di Hodge,

$$\beta = \bar{\partial}b + \bar{\partial}^* b' + b''$$

con b'' $\bar{\partial}$-armonica. Risulta quindi:

$$\alpha = \partial\bar{\partial}b - \bar{\partial}^*\partial b'$$

dove si è utilizzato $\partial\bar{\partial}^* = -\bar{\partial}^*\partial$. Essendo $\bar{\partial}\alpha = 0$, risulta $\bar{\partial}\bar{\partial}^*\partial b' = 0$, e quindi si ha

$$0 = h(\bar{\partial}\bar{\partial}^*\partial b', \partial b') = \|\bar{\partial}^*\partial b'\|^2 = 0$$

di nuovo per la regola di commutazione, ciò implica $\partial\bar{\partial}^* b' = 0$, e quindi in finale

$$\alpha = \partial\bar{\partial}b$$

Si ottiene quindi la tesi, ovvero che α è $\partial\bar{\partial}$-esatta. La verifica delle condizioni di realtà delle forme e funzioni trovate viene lasciata al lettore. □

2 Per questo si consulti [Mor07].

Dimostrazione (della congettura di Calabi). Sia Ω la forma fondamentale associata alla varietà (M, J, h). Denotiamo con $\mathcal{U}$ l'insieme delle funzioni lisce reali con le seguenti proprietà:

$$U = \left\{ u \in \mathcal{C}^{\infty}(M) | \Omega_1 = \Omega + i\partial\bar{\partial}u > 0, \int_M u\Omega^m = 0 \right\}$$

dove una $(1,1)$-forma reale ϕ è detta positiva se il tensore simmetrico $\phi(\cdot, J\cdot)$ è definito positivo; la seconda condizione, come sarà chiaro fra poco, ci garantisce che u sia determinata univocamente. Infatti, possiamo definire una forma di volume a partire dalla forma fondamentale, che corrisponde a quella data dalla metrica, tramite la formula

$$dv = \frac{1}{m!}\Omega^m$$

In effetti,

$$\Omega = i \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} h_{\alpha\bar{\beta}} dz_{\alpha} \wedge d\bar{z}_{\beta}$$

da cui

$$\left(\frac{1}{i}\right)^m \Omega^m = \sum_{\alpha_1,\beta_1=1}^{m} h_{\alpha_1\bar{\beta}_1} dz_{\alpha_1} \wedge d\bar{z}_{\beta_1} \wedge \cdots \wedge \sum_{\alpha_m,\beta_m=1}^{m} h_{\alpha_m\bar{\beta}_m} dz_{\alpha_m} \wedge d\bar{z}_{\beta_m} =$$

$$\sum_{\sigma_1} \mathsf{sgn}(\sigma_1) \sum_{\sigma_2} \mathsf{sgn}(\sigma_2) h_{\sigma_1(\alpha_1)\sigma_2(\beta_1)} \cdots h_{\sigma_1(\alpha_m)\sigma_2(\beta_m)} dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge dz_m \wedge d\bar{z}_m =$$

$$\sum_{\sigma_1} \det h_{\alpha,\bar{\beta}} dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge dz_m \wedge d\bar{z}_m =$$

$$\left(\frac{1}{i}\right)^m m! \sqrt{|\det h|}\, dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_m \wedge dy_m$$

Naturalmente, è definita una funzione reale f attraverso la formula

$$e^f dv = dv_1$$

dove dv_1 è la forma di volume relativa alla nuova forma Ω_1. Essendo Ω e Ω_1 nella stessa classe di coomologia, questo vale anche per le forme di volume, e quindi otteniamo la seguente uguaglianza di invarianza del volume:

$$\int_M e^f dv = \int_M dv_1$$

Rendiamo esplicito il collegamento con la forma di Ricci: data localmente una sezione olomorfa $\omega = g dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_m$ di $\Lambda^{m,0}T^*M$, si ha

$$i\rho = \bar{\partial}\partial \log h(\omega, \bar{\omega})$$

dove

$$h(\omega, \overline{\omega}) = h(g dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_m, \overline{g} d\overline{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_m) =$$
$$g\overline{g}\,\mathrm{det}(h(dz_i, d\overline{z}_j)) = g\overline{g}(\mathrm{det}\, h_{\alpha,\overline{\beta}})^{-1}$$

(si è fatto uso dell'uguaglianza $\partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial = 0$).

Ovviamente tutte le uguaglianze valgono anche con il pedice 1 relativo alla nuova forma di Ricci Ω_1. Un'ultima identità di cui abbiamo bisogno per ricavare l'equazione di Monge-Ampère, è relativa all'azione dell'operatore $*$ di Hodge. Si può mostrare che esso agisce come una moltiplicazione per una certa costante ε.

Infatti,

$$\varepsilon\omega \wedge \overline{\omega} = \omega \wedge *\overline{\omega} = h(\omega, \overline{\omega}) dv$$

e similmente,

$$\varepsilon\omega \wedge \overline{\omega} = \omega \wedge *\overline{\omega} = h_1(\omega, \overline{\omega}) dv_1 = e^f h_1(\omega, \overline{\omega}) dv$$

Dunque otteniamo

$$i\rho_1 - i\rho = \partial\overline{\partial} f$$

Questa formula fornisce la relazione tra le forme di ricci e la forme fondamentali. Infatti, abbiamo mostrato che se $\Omega_1 = \Omega + i\partial\overline{\partial}u$, allora $\rho_1 = \rho - i\partial\overline{\partial}f$, dove

$$f = \log \frac{(\Omega + i\partial\overline{\partial}u)^m}{\Omega^m}$$

Ora, data una forma $(1,1)$ reale ρ_1 nella classe di coomologia $2\pi c_1(M)$, il lemma precedente implica che esiste una funzione f tale che

$$\rho_1 = \rho - i\partial\overline{\partial} f$$

Inoltre, f è unica imponendo l'invarianza del volume della varietà. Denotiamo con $\mathcal{F}$ lo spazio delle funzioni reali lisce su M che soddisfano questa condizione. Quindi abbiamo ricondotto il problema allo studio dell'equazione di Monge-Ampère; nello specifico, vogliamo dimostrare che l'applicazione

$$\begin{aligned} \mathrm{Cal}\colon \mathcal{U} &\to \mathcal{F} \\ u &\mapsto \log \frac{(\Omega + i\partial\overline{\partial}u)^m}{\Omega^m} \end{aligned}$$

è una biiezione ben definita.

La suriettività, di cui non ci occupiamo, è la parte ostica della dimostrazione. Essa è stata dimostrata da Yau con teniche di analisi non banali e stime a priori (rimandiamo il lettore a [Joyoo]).

La buona definizione segue direttamente dall'espressione analitica dell'applicazione, tenendo a mente che Ω è una forma mai nulla. È anche possibile provare che Cal è un diffeomorfismo locale, fatto che deriva dalle proprietà dell'operatore di Laplace.

Nel seguito dimostreremo l'iniettività. È sufficiente che $\mathsf{Cal}(u) = 0, u \in U$ implichi $u = 0$. Infatti, $\mathsf{Cal}(u_1) - \mathsf{Cal}(u_2) = 0$ implica

$$\log \frac{(\Omega + i\partial\overline{\partial}u_1)^m}{(\Omega + i\partial\overline{\partial}u_2)^m} = 0$$

da cui deduciamo che, a meno di cambiare Ω con $\Omega' = \Omega + i\partial\overline{\partial}u_2$, possiamo scrivere

$$\log \frac{(\Omega' + i\partial\overline{\partial}(u_1 - u2))^m}{\Omega'^m} = 0$$

da cui segue l'uguaglianza di u_1 con u_2. Dunque non perdiamo di generalità se concentriamo i nostri sforzi sul caso $\mathsf{Cal}(u) = 0$.

Se $\mathsf{Cal}(u) = 0$, abbiamo

$$\Omega_1^m = \Omega^m$$

e poiché le due forme commutano

$$0 = \Omega_1^m - \Omega^m = i\partial\overline{\partial}u \wedge \sum_{k=0}^{m-1} \Omega_1^k \wedge \Omega^{m-k-1}$$

(in questa uguaglianza abbiamo utilizzato la semplice identità polinomiale $(a+b)^m - a^m = b\sum_{k=0}^{m-1}(a+b)^k a^{m-k-1}$).

Sapendo che $2i\partial\overline{\partial} = (\partial + \overline{\partial})(-i(\partial - \overline{\partial})) = dd^c$, e che Ω e Ω_1 sono forme chiuse, otteniamo

$$0 = 2ui\partial\overline{\partial}u \wedge \sum_{k=0}^{m-1} \Omega_1^k \wedge \Omega^{m-k-1} = udd^c u \wedge \sum_{k=0}^{m-1} \Omega_1^k \wedge \Omega^{m-k-1} =$$
$$d(ud^c u \wedge \sum_{k=0}^{m-1} \Omega_1^k \wedge \Omega^{m-k-1}) - du \wedge d^c u \wedge \sum_{k=0}^{m-1} \Omega_1^k \wedge \Omega^{m-k-1}$$

da cui, integrando su M e usando la formula di Stokes, vediamo che

$$0 = \int_M du \wedge Jdu \wedge \sum_{k=0}^{m-1} \Omega_1^k \wedge \Omega^{m-k-1} \tag{3.1}$$

dove $d^c u = -Jdu$ per ogni funzione u (semplice verifica).

Consideriamo una base locale ortonormale $\{e_1, \dots, e_m, Je_1, \dots, Je_m\}$ rispetto ad h. In queste coordinate,

$$\Omega = \sum_{j=1}^m e_j \wedge Je_j \qquad \Omega_1 = \sum_{j=1}^m a_j e_j \wedge Je_j$$

dove le funzioni a_j sono strettamente positive. Infatti, per definizione $\Omega_1(\cdot, J\cdot)$ è definita positiva e quindi $0 < \Omega_1(e_k, Je_k) = \sum_{j=1}^m a_j \delta_{jk} = a_k$.

Si può mostrare che per ogni k,

$$\Omega_1^k \wedge \Omega^{m-k-1} = *(\sum_{j=1}^{m} b_j^k e_j \wedge Je_j)$$

con b_j^k strettamente positive. Per verificare questa uguaglianza (e trovare anche l'espressione di b_j^k) è sufficiente scrivere la definizione di $*$ e svolgere i calcoli che si presentano. Saltiamo questo passaggio algebrico.

Questo mostra che l'integrando in (3.1) è strettamente positivo a meno di avere $du = 0$. Di nuovo, svolgere i calcoli sarebbe tedioso, pertanto ci limitiamo a fornire una motivazione euristica che giustifichi la formula. In luogo di du usiamo e_j, e quindi possiamo scrivere per ogni termine della sommatoria,

$$\int_M e_k \wedge Je_k \wedge \Omega_1^k \wedge \Omega^{m-k-1} = \int_M e_k \wedge Je_k \wedge *(\sum_{j=1}^{m} b_j^k e_j \wedge Je_j) =$$

$$\int_M h(e_k \wedge Je_k, \sum_{j=1}^{m} b_j^k e_j \wedge Je_j) dv = \int_M h(e_k \wedge Je_k, b_j^k e_k \wedge Je_k) dv = \int_M b_j^k dv > 0$$

Quindi, poiché $du = 0$, u è costante e in particolare $u = 0$ per la solita invarianza volumetrica. Concludiamo che Cal è iniettiva. □

Come si accennava nell'introduzione, otteniamo alcune conseguenze geometriche rilevanti. La prima riguarda le varietà *Ricci-flat*, cioè quelle la cui curvatura di Ricci svanisce.

Corollario 3.16. *Se la prima classe di Chern di una varietà kähleriana compatta M è nulla, allora M ammette una metrica di Kähler Ricci-piatta.*

La seconda conseguenza si ottiene in combinazione con un altro teorema, che enunciamo senza dimostrare.

Teorema 3.17. *Una varietà kähleriana compatta con tensore di Ricci definito positivo è semplicemente connessa.*

Allora grazie alla congettura di Calabi troviamo il seguente corollario.

Corollario 3.18. *Se la prima classe di Chern di una varietà kähleriana compatta M è positiva (i.e., ammette un rappresentante positivo), allora M è semplicemente connessa.*

Come abbiamo avuto modo di vedere, il teorema di Calabi-Yau è un risultato molto potente per quanto riguarda la scelta di una metrica kähleriana *ottimale* su una varietà compatta. In particolare abbiamo potuto dare una condizione sufficiente perché una varietà sia Ricci-piatta. Inoltre abbiamo visto, anche se non siamo scesi nei dettagli, quali siano le conseguenze nel caso che la prima classe di Chern della varietà ammetta un rappresentante definito positivo.

Ora, invece, vogliamo studiare il caso di esistenza di una metrica di Kähler su una varietà compatta che soddisfi la condizione di Einstein:

$$\mathsf{Ric} = \lambda h \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Innanzitutto notiamo che se la metrica viene scalata per un fattore costante positivo, il tensore di Ricci non cambia (questo si può vedere dall'espressione locale del tensore di Ricci, che è stata ricavata nei precedenti capitoli). Possiamo quindi supporre che $\lambda = \varepsilon = \pm 1$. Traducendo l'equazione per le relative forme si ha:

$$\rho = \varepsilon \Omega \qquad \varepsilon = \pm 1$$

Inoltre, sapendo che $\frac{\rho}{2\pi}$ è nella prima classe di Chern, perché sia soddisfatta la condizione di Einstein è necessario che $c_1(M)$ sia definita rispettivamente positiva o negativa, ovvero che ammetta un rappresentante definito positivo o negativo (ricordiamo che una forma ϕ è definita positiva se è definita positiva $\phi(\cdot, J\cdot)$). Nel caso negativo questa condizione basta ad assicurare l'esistenza di una metrica che sia di Einstein, e questo è il contenuto del teorema di Aubin-Yau.

Teorema 3.19. *Sia M^m una varietà kähleriana compatta tale che la sua prima classe di Chern sia definita negativa. Allora esiste un'unica metrica di Kähler-Einstein con costante $\varepsilon = -1$.*

La strategia per risolvere questo problema è analoga a quella utilizzata per il teorema di Calabi-Yau. Anche in questo caso ci ridurremo al problema di dimostrare la biiettività di una certa applicazione, e ancora la parte difficile della dimostrazione, che omettiamo, è quella relativa alla suriettività. Innanzitutto cerchiamo di riformulare il problema. Nel farlo, non entra ancora in gioco la differenza fra il caso positivo e negativo, quindi utilizzeremo $\varepsilon = \pm 1$.

In analogia con quanto fatto precedentemente, vogliamo determinare la relazione che deve intercorrere tra due funzioni u e f (che definiremo fra poco) che identificano le due forme fondamentali e le forme di Ricci relative a diverse metriche.

Dimostrazione. Innanzitutto sappiamo che $\varepsilon 2\pi c_1(M)$ è definita positiva, quindi esiste una $(1,1)$ forma reale chiusa Ω nella sua stessa classe tale che $\Omega(\cdot, J\cdot)$

sia definita positiva. Poniamo $h = \Omega(\cdot, J\cdot)$. h è una metrica kähleriana. Denotiamo con ρ la sua forma di Ricci. Poiché $[\Omega] = [\varepsilon\rho]$, per il lemma "$i\partial\bar{\partial}$" globale, esiste una funzione f tale che

$$\rho = \varepsilon\Omega + i\partial\bar{\partial}f$$

Supponiamo ora che esista una metrica h_1 tale che la sua forma fondamentale e la forma di Ricci sono legate da

$$\rho_1 = \varepsilon\Omega_1$$

Naturalmente, risulta $[\Omega] = [\Omega_1]$. Quindi esiste una funzione u tale che

$$\Omega_1 = \Omega + i\partial\bar{\partial}$$

Utilizzando le formule ricavate in precedenza nell'analisi della congettura di Calabi, sappiamo già che deve valere

$$\rho_1 = \rho - i\partial\bar{\partial}\log\frac{(\Omega + i\partial\overline{\bar{\partial}u})^m}{\Omega^m}$$

Utilizzando la funzione f e la condizione di Einstein otteniamo

$$\Omega + i\partial\bar{\partial}u = \varepsilon\Omega_1 = \varepsilon\Omega + i\partial\bar{\partial}f - i\partial\bar{\partial}\log\frac{(\Omega + i\partial\bar{\partial}u)^m}{\Omega^m}$$

Ciò equivale a richiedere, eliminando il $\partial\bar{\partial}$, che valga

$$\log\frac{(\Omega + i\partial\bar{\partial}u)^m}{\Omega^m} + \varepsilon u - f = \text{ costante}$$

Viceversa, ragionando all'indietro, si può vedere che se abbiamo u funzione $\mathcal{C}^\infty$ tale che $\Omega_1 = \Omega + i\partial\bar{\partial}u > 0$, allora Ω_1 definisce una metrica di Kähler-Einstein.

Riassumendo, abbiamo ricondotto il teorema di Aubin-Yau alla dimostrazione che l'applicazione Cal^ε definita da

$$\mathsf{Cal}^\varepsilon(u) = \mathsf{Cal}(u) + \varepsilon u$$

è un diffeomorfismo, ovvero è biunivoca.

Come in precedenza, ci occuperemo soltanto dell'iniettività (il lettore interessato cosulti [Joyoo]). Si supponga $\mathsf{Cal}^\varepsilon(u_1) = \mathsf{Cal}^\varepsilon(u_2)$ e $\varepsilon = -1$; con le notazioni $\Omega_1 = \Omega + i\partial\bar{\partial}u_1$ e $\Omega_2 = \Omega + i\partial\bar{\partial}u_2$, otteniamo

$$\log\frac{\Omega_1^m}{\Omega^m} - u_1 = \log\frac{\Omega_2^m}{\Omega^m} - u_2$$

da cui, ponendo $u = u_2 - u_1$:

$$\log \frac{(\Omega_1 + i\partial\bar{\partial}u)^m}{\Omega_1^m} = u \tag{3.2}$$

In un punto di massimo per u, la forma $i\partial\bar{\partial}u$ è semidefinita negativa, poiché, per ogni vettore X nello spazio tangente in quel punto, possiamo scrivere

$$i\partial\bar{\partial}u(X, JX) = \frac{1}{2}(dd^c u)(X, JX) = \frac{1}{2}(H^u(X, X) + H^u(JX, JX)) \leq 0$$

dove la seconda uguaglianza segue semplicemente esprimendo l'operatore d^c nelle coordinate $\{x_1, y_1, \ldots, x_m, y_m\}$, e H^u indica la matrice hessiana di u.

Naturalmente, H^u è semidefinito negativo quando valutato sul punto di massimo di u, inoltre grazie a (3.2) vediamo che $u \leq 0$ in ogni punto di massimo, dunque $u \leq 0$ su M. Similmente, si mostra $u \geq 0$ su ogni punto di minimo, da cui deduciamo finalmente $u = 0$ su M, che è quello che volevamo dimostrare. □

BIBLIOGRAFIA

[Bes87] A. L. Besse. *Einstein Manifolds*. Springer-Verlag, 1987 (cit. a p. 28).

[GH78] P. Griffith e J. Harris. *Principles of Algebraic Geometry*. Wiley, 1978 (cit. a p. 7).

[Hic65] N. J. Hicks. *Notes on differential geometry*. Van Nostrand Reinhold company, 1965 (cit. a p. 5).

[Hör90] L. Hörmander. *An introduction to complex analysis in several variables*. North-Holland Publishing Co., 1990 (cit. a p. 7).

[Joy00] D. Joyce. *Compact Manifolds with Special Holonomy*. Oxford University Press, 2000 (cit. alle pp. 30, 34).

[KN63] S. Kobayashi e K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*. Interscience Publishers, 1963 (cit. a p. 5).

[Mor07] A. Moroianu. *Lectures on Kähler Geometry*. Cambridge University Press, 2007 (cit. alle pp. 11, 20, 23, 24, 26–28).

[Yau77] S.-T. Yau. «On Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry». In: *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A.* 74 (1977) (cit. a p. 27).

[Yau78] S.-T. Yau. «On the Ricci curvature of compact Kähler manifolds and the complex Monge-Ampère equations. I.» In: *Communications on pure and applied mathematics* 31 (1978) (cit. a p. 27).