Seminari del corso di Geometria Superiore

A. A. 2013/2014

Classi di Chern e Forma di Ricci di una Varietà Kähleriana

Prof. Paolo Piccinni

Floriana Amicone
Alessandro Boni
Andrea Di Lorenzo
Simone Zucchi

Indice

Capitolo 1

Costruzione della prima classe di Chern

A cura di Andrea Di Lorenzo.

1.1 Introduzione

La classificazione degli oggetti matematici (gruppi, varietà, etc.) è da sempre un problema centrale di molte teorie. Tale questione è di fatto più uno spunto per approfondire le conoscenze possedute che una domanda da cui ci si aspetti una risposta definitiva. Raramente infatti si è riuscito ad ottenere dei cataloghi completi, anche se vi sono stati dei successi in questa direzione. Nell'ambito della geometria e della topologia lo sforzo classificatorio poggia sul concetto di invariante. Gli invarianti non sono altro che delle proprietà che gli oggetti geometrici conservano sotto l'applicazione di un isomorfismo. In questo modo, presi due enti geometrici, si può dedurre che questi non sono isomorfi se si riesce a verificare che qualche invariante non coincide. Attenzione: non stiamo assolutamente dicendo che è possibile invertire la precedente implicazione, ovvero è in generale falso affermare che se due invarianti coincidono allora i due oggetti sono isomorfi; si pensi ad esempio alle varietà differenziabili della sfera e del toro, entrambe compatte (la compattezza è un invariante topologico) ma non certo diffeomorfe. Tuttavia, può accadere in alcuni contesti che il test degli invarianti diventi una condizione necessaria ed anche sufficiente per controllare che due varietà siano sostanzialmente la stessa; in tal caso si parla di invarianti completi. Scopo di questo capitolo è la costruzione, nell'ambito della geometria differenziale, di un membro di un' importante famiglia di invarianti coomologici, detta prima classe di Chern. Questa ha una sua particolare rilevanza in quanto costituisce un invariante completo dei fibrati vettoriali complessi di rango 1 su varietà differenziabili. Definiamo assiomaticamente la prima classe di Chern di un fibrato vettoriale complesso.

Definizione 1.1. Ad ogni fibrato vettoriale complesso $\xi = (E, \pi, M)$ su una varietà differenziabile M associamo una classe di coomologia $c_1(\xi) \in H^2(M, \mathbb{Z})$, detta prima classe di Chern, che soddisfa le seguenti proprietà:

1. (Naturalità) Per ogni applicazione differenziabile $f : M \to N$ e fibrato vettoriale complesso ξ su N, si ha $f^*(c_1(\xi)) = c_1(f^*\xi)$, dove il termine di sinistra denota il pull-back in coomologia e $f^*\xi$ il fibrato pull-back definito tramite $f^*E_p = E_{f(p)}, \forall p \in M$.

2. (Formula di Whitney) Per ogni fibrato ξ, η su M si ha $c_1(\xi \bigoplus \eta) = c_1(\xi) + c_1(\eta)$, dove $\xi \bigoplus \eta$ è la somma di Whitney definita come il pull-back del fibrato $E \times F \to M \times M$ tramite l'inclusione diagonale di M in $M \times M$.

3. (Normalizzazione) La prima classe di Chern del fibrato tautologico su $\mathbb{C}P^1$ pari a -1 in $H^2(\mathbb{C}P^1, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, il che vuol dire che l'integrale su $\mathbb{C}P^1$ di ogni rappresentante della classe vale -1.

In questo capitolo forniremo una costruzione concreta della prima classe di Chern ed in quello successivo verrà dimostrato che soddisfa le proprietà richieste.

1.2 Richiami su fibrati, connessioni e curvatura

Iniziamo richiamando brevemente alcune nozioni cardine della geometria differenziale:

Definizione 1.2. Sia M una varietà differenziabile. Un fibrato vettoriale complesso di rango k è una terna $\xi = (E, \pi, M)$ tale che:

1. $\pi : E \to M$ è un'applicazione suriettiva.

2. Esiste un ricoprimento di aperti $\{U_\alpha\}$ di M e una famiglia di applicazioni $\{\phi_\alpha\}$ tali che
$$\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}^k$$
è un diffeomorfismo $\forall \alpha$.

3. $\phi_\alpha|_p : \pi^{-1}(p) \to \{p\} \times \mathbb{C}^k$ è un isomorfismo lineare $\forall p \in M$.

I fibrati vettoriali possono essere dotati di una struttura C^∞ che li rende varietà differenziabili; non daremo qui la dimostrazione rigorosa di questa affermazione. Grazie a questo fatto la definizione che segue ha senso:

Definizione 1.3. Una sezione $\sigma : M \to M$ del fibrato $\xi = (E, \pi, M)$ è un'applicazione C^∞ tale che $\pi \circ \sigma = id$. $\Gamma(\xi)$ è lo spazio vettoriale delle sezioni. Un insieme $S = \{\sigma_1, ..., \sigma_k\}$ è detto riferimento locale se costituisce una base dello spazio vettoriale delle sezioni ristrette ad una carta U della varietà M.

Non dimostreremo, ma è facile intuirlo, che il numero di elementi di un riferimento locale di un fibrato coincide con il rango. Dati due fibrati ξ e η è possibile definire i fibrati $\xi \bigotimes \eta$, $\xi \bigoplus \eta$, ξ^*, $\bigwedge^k(\xi)$. Un fibrato vettoriale notevole è il fibrato tangente τ_M, dato dall'unione disgiunta degli spazi tangenti in ogni punto della varietà M. In maniera analoga si può costruire il fibrato cotangente τ_M^*. Le sezioni di quest'ultimo fibrato vengono dette 1-forme e, più in generale, una k-forma è una sezione del fibrato vettoriale $\bigwedge^k(\tau_M^*)$.

Definizione 1.4. Una connessione ∇ sul fibrato vettoriale E è un'applicazione lineare di spazi vettoriale

$$\nabla : \Gamma(\xi) \to \Gamma(\tau_M^* \bigotimes \xi)$$

che soddisfa, data $f \in C^\infty(M)$, la regola di Leibniz $\nabla(f\sigma) = df \otimes \sigma + f\nabla\sigma$

Scelto un riferimento locale di sezioni $S = \{\sigma_1, ..., \sigma_k\}$ su un aperto U di M abbiamo che

$$\nabla\sigma_i = \sum_{j=1}^{k} \omega_{ij} \otimes \sigma_j$$

dove le $\omega_{ij} \in \Gamma(\tau_U^*)$. Possiamo così associare alla connesione ∇ una matrice $\omega = (\omega_{ij})$ in modo che, data una sezione σ, si ha:

$$\begin{aligned}\nabla\sigma = \nabla\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\sigma_i\right) &= \sum_{i=1}^{k} a_i\nabla\sigma_i = \\ = \sum_{i=1}^{k} a_i \sum_{j=1}^{k} \omega_{ij} \otimes \sigma_j &= \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\omega_{ij}\right) \otimes \sigma_j\end{aligned}$$

Su U la matrice ω descrive come agisce la connessione su ogni sezione che possiamo scrivere matricialmente come $\nabla S = \omega \otimes S$. Vogliamo ora capire come cambia ω al variare del riferimento locale di sezioni. Sia S' un altro riferimento, $S \mapsto S'$ la trasformazione descritta dalla matrice A a coefficienti in $C^\infty(M)$ e ω' la matrice di 1-forme associate a ∇ nel nuovo riferimento. Si ha:

$$\begin{gathered}\omega' \otimes S' = \nabla S' = \nabla(AS) = dA \otimes S + A\nabla S = dA \otimes S + A\omega \otimes S \Rightarrow \\ \Rightarrow \omega' A = dA + A\omega \Rightarrow \omega' = dAA^{-1} + A\omega A^{-1}\end{gathered}$$

Osservazione 1.1. La matrice di 1-forme ω non è un tensore perchè non è lineare nelle $f \in C^\infty$. In effetti dalla formula precedente si deduce che ω non trasforma come trasformano i tensori e perciò gli invarianti matriciali (traccia, determinante, etc.) non definiscono una 1-forma globale.

Proposizione 1.1. *Dato un fibrato vettoriale ξ sulla varietà M, scelta una connessione ∇, esiste ed è unica un'applicazione lineare*

$$\nabla' : \Gamma(\tau_M^* \bigotimes \xi) \to \Gamma(\bigwedge^2 (\tau_M^*) \bigotimes \xi)$$

che abbia la proprietà

$$\nabla'(\theta \otimes \sigma) = d\theta \otimes \sigma + \theta \wedge \nabla\sigma$$

per ogni 1-forma θ e sezione $\sigma \in \Gamma(\xi)$.

Questa proposizione ci assicura che la prossima definizione è sempre ben posta.

Definizione 1.5. Dato un fibrato vettoriale ξ sulla varietà M, scelta una connessione ∇, esiste ed è unica l'applicazione lineare

$$R^\nabla := \nabla' \circ \nabla : \Gamma(\xi) \to \Gamma(\bigwedge^2 (\tau_M^*) \bigotimes \xi)$$

che è detta curvatura della connessione ∇.

Proposizione 1.2. R^∇ *è lineare nelle* $f \in C^\infty(M)$ *e dunque è un tensore.*

Dimostrazione. E' sufficiente svolgere il calcolo:

$$\begin{aligned} R^\nabla(f\sigma) &= \nabla'(df \otimes \sigma + f\nabla\sigma) = \\ &= d^2 f \otimes \sigma - df \wedge \sigma + df \wedge \sigma + f\nabla'\nabla\sigma = \\ &= fR^\nabla(\sigma) \end{aligned}$$

■

In analogia a quanto visto per la connessione è possibile caratterizzare localmente il tensore di curvatura tramite una matrice $\Omega = (\Omega_{ij})$ di 2-forme definite su un aperto U della varietà M. Fissato un riferimento locale S è verificata l'identità $R^\nabla(S) = \Omega \otimes S$. Passando dal riferimento S a S', denotando nuovamente con A la matrice di funzioni differenziabili che rappresenta il cambio di base, applicando la proposizione precedente si deduce la formula

$$R^\nabla(S') = R^\nabla(AS) = AR^\nabla(S) = A\Omega \otimes S$$

Osservazione 1.2. Essendo la matrice di curvatura Ω un tensore, i polinomi invarianti (traccia, determinante, etc.) definiscono una 2-forma globale.

La curvatura dipende strettamente dalla connessione scelta è naturale aspettarsi che sussista una relazione simile tra le entrate di ω e quelle di Ω.

Teorema 1.3. *Fissato un riferimento locale* S *le matrici* ω *e* Ω *associate ad una connessione* ∇ *sono legate dalle seguenti equazioni di struttura:*

$$\Omega_{ij} = d\omega_{ij} - \sum_{l=1}^{k} \omega_{il} \wedge \omega_{lj} \tag{1.1}$$

Queta equazione può essere espressa matricialmente come $\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega$.

Dimostrazione. Nuovamente basta svolgere il calcolo:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k} \Omega_{ij} \otimes \sigma_j = R^\nabla(\sigma_i) = \nabla'\nabla(\sigma_i) = \nabla' \left(\sum_{j=1}^{k} \omega_{ij} \otimes \sigma_j \right) &= \\ = \left(\sum_{j=1}^{k} d\omega_{ij} \otimes \sigma_j \right) - \left(\sum_{j=1}^{k} \omega_{ij} \wedge \nabla\sigma_j \right) &= \\ = \left(\sum_{j=1}^{k} d\omega_{ij} \otimes \sigma_j \right) - \left(\sum_{j=1}^{k} \omega_{ij} \wedge \left(\sum_{l=1}^{k} \omega_{jl} \otimes \sigma_l \right) \right) &= \\ = \left(\sum_{j=1}^{k} d\omega_{ij} \otimes \sigma_j \right) - \sum_{j,l=1}^{k} (\omega_{ij} \wedge \omega_{jl}) \otimes \sigma_j &= \\ = \sum_{j=1}^{k} (d\omega_{ij} - \sum_{l=1}^{k} \omega_{il} \wedge \omega_{lj}) \otimes \sigma_j & \end{aligned}$$

■

1.3 Costruzione della prima classe di Chern

Siamo ora in grado di formulare il teorema centrale di questo capitolo:

Teorema 1.4. *$Tr(R^{\nabla})$ è una ben definita 2-forma a valori complessi tale che*

1. *$d(Tr(R^{\nabla})) = 0$ e dunque è ben definita la sua classe di coomologia $[Tr(R^{\nabla})] \in H^2(M, \mathbb{C})$.*
2. *$[Tr(R^{\nabla})]$ non dipende dalla connessione ∇ scelta.*
3. *$[Tr(R^{\nabla})]$ è una classe a valori puramente immaginari.*

Dimostrazione. La buona definizione di $Tr(R^{\nabla})$ è già stata osservata nella righe precedenti. Passiamo a dimostrare gli altri punti.

1. Data una matrice di 1-forme ω è verificata la seguente identità

$$\sum_{i,l=1}^{k} \omega_{il} \wedge \omega_{li} = \sum_{l,i=1}^{k} \omega_{li} \wedge \omega_{il} = -\sum_{i,l=1}^{k} \omega_{il} \wedge \omega_{li}$$

dove la prima uguaglianza si ottiene scambiando gli indici di sommazione mentre la seconda è conseguenza dell'antisimmetria del prodotto $\wedge$. Dunque $\sum_{i,l=1}^{k} \omega_{il} \wedge \omega_{li} = 0$, ed utilizzando la (1.1) deduciamo:

$$\begin{aligned} Tr(R^{\nabla}) &= \sum_{i=1}^{k} \Omega_{ii} = \sum_{i=1}^{k} (d\omega_{ii} - \sum_{l=1}^{k} \omega_{il} \wedge \omega_{li}) = \\ &= \sum_{i=1}^{k} d\omega_{ii} = d\left(\sum_{i=1}^{k} \omega_{ii}\right) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Perciò $Tr(R^{\nabla})$ è una 2-forma chiusa localmente esatta ed è ben definita la sua classe di coomologia.

2. Siano ∇ e ∇' connessioni sul fibrato E. Per quanto osservato precedentemente le matrici associate ω ed ω' non sono dei tensori. Facciamo vedere che la matrice associata alla connessione $\nabla - \nabla'$ invece lo è; per far ciò è sufficiente mostrare che $\nabla - \nabla'$ è lineare nelle $f \in C^{\infty}(M)$. Sfruttando la regola di Leibniz si ha:

$$\begin{aligned} (\nabla - \nabla')(f\sigma) &= \nabla(f\sigma) - \nabla'(f\sigma) = \\ &= df \otimes \sigma + f\nabla\sigma - df \otimes \sigma - f\nabla'\sigma = \\ &= f(\nabla - \nabla')\sigma \end{aligned}$$

In questo modo la traccia della matrice associata è una ben definita 1-forma:

$$Tr(\nabla - \nabla') = \sum_{i=1}^{k} \omega_{ii} - \omega'_{ii}$$

Utilizzando la (1.2) otteniamo:

$$\begin{aligned} Tr(R^{\nabla}) &= d\left(\sum_{i=1}^{k} \omega_{ii}\right) = d\left(\sum_{i=1}^{k} \omega'_{ii} - \sum_{i=1}^{k} (\omega_{ii} - \omega'_{ii})\right) = \\ &= d\left(\sum_{i=1}^{k} \omega'_{ii}\right) + d(Tr(\nabla - \nabla')) = \\ &= Tr(R^{\nabla'}) + d(Tr(\nabla - \nabla')) \end{aligned}$$

da cui si deduce che $[Tr(R^{\nabla})] = [Tr(R^{\nabla'})]$ in $H^2(M, \mathbb{C})$, in quanto la loro differnza è una 2-forma esatta.

3. Dobbiamo far vedere che $[Tr(R^{\nabla})]$ ha un rappresentante a valori puramente immaginari. Per far ciò ricordiamo che un fibrato vettoriale complesso ξ ammette sempre una struttura hermitiana h ed una connessione ∇ h-parallela. Fissiamo un riferimento locale ortonormale di sezioni $S = \{\sigma_1, ..., \sigma_k\}$. Vale allora la seguente identità:

$$\begin{aligned}
0 = d(\delta_{ij}) = dh(\sigma_i, \sigma_j) = \\
&= h(\nabla\sigma_i, \sigma_j) + h(\sigma_i, \nabla\sigma_j) = \\
&= \sum_{l=1}^{k} \omega_{ik} h(\sigma_k, \sigma_j) + \sum_{l=1}^{k} \overline{\omega_{jk}} h(\sigma_i, \sigma_k) = \\
&= \omega_{ij} + \overline{\omega_{ji}}
\end{aligned}$$

Utilizzando questa identità in (1.1) abbiamo:

$$\begin{aligned}
\overline{\Omega_{ij}} &= d\overline{\omega_{ij}} - \sum_{l=1}^{k} \overline{\omega_{il}} \wedge \overline{\omega_{lj}} = \\
&= -d\omega_{ji} - \sum_{l=1}^{k} \omega_{li} \wedge \omega_{jl} = \\
&= -d\omega_{ji} + \sum_{l=1}^{k} \omega_{jl} \wedge \omega_{li} = \\
&= -\Omega_{ji}
\end{aligned}$$

e dunque $\overline{\Omega_{ii}} = -\Omega_{ii}$, il che ci permette di concludere che $[Tr(R^{\nabla})]$ è una classe di coomologia a valori puramente immaginari.

■

Capitolo 2

Un rappresentante canonico della prima classe di Chern

A cura di Simone Zucchi.

In questo capitolo mostreremo che la classe di coomologia costruita nel capitolo precedente è effettivamente, a meno di un multiplo scalare, la prima classe di Chern di un fibrato complesso, ovvero soddisfa gli assiomi di naturalità, compatibilità con la somma di Whitney e normalizzazione. Vedremo in seguito come, a partire dal particolare rappresentante trovato, sia possibile ricavare la classe di Chern del prodotto tensoriale di fibrati a partire da quelle dei singoli fattori, e quella di un fibrato duale in funzione di quella del suo preduale.

2.1 Richiami sulla connessione di Chern

Nel capitolo precedente abbiamo definito i concetti di struttura hermitiana h e di connessione h-parallela. In questa sezione presentiamo un teorema di fondamentale importanza nella dimostrazione della proprietà di normalizzazione, e per la cui dimostrazione rimandiamo a [4] (cap.10). Premettiamo le seguenti definizioni:

Definizione 2.1. Una *struttura olomorfa* su un fibrato complesso $\xi = (E, \pi, M)$ è un operatore

$$\overline{\partial}\colon \Gamma(\Lambda^{p,q}M) \to \Gamma(\Lambda^{p,q+1}M)$$

tale che valga $\overline{\partial}^2 = 0$ e sia soddisfatta la regola di Leibniz, ovvero

$$\overline{\partial}\,(\sigma^p \wedge \sigma^q) = (\overline{\partial}\,\sigma^p) \wedge \sigma^q + (-1)^{p+q}\,\sigma^p \wedge (\overline{\partial}\,\sigma^q)$$

Un fibrato dotato di tale struttura prende il nome di *fibrato olomorfo*.

Il teorema che ci occorre è il seguente:

Teorema 2.1. *Sia* $(\xi, \overline{\partial})$ *un fibrato olomorfo dotato di struttura hermitiana h; allora esiste un'unica connessione* ∇*, detta* connessione di Chern*, tale che*

- ∇ *è h-parallela*
- $\nabla^{0,1} = \overline{\partial}$

2.2 Un calcolo preliminare

In questa sezione riportiamo per completezza i dettagli di un conto che ci sarà utile nel dimostrare la proprietà di normalizzazione. L'asserzione è la seguente:

Proposizione 2.2. *Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ un aperto del piano complesso e $f\colon U \to \mathbb{C}$ una funzione C^∞. Se consideriamo l'espressione in coordinate polari $z = rcos(\theta) + irsin(\theta)$, allora abbiamo che*

$$\overline{\partial}\partial f = \frac{i}{2}\left(r\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial f}{\partial r} \right) dr \wedge d\theta$$

Dimostrazione. Cominciamo con l'osservare che, nel contesto in cui ci troviamo,

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}\partial f &= \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial z} f \, d\overline{z} \wedge dz = \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f\,(dx - idy) \wedge (dx + idy) = \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f\,(-idy \wedge dx + idx \wedge dy) = \frac{i}{2}\Delta f\, dx \wedge dy
\end{aligned}$$

dove Δ indica l'operatore di Laplace in $\mathbb{R}^2$. Ovviamente si ha

$$\begin{aligned}
dx \wedge dy &= \left(\frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial \theta}d\theta\right) \wedge \left(\frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial \theta}d\theta\right) = \\
&= (\cos\theta\, dr - r\,\sin\theta\, d\theta) \wedge (\sin\theta\, dr + r\,\cos\theta\, d\theta) = r\, dr \wedge d\theta
\end{aligned}$$

e dunque quel che resta da fare è esprimere l'operatore di Laplace in coordinate polari. Osserviamo che vale la relazione:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\sqrt{x^2+y^2}\right]\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x}\left[arctg\left(\frac{y}{x}\right)\right]\frac{\partial}{\partial \theta} = \\
&= \frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial \theta} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}
\end{aligned}$$

da cui segue immediatamente che

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \sin\theta\,\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right] - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\right] + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right] = \\
&= \cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \sin\theta\,\cos\theta\left(-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) - \frac{\sin\theta}{r}\left(-\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \\
&\qquad + \frac{\sin\theta}{r^2}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial \theta} + \sin\theta\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) = \\
&= \cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2\,\sin\theta\,\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{2\,\sin\theta\,\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}
\end{aligned}$$

Un conto analogo mostra che

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2\,\sin\theta\,\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{2\,\sin\theta\,\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

perciò sommando risulta

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta^2}$$

e dunque la tesi. □

2.3 Costruzione del rappresentante canonico

Teorema 2.3. *Sia $\xi = (E, \pi, M)$ un fibrato vettoriale complesso, ∇ una connessione su tale fibrato e R^∇ la sua curvatura; allora*

$$c_1(\nabla) := \left[\frac{i}{2\pi} Tr(R^\nabla)\right] \in H^2(M, \mathbb{R})$$

è l'immagine della classe $c_1(\xi) \in H^2(M, \mathbb{Z})$.

Dimostrazione. Cominciamo dalla naturalità: sia $f\colon N \to M$ una funzione C^∞ e $\{\sigma_i\}$ una base locale di sezioni su ξ; allora il fibrato $f^*\xi$ possiede una naturale base locale di sezioni

$$\begin{aligned} f^*\sigma_i\colon N &\to f^{-1}(E) \\ x &\mapsto (x, \sigma_i(f(x))) \end{aligned}$$

che ci permette di definire su tale fibrato la connessione $f^*\nabla$ data localmente su tale base da

$$(f^*\nabla)(f^*\sigma_i) := f^*(\nabla\sigma_i)$$

Posta (R_{ij}^∇) la matrice di 2-forme di curvatura associata a R^∇, il conto

$$\sum_j R_{ij}^{f^*\nabla} f^*\sigma_j = R^{f^*\nabla}(f^*\sigma_i) = f^*(R^\nabla(\sigma_i)) = f^*(\sum_j R_{ij}^\nabla \sigma_j) = \sum_j f^* R_{ij}^\nabla\, f^*\sigma_j$$

mostra che $R_{ij}^{f^*\nabla} = f^*R_{ij}^\nabla$, da cui segue facilmente dalla definizione che $c_1(f^*\nabla) = f^*c_1(\nabla)$.

Per dimostrare la compatibilità con la somma di Whitney consideriamo invece due fibrati ξ e ξ' sulla stessa base, dotati di connessioni ∇ e ∇' rispettivamente, e definiamo sul fibrato $\xi \oplus \xi'$ la connessione

$$(\nabla \oplus \nabla')_X(\sigma \oplus \sigma') := \nabla_X\sigma \oplus \nabla'_X\sigma'$$

Una coppia di basi locali di sezioni $\{\sigma_i\}$ su ξ e $\{\sigma'_i\}$ su ξ' induce naturalmente una base locale di sezioni $\{\sigma_i \oplus 0, 0 \oplus \sigma'_i\}$ su $\xi \oplus \xi'$, rispetto alla quale la matrice delle 2-forme di connessione risulta essere una matrice a blocchi

$$R^{\nabla\oplus\nabla'} = \left[\begin{array}{c|c} R^\nabla & 0 \\ \hline 0 & R^{\nabla'} \end{array}\right]$$

Ne segue che $Tr(R^{\nabla\oplus\nabla'}) = Tr(R^\nabla) + Tr(R^{\nabla'})$ e dunque che $c_1(\nabla \oplus \nabla') = c_1(\nabla) + c_1(\nabla')$.

Vediamo infine la proprietà di normalizzazione: indichiamo con $\gamma^1 = (L, \pi, \mathbb{C}P^1)$ il primo fibrato tautologico complesso e scegliamo una sezione olomorfa locale σ, di cui indichiamo il quadrato della norma con u.

L possiede una naturale la struttura hermitiana h indotta dal prodotto hermitiano in $\mathbb{C}^2$, e per quanto visto nel capitolo precedente la classe di coomologia $[Tr(R^\nabla)]$ non dipende dalla connessione ∇ scelta; dunque possiamo assumere che si tratti della connessione di Chern associata a h.

Posta ω la 1-forma di connessione di ∇ associata a tale sezione, abbiamo che $\nabla\sigma = \omega \otimes \sigma$ e dunque

$$\forall X \in T\mathbb{C}P^1 \quad \partial_X(u) = \partial_X(h(\sigma,\sigma)) = h(\nabla_X\sigma,\sigma) + h(\sigma,\nabla_X\sigma) = (\omega(X) + \overline{\omega}(X))\, u$$

Ne segue che $\omega + \overline{\omega} = d\,\log(u)$. D'altronde ω è una $(1,0)$-forma (in quanto associata ad una sezione olomorfa, ed essendo $\nabla^{0,1} = \overline{\partial}\,$), e dunque $\omega = \partial\,\log(u)$.

Inoltre, poichè in generale (come mostrato nel capitolo precedente) $Tr(R^\nabla) = d\,(\sum_i \omega_{ii})$, ne segue nel nostro caso particolare (unidimensionale) che $R^\nabla = d\,\omega$.

Quello che queste due osservazioni ci dicono è dunque che

$$R^\nabla = d\,\omega = d\,\partial\,\log(u) = \overline{\partial}\,\partial\,\log(u)$$

e ciò che dobbiamo dimostrare diventa

$$\frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{C}P^1} \overline{\partial}\,\partial\,\log(u) = -1$$

Per calcolare questo integrale, mettiamoci nella carta affine $\{[z_0, z_1] \in \mathbb{C}P^1 \mid z_0 \neq 0\}$ con coordinata $z := z_1/z_0$; l'integrale su tale insieme sarà pari a quello cercato in quanto $[0,1]$ è l'unico punto che non vi appartiene. Risulta dunque, applicando la proposizione della sezione precedente alla funzione $f = \log(1 + |z|^2)$,

$$\begin{aligned}\frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{C}P^1} \overline{\partial}\,\partial\,\log(u) &= \frac{i}{2\pi}\int_{[0,+\infty)\times[0,2\pi]} \frac{i}{2}\left(r\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\partial f}{\partial r}\right) dr \wedge d\theta = \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} d\left(r\,\frac{\partial f}{\partial r}\right) = -\frac{1}{2}\lim_{r\to+\infty} r\,\frac{\partial f}{\partial r} = \\ &= -\lim_{r\to+\infty}\frac{r}{2}\frac{2r}{1+r^2} = -1\end{aligned}$$

□

Esempio 2.1. Mostriamo che la prima classe di Chern del fibrato banale di rango k, che indicheremo con $\eta = (M \times \mathbb{C}^k, \pi, M)$, è nulla (fatto che ci tornerà utile anche nella prossima sezione). È possibile verificarlo direttamente, ma intendiamo qui presentare tale risultato come conseguenza della naturalità della prima classe di Chern.

Sia $P = \{p\}$ uno spazio costituito da un unico punto e $\eta_P = (P \times \mathbb{C}^k, \pi_P, P)$ il fibrato banale di rango k su tale spazio. Posta $f\colon M \to P$ l'applicazione costante, risulta definito anche il pull-back del fibrato η_P tramite f, che indichiamo con $f^*\eta_P = (f^{-1}(P \times \mathbb{C}^k), \pi_*, P)$.

L'osservazione chiave è che i due fibrati $f^*\eta_P$ ed η sono isomorfi, in quanto

$$\begin{aligned}f^{-1}(P \times \mathbb{C}^k) &= \{(x,p,v) \in M \times P \times \mathbb{C}^k \mid f(x) = \pi_P(p,v)\} = \\ &= \{(x,p,v) \in M \times P \times \mathbb{C}^k \mid p = p\} = M \times P \times \mathbb{C}^k \cong M \times \mathbb{C}^k\end{aligned}$$

e $\pi_*(x,p,v) = x = \pi(x,v)$. Da ciò segue che $c_1(\eta) = c_1(f^*\eta_P)$ e, per la naturalità, quest'ultima classe è uguale a $f^*c_1(\eta_P)$. D'altronde tutti i gruppi di coomologia di P sono banali e dunque in particolare $c_1(\eta_P) = 0$, da cui segue l'asserto.

2.4 Alcune proprietà della prima classe di Chern

Lemma 2.4. *Sia $\xi = (E, \pi, M)$ un fibrato vettoriale complesso di rango k; allora*

$$c_1(\xi) = c_1(\Lambda^k \xi)$$

Dimostrazione. Sia $\{\sigma_1 \dots \sigma_k\}$ una base locale di sezioni del fibrato ξ e ∇ una qualsiasi connessione su di esso; risultano allora definiti in maniera naturale sul fibrato $\Lambda^k \xi$ una sezione locale $\sigma := \sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_k$ e una connessione $\tilde{\nabla}$ data da

$$\tilde{\nabla}\sigma := \sum_i \sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_{i-1} \wedge \nabla\sigma_i \wedge \dots \wedge \sigma_k$$

Se denotiamo con ω_{ij} e $\tilde{\omega}$ le 1-forme di connessione tali che

$$\nabla\sigma_i = \sum_j \omega_{ij} \otimes \sigma_j \qquad \text{e} \qquad \tilde{\nabla}\sigma = \tilde{\omega} \otimes \sigma$$

ne risulta che

$$\tilde{\nabla}\sigma = \sum_i \sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_{i-1} \wedge \left(\sum_j \omega_{ij} \otimes \sigma_j\right) \wedge \dots \wedge \sigma_k = \left(\sum_{i=j} \omega_{ij}\right) \otimes \sigma$$

e dunque $\tilde{\omega} = Tr(\omega)$.

Ora ricordiamo che in generale vale la relazione

$$R^{\nabla}_{ij} = d\omega_{ij} - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega kj$$

che nel nostro caso (unidimensionale) si riduce semplicemente a

$$Tr(R^{\tilde{\nabla}}) = R^{\tilde{\nabla}} = d\tilde{\omega} - \tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega} = d\tilde{\omega}$$

D'altronde vale anche, come ricordato nella sezione precedente, $Tr(R^{\nabla}) = d(\sum_i \omega_{ii})$, ma quest'ultimo non è altro che $d\,Tr(\omega)$ e risulta per tanto essere uguale a $d\tilde{\omega}$.

Abbiamo dunque dimostrato che $Tr(R^{\nabla}) = Tr(R^{\tilde{\nabla}})$, e da ciò segue facilmente la tesi.

□

Proposizione 2.5. *Siano $\xi_i = (E_i, \pi_i, M)$, $i = 1, 2$ due fibrati vettoriali complessi sulla stessa base, di ranghi r_1 e r_2 rispettivamente; allora*

$$c_1(\xi_1 \otimes \xi_2) = r_2\, c_1(\xi_1) + r_1\, c_1(\xi_2)$$

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare la tesi nel caso $r_1 = r_2 = 1$, in quanto il lemma precedente ci dice che $c_1(\xi_1 \otimes \xi_2) = c_1(\Lambda^{r_1 r_2}(\xi_1 \otimes \xi_2))$ e quest'ultimo è un fibrato di rango 1, la qual cosa insieme all'isomorfismo canonico

$$\Lambda^{r_1 r_2}(\xi_1 \otimes \xi_2) \cong (\Lambda^{r_1}\xi_1)^{\otimes r_2} \otimes (\Lambda^{r_2}\xi_2)^{\otimes r_1}$$

ci permette di concludere che

$$c_1(\xi_1 \otimes \xi_2) = r_2\, c_1(\Lambda^{r_1}\xi_1) + r_1\, c_1(\Lambda^{r_2}\xi_2) = r_2\, c_1(\xi_1) + r_1\, c_1(\xi_2)$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo di nuovo usato il lemma.

Vediamo dunque come dimostrare la tesi nel caso di fibrati unidimensionali: prendiamo due sezioni locali σ_i e due connessioni ∇_i su ciascun fibrato ξ_i. Queste ultime inducono in maniera naturale una connessione ∇ sul fibrato $\xi_1 \otimes \xi_2$ data da

$$\nabla(\sigma_1 \otimes \sigma_2) := (\nabla_1 \sigma_1) \otimes \sigma_2 + \sigma_1 \otimes (\nabla_2 \sigma_2)$$

Se indichiamo con ω_i le 1-forme di connessione locali relative alle connessioni ∇_i e con ω quella relativa alla connessione ∇, segue dalla definizione di quest'ultima che $\omega = \omega_1 + \omega_2$. D'altronde abbiamo già visto nella sezione precedente che nel caso unidimensionale la curvatura R^∇ non è altro che il differenziale di ω, e dunque

$$R^\nabla = d\omega = d\omega_1 + d\omega_2 = R^{\nabla_1} + R^{\nabla_2}$$

da cui segue la tesi.

□

Corollario 2.6. *Sia $\xi = (E, \pi, M)$ un fibrato vettoriale complesso; allora*

$$c_1(\xi^*) = -c_1(\xi)$$

Dimostrazione. Posto k il rango di ξ, il lemma precedente ci dice che la prima classe di Chern di tale fibrato è pari a quella del fibrato unidimensionale $\Lambda^k \xi$. D'altronde lo stesso vale per il fibrato duale, e vi è un naturale isomorfismo $\Lambda^k \xi^* \cong (\Lambda^k \xi)^*$. Ne segue che, senza perdita di generalità, possiamo assumere $k = 1$.

Sia ora $\eta = (M \times \mathbb{C}, \pi', M)$ il fibrato banale di rango 1 e consideriamo l'isomorfismo canonico $\xi \otimes \xi^* \cong \eta$ dato puntualmente in $p \in M$ sugli spazi totali E ed E^* da

$$\begin{gathered} E_p \otimes E_p^* \to M \times \mathbb{C} \\ ((p, v), (p, \phi)) \mapsto (p, \phi(v)) \end{gathered}$$

Da ciò segue che $c_1(\eta) = c_1(\xi \otimes \xi^*)$, mentre la proposizione precedente ci dice che quest'ultima classe è pari a $c_1(\xi) + c_1(\xi^*)$. D'altronde l'esempio della sezione precedente ci dice in particolare che $c_1(\eta) = 0$, e dunque la tesi è dimostrata.

□

Capitolo 3

Curvatura di una varietà kähleriana e forma di Ricci

A cura di Alessandro Boni.

In questo capitolo ci occuperemo di studiare il concetto di curvatura, prima su varietà riemanniane, poi su varietà kähleriane ed introdurremo la forma di Ricci di una varietà di Kähler (M, J, h). Si tratta di una 2-forma chiusa su M, la cui immagine in $H^2(M)$ coincide (a meno di un multiplo reale) con la prima classe di Chern del fibrato canonico di M.

3.1 Alcuni richiami

Nella presente sezione richiameremo alcuni risultati di geometria riemanniana che saranno utili nel seguito. Si rimanda a [1] e [4] per approfondimenti e dimostrazioni.

Definizione 3.1. Una *metrica riemanniana* su una varietà differenziabile M è un campo tensoriale g di tipo $(2, 0)$ che in ogni punto di M, visto come forma bilineare, sia simmetrico e definito positivo.

La coppia (M, g) si dice una *varietà riemanniana.*

La presenza di una metrica riemanniana sulla varietà differenziabile M rende possibile definire numerosi concetti geometrici tra i quali gli angoli, la lunghezza di una curva,le aree, i volumi e la curvatura. Vale inoltre la seguente:

Proposizione 3.1. *Ogni varietà differenziabile ammette una struttura di varietà riemanniana.*

Il prossimo risultato sarà, nel seguito, di fondamentale importanza.

Teorema 3.2 (Teorema fondamentale della geometria riemanniana)**.** *Data una varietà riemanniana (M, g), esiste un'unica connessione ∇ tale che*

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM)$$

e

$$\nabla g = 0.$$

Tale connessione ∇ prende il nome di *connessione di Levi-Civita* di M.

Consideriamo ora più in dettaglio il caso complesso. Diamo la seguente:

Definizione 3.2. Una *metrica hermitiana* su una varietà quasi complessa (M, J) è una metrica riemanniana h su M tale che

$$h(X, Y) = h(JX, JY) \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM).$$

La terna (M, J, h) si dice una *varietà hermitiana.*

Data una metrica riemanniana g su una varietà quasi complessa (M, J), è sempre possibile costruire una metrica hermitiana h ponendo

$$h(X, Y) := g(X, Y) + g(JX, JY) \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM).$$

Segue dunque dalla Proposizione 3.1 che ogni varietà quasi complessa ammette una metrica hermitiana. Data una metrica hermitiana h sulla varietà quasi complessa (M, J), ponendo

$$\Omega(X, Y) := h(JX, Y) \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM),$$

risulta definita una 2-forma antisimmetrica non degenere. Essa prende il nome di *2-forma fondamentale* della metrica hermitiana h.

Ad ogni varietà quasi complessa (M, J) associamo il tensore di tipo $(2, 1)$ N^J definito da

$$N^J(X, Y) := [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY] \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM).$$

Esso prende il nome di *tensore di Nijenhuis.*

Definizione 3.3. Una metrica hermitiana h sulla varietà quasi complessa (M, J) si dice una *metrica kähleriana* se

$$N^J = 0$$

e

$$d\Omega = 0.$$

In questo caso, la varietà hermitiana (M, J, h) si dice una *varietà kähleriana.*

Una varietà quasi complessa (M, J) il cui tensore di Nijenhuis sia nullo è integrabile. Esiste dunque una struttura complessa su M che induce su M la struttura quasi complessa J.

Vale la seguente caratterizzazione delle metriche kähleriane:

Teorema 3.3. *Sia (M, J, h) una varietà hermitiana e sia ∇ la sua connessione di Levi-Civita. Allora h è una metrica kähleriana su M se e solo se $\nabla J = 0$.*

3.2 Curvatura

In questa sezione analizzeremo più da vicino le varietà riemanniane, definendo il loro *tensore di curvatura* ed enunciandone le principali proprietà (per la dimostrazione delle quali si rimanda a [1] e [2]). Trasferiremo poi tale costruzione su varietà kähleriane e studieremo le simmetrie che la nuova struttura induce sul tensore di curvatura.

Sia (M, g) una varietà riemanniana e sia ∇ la sua connessione di Levi-Civita. Il tensore R^∇ di tipo $(3, 1)$ definito da

$$R^\nabla(X,Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \quad \forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$$

prende il nome di *tensore di curvatura* di M.

Se $M = \mathbb{R}^n$, è facile verificare che $R^\nabla = 0$. Possiamo dunque interpretare R come una misura di quanto la varietà riemanniana in questione dista dall'essere uno spazio euclideo.

Un altra maniera di vedere il tensore di curvatura è il seguente: sia $p \in M$ e sia $\{ x_\alpha \}$ un sistema di coordinate locali intorno a p. Poiché

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial}{\partial x_\beta} \right] = 0,$$

otteniamo

$$R^\nabla \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial}{\partial x_\beta} \right) \frac{\partial}{\partial x_\gamma} = \left(\nabla_{\partial/\partial x_\alpha} \nabla_{\partial/\partial x_\beta} - \nabla_{\partial/\partial x_\beta} \nabla_{\partial/\partial x_\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial x_\gamma}.$$

Possiamo quindi intuitivamente vedere R^∇ come un oggetto che descrive la non commutatività della connessione di Levi-Civita.

A partire dal tensore di curvatura di M è possibile definire un nuovo tensore R di tipo $(4, 0)$ ponendo

$$R(X,Y,Z,T) := g(R^\nabla(X,Y)Z, T) \quad \forall X, Y, Z, T \in \Gamma(TM).$$

Vale la seguente:

Proposizione 3.4. *Nelle notazioni appena introdotte, per ogni $X, Y, Z, T \in \Gamma(TM)$ risulta:*

$$R(X,Y,Z,T) = -R(X,Y,T,Z);$$

$$R(X,Y,Z,T) = R(Z,T,X,Y);$$

$$R(X,Y,Z,T) + R(Y,Z,X,T) + R(Z,X,Y,T) = 0;$$

$$(\nabla_X R^\nabla)(Y,Z)T + (\nabla_Y R^\nabla)(Z,X)T + (\nabla_Z R^\nabla)(X,Y)T = 0$$

(le ultime due uguaglianze prendono il nome, rispettivamente, di prima e seconda identità di Bianchi).

Si dice *tensore di Ricci* di M il tensore di tipo $(2, 0)$ definito da

$$\mathrm{Ric}(X,Y) := \mathrm{tr} \left\{ V \mapsto R^\nabla(V,X)Y \right\} \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM).$$

Se $\{ e_\alpha \}$ è un riferimento locale ortonormale di TM, si ha chiaramente

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \sum_\alpha R(e_\alpha, X, Y, e_\alpha) \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM) \tag{3.1}$$

e, dalla Proposizione 3.4, segue che il tensore di Ricci è simmetrico. Infatti, dati $X, Y \in \Gamma(TM)$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(X,Y) &= \sum_\alpha R(e_\alpha, X, Y, e_\alpha) = -\sum_\alpha R(e_\alpha, X, e_\alpha, Y) \\ &= -\sum_\alpha R(e_\alpha, Y, e_\alpha, X) = \sum_\alpha R(e_\alpha, Y, X, e_\alpha) \\ &= \mathrm{Ric}(Y, X). \end{aligned}$$

Sia ora (M, J, h) una varietà kähleriana. In particolare h è una metrica riemanniana su M e pertanto tutto ciò che è stato detto nella presente sezione vale anche in questa situazione.

Per il Teorema 3.3, risulta $\nabla J = 0$. Quindi, poiché ∇ soddisfa la regola di Leibniz,

$$\nabla_X JY = J\nabla_X Y \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM).$$

Utilizzando tale identità nella definizione di R^∇ segue che

$$R^\nabla(X,Y)JZ = JR^\nabla(X,Y)Z \quad \forall X, Y, Z \in \Gamma(TM). \tag{3.2}$$

Siamo allora in grado di dimostrare il seguente:

Lemma 3.5. *Valgono le seguenti identità:*

(i) $R(X, Y, JZ, JT) = R(X, Y, Z, T) \quad \forall X, Y, Z, T \in \Gamma(TM)$;

(ii) $R(JX, JY, Z, T) = R(X, Y, Z, T) \quad \forall X, Y, Z, T \in \Gamma(TM)$.

Dimostrazione. (i). Sfruttando l'identità (3.2), siccome h è una metrica hermitiana sulla varietà quasi complessa (M, J), dati $X, Y, Z, T \in \Gamma(TM)$, risulta

$$\begin{aligned} R(X, Y, JZ, JT) &= h(R^\nabla(X,Y)JZ, JT) = h(JR^\nabla(X,Y)Z, JT) \\ &= h(R^\nabla(X,Y)Z, T) = R(X, Y, Z, T). \end{aligned}$$

(ii). Dati $X, Y, Z, T \in \Gamma(TM)$, per la Proposizione 3.4, sfruttando la (i) si ha

$$R(JX, JY, Z, T) = R(Z, T, JX, JY) = R(Z, T, X, Y) = R(X, Y, Z, T).$$

□

3.3 La forma di Ricci

Il nostro scopo sarà ora quello di definire la *forma di Ricci* di una varietà kähleriana (M, J, h) e di studiarne le prime proprietà.

Al solito, indicheremo con Ric il tensore di Ricci di M. Vale il seguente:

Lemma 3.6. *Per ogni scelta di $X, Y \in \Gamma(TM)$ si ha*

$$\mathrm{Ric}(JX, JY) = \mathrm{Ric}(X, Y).$$

Dimostrazione. Sia $\{ e_\alpha \}$ un riferimento locale ortonormale di TM. Dati $X, Y \in \Gamma(TM)$, siccome $\{ Je_\alpha \}$ è ancora un riferimento locale ortonormale di TM, per la (3.1) e per il Lemma 3.5 risulta

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(JX, JY) &= \sum_\alpha R(e_\alpha, JX, JY, e_\alpha) = \sum_\alpha R(-J^2 e_\alpha, JX, JY, -J^2 e_\alpha) \\ &= \sum_\alpha R(J^2 e_\alpha, JX, JY, J^2 e_\alpha) = \sum_\alpha R(Je_\alpha, X, Y, Je_\alpha) \\ &= \mathrm{Ric}(X, Y). \end{aligned}$$

□

Sfruttando tale risultato e la simmetria del tensore di Ricci, per ogni $X, Y \in \Gamma(TM)$ si ha

$$\begin{aligned}\operatorname{Ric}(JX, Y) &= \operatorname{Ric}(JX, -J^2Y) = -\operatorname{Ric}(JX, J^2Y)\\ &= -\operatorname{Ric}(X, JY) = -\operatorname{Ric}(JY, X).\end{aligned}$$

Ponendo quindi

$$\rho(X, Y) := \operatorname{Ric}(JX, Y) \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM),$$

risulta ben definita una 2-forma ρ su M. Essa prende il nome di *forma di Ricci* della varietà kähleriana M.

Il nostro scopo è ora quello di provare che la forma di Ricci di una varietà kähleriana è una forma chiusa. A tal fine abbiamo bisogno di un risultato preliminare.

Lemma 3.7. *Il tensore di Ricci di M soddisfa la seguente identità:*

$$\operatorname{Ric}(X, Y) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(R^{\nabla}(X, JY) \circ J) \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM).$$

Dimostrazione. Sia $\{ e_\alpha \}$ un riferimento locale ortonormale di TM e siano $X, Y \in \Gamma(TM)$. Per il Lemma 3.5 e per la Proposizione 3.4,

$$\begin{aligned}\operatorname{Ric}(X, Y) &= \sum_\alpha R(e_\alpha, X, Y, e_\alpha) = \sum_\alpha R(e_\alpha, X, JY, Je_\alpha)\\ &= \sum_\alpha (-R(X, JY, e_\alpha, Je_\alpha) - R(JY, e_\alpha, X, Je_\alpha))\\ &= \sum_\alpha R(X, JY, Je_\alpha, e_\alpha) - \sum_\alpha R(Je_\alpha, Y, X, Je_\alpha)\\ &= \operatorname{tr}(R^{\nabla}(X, JY) \circ J) - \operatorname{Ric}(Y, X).\end{aligned}$$

Da ciò segue la tesi per la simmetria del tensore di Ricci. □

Sfruttando il fatto che la connessione di Levi-Civita soddisfa per definizione la relazione

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM),$$

si verifica facilmente che

$$\begin{aligned}d\rho(X, Y, Z) &= (\nabla_X \rho)(Y, Z) - (\nabla_Y \rho)(X, Z) + (\nabla_Z \rho)(X, Y)\\ &= (\nabla_X \rho)(Y, Z) + (\nabla_Y \rho)(Z, X) + (\nabla_Z \rho)(X, Y).\end{aligned} \tag{3.3}$$

Utilizzando tale identità siamo in grado di dimostrare il seguente:

Teorema 3.8. *La forma di Ricci di una varietà kähleriana è chiusa.*

Dimostrazione. Per il Lemma 3.7, per ogni $X, Y \in \Gamma(TM)$

$$2\rho(X, Y) = 2\operatorname{Ric}(JX, Y) = \operatorname{tr}(R^{\nabla}(JX, JY) \circ J) = \operatorname{tr}(R^{\nabla}(X, Y) \circ J).$$

Quindi, per ogni $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, sfruttando la (3.3),

$$\begin{aligned}2d\rho(X, Y, Z) &= 2\left((\nabla_X \rho)(Y, Z) + (\nabla_Y \rho)(Z, X) + (\nabla_Z \rho)(X, Y)\right)\\ &= \operatorname{tr}\left[\left((\nabla_X R^{\nabla})(Y, Z) + (\nabla_Y R^{\nabla})(Z, X) + (\nabla_Z R^{\nabla})(X, Y)\right) \circ J\right].\end{aligned}$$

Dunque, per la seconda identità di Bianchi, $d\rho = 0$. □

In virtù del Teorema 3.8, ρ definisce una classe di coomologia in $H^2(M)$. Come già accennato, si può dimostrare che

$$[\rho] = 2\pi c_1(K_M),$$

dove con $[\rho]$ indichiamo l'immagine di ρ in $H^2(M)$ e con $c_1(K_M)$ la prima classe di Chern del fibrato canonico K_M di M.

Capitolo 4

Il tensore di curvatura in coordinate locali

A cura di Floriana Amicone.

Dopo aver dimostrato che la forma di Ricci ρ definita su una varietà Kahleriana è chiusa, lo scopo di questa sezione è quello di far vedere che essa ammette un potenziale locale che dipende solo dalla metrica Hermitiana della varietà. Più nello specifico, ci accingiamo a dimostrare che

$$\rho = -i\partial\bar{\partial}\log(det(h_{\alpha\bar{\beta}})) \tag{4.1}$$

dove con $det(h_{\alpha\bar{\beta}})$ ci si riferisce al determinante della matrice $(h_{\alpha\bar{\beta}})$ che esprime la metrica Hermitiana in coordinate locali.

4.1 Notazioni e richiami

Sia dunque (M^{2m}, h, J) una varietà Kahleriana dotata di una connessione di Levi-Civita ∇. Poniamoci in coordinate locali olomorfe z_α. Per snellire la notazione faremo uso delle seguenti notazioni:

- Indichiamo con
$$Z_\alpha := \frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \qquad Z_{\bar{\alpha}} := \frac{\partial}{\partial z_{\bar{\alpha}}}$$
per $1 \leq \alpha \leq m$ la relativa base dello spazio tangente complessificato $TM^{\mathbb{C}}$.
- Con le lettere maiuscole $A, B, C, \ldots$ si intendono indici appartenenti all'insieme
$$\{1, \ldots, m, \bar{1}, \ldots, \bar{m}\},$$
mentre con le lettere greche minuscole ci si riferirà ad indici presi dall'insieme
$$\{1, \ldots, m\}.$$

- Le funzioni componenti della matrice che nelle coordinate locali esprime la metrica Kahleriana sono date da
$$h_{AB} := h(Z_A, Z_B)$$
mentre con $h^{\alpha\bar{\beta}}$ indichiamo i coefficienti della matrice inversa di $(h_{\alpha\bar{\beta}})$ in coordinate locali.

- Utilizziamo le seguenti notazioni per i tensori di curvatura:
$$R(Z_A, Z_B)Z_C = \sum_D R^D_{ABC} Z_D$$
$$R_{ABCD} = R(Z_A, Z_B, Z_C, Z_D) = \sum_E h_{DE} R^E_{ABC}$$

Una nozione di cui si farà uso nel seguito è quella di *simboli di Christoffel* di una connessione ∇, dunque ne ricordiamo brevemente la definizione:

Definizione 4.1. I simboli di Christoffel relativi alla base Z_A di $TM^{\mathbb{C}}$ sono i Γ^C_{AB} tali che
$$\nabla_{Z_A} Z_B = \sum_C \Gamma^C_{AB} Z_C$$

4.2 Relazioni tra i coefficienti della metrica e del tensore di curvatura

Grazie alle proprietà che caratterizzano una metrica Kahleriana, l'espressione della forma di Ricci in coordinate locali risulta essere particolarmente semplice, dato che i coefficienti della forma, come stiamo per vedere, soddisfano specifiche condizioni di simmetria e nullità.

4.2.1 Espressione locale dei simboli di Christoffel

Osservazione 4.1. Poiché la metrica è Hermitiana, per ogni α, β si ha
$$h_{\alpha\beta} = h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0$$
$$h_{\alpha\bar{\beta}} = h_{\bar{\beta}\alpha} = \overline{h_{\beta\bar{\alpha}}}$$
Questo perché tra le proprietà di una metrica Hermitiana rientrano:
$$h(\bar{X}, \bar{Y}) = \overline{h(X,Y)} = h(\bar{Y}, \bar{X})$$
$$h(X,Y) = 0 \textit{ se } X, Y \in T^{1,0}M \textit{ oppure } X, Y \in T^{0,1}M$$

Osservazione 4.2. Anche tra i simboli di Christoffel della connessione esistono particolari simmetrie. Innanzitutto, grazie alla scelta della base locale
$$\overline{\Gamma^C_{AB}} = \Gamma^{\bar{C}}_{\bar{A}\bar{B}}$$
Poiché la connessione di Levi-Civita è priva di torsione si ha anche
$$\Gamma^C_{AB} = \Gamma^C_{BA}$$

Infatti l'essere priva di torsione vuol dire che per ogni coppia di campi vettoriali X, Y risulta

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

e l'asserto segue dal fatto che il bracket tra due campi coordinati è nullo.

Osservazione 4.3. Le condizioni ricavate finora non sono specifiche di una varietà Kahleriana. Un fatto che invece dipende in modo essenziale dal caso in esame è la seguente relazione che sussiste tra i simboli di Christoffel:

$$\Gamma^{\gamma}_{A\bar{\beta}} = 0 \tag{4.2}$$

Questo discende dal fatto che $T^{1,0}M$ è parallelo, vale a dire che $\nabla T^{1,0}M \subseteq T^{1,0}M$. Infatti, poiché su una varietà Kahleriana la connessione di Levi-Civita e quella di Chern coincidono, risulta $\nabla^{0,1} = \bar{\partial}$. Ma allora $\forall \beta$

$$\nabla Z_\beta = \nabla^{0,1} Z_\beta + \nabla^{1,0} Z_\beta = \nabla^{0,1} Z_\beta + \bar{\partial} Z_\beta = \nabla^{0,1} Z_\beta \subseteq T^{1,0}M$$

Dalle tre osservazioni precedenti segue che gli unici simboli di Christoffel non necessariamente nulli sono quelli del tipo

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} \qquad \Gamma^{\bar{\gamma}}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \tag{4.3}$$

Osservazione 4.4. Dalle considerazioni fatte finora segue che $\Gamma^{C}_{\alpha\bar{\delta}} = 0$. Questo in particolare comporta

$$\nabla_{Z_\alpha} Z_{\bar{\delta}} = 0 \tag{4.4}$$

Ma allora

$$\frac{\partial h_{\beta\bar{\delta}}}{\partial z_\alpha} = h(\nabla_{Z_\alpha} Z_\beta, Z_{\bar{\delta}}) + h(Z_\beta, \nabla_{Z_\alpha} Z_{\bar{\delta}}) = h(\nabla_{Z_\alpha} Z_\beta, Z_{\bar{\delta}}) = \sum_\gamma \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} h_{\gamma\bar{\delta}}$$

Infine, passando all'inversa, si ottengono le relazioni

$$\sum_\gamma \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} h_{\gamma\bar{\delta}} = \frac{\partial h_{\beta\bar{\delta}}}{\partial z_\alpha} \tag{4.5}$$

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = \sum_{\bar{\delta}} h^{\gamma\bar{\delta}} \frac{\partial h_{\beta\bar{\delta}}}{\partial z_\alpha} \tag{4.6}$$

4.2.2 I coefficienti del tensore di curvatura

Passiamo ora ad esaminare i coefficienti del tensore di curvatura. Premettiamo che vale ovviamente

$$\overline{R^{D}_{ABC}} = R^{\bar{D}}_{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$$

Osservazione 4.5. Poiché $T^{1,0}M$ è parallelo risulta

$$R^{\gamma}_{AB\bar{\delta}} = R^{\bar{\gamma}}_{AB\delta} = 0$$

e da questo segue che

$$R_{AB\gamma\delta} = R_{AB\bar{\gamma}\bar{\delta}} = 0$$

Infatti nell'espressione

$$R_{AB\gamma\delta} = \sum_{\alpha} h_{\delta\alpha} R^{\alpha}_{AB\gamma} + \sum_{\bar{\alpha}} h_{\delta\bar{\alpha}} R^{\bar{\alpha}}_{AB\gamma}$$

la prima sommatoria è nulla poiché sono nulli gli $h_{\delta\gamma}$, mentre la seconda è nulla perché lo sono gli $R^{\bar{\alpha}}_{AB\gamma}$.

Infine, sfruttando la (4.4) e le proprietà di simmetria di cui gode il tensore di curvatura, segue che gli unici coefficienti non necessariamente nulli sono quelli del tipo

$$R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} \qquad R_{\alpha\bar{\beta}\bar{\gamma}\delta} \qquad R_{\bar{\alpha}\beta\gamma\bar{\delta}} \qquad R_{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}\delta} \tag{4.7}$$

$$R^{\delta}_{\alpha\bar{\beta}\gamma} \qquad R^{\bar{\delta}}_{\alpha\bar{\beta}\bar{\gamma}} \qquad R^{\delta}_{\bar{\alpha}\beta\gamma} \qquad R^{\bar{\delta}}_{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}} \tag{4.8}$$

4.3 La forma di curvatura in coordinate locali

A questo punto occorre mettere insieme tutte le relazioni trovate. Notiamo innanzitutto che da (4.4), (4.5) e (4.6) otteniamo

$$\sum_{\delta} R^{\delta}_{\alpha\bar{\beta}\gamma} Z_\delta = R(Z_\alpha, Z_{\bar{\beta}})Z_\gamma = -\nabla_{Z_{\bar{\beta}}}\nabla_{Z_\alpha} Z_\gamma = -\nabla_{Z_{\bar{\beta}}}(\sum_{\delta}\Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma} Z_\delta) = -\sum_{\delta}\frac{\partial \Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma}}{\partial \overline{z_\beta}} Z_\delta$$

Ma allora i coefficienti del tensore di curvatura e i simboli di Christoffel sono legati dalla relazione

$$R^{\delta}_{\alpha\bar{\beta}\gamma} = -\frac{\partial \Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma}}{\partial \overline{z_\beta}} \tag{4.9}$$

Vediamo questo cosa comporta per i coefficienti del tensore di Ricci. Per prima cosa $Ric_{\gamma\beta} = Ric_{\bar{\gamma}\bar{\beta}} = 0$ dalla (4.8). Risulta poi:

$$Ric_{\gamma\bar{\beta}} = Ric_{\bar{\beta}\gamma} = \sum_{A} R^{A}_{A\bar{\beta}\gamma} = \sum_{\alpha} R^{\alpha}_{\alpha\bar{\beta}\gamma} = -\sum_{\alpha}\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\alpha\gamma}}{\partial \overline{z_\beta}} \tag{4.10}$$

A questo punto dimostriamo un lemma tecnico di algebra lineare che ci porterà a concludere.

Lemma 4.1. *Sia $h : \mathbb{R} \longrightarrow Gl_n(\mathbb{C})$ un'applicazione differenziabile, siano $(h_{ij}) = (h_{ij}(t))$ e $(h^{ij}) = (h_{ij}(t))^{-1}$ i coefficienti rispettivamente dell'applicazione h e dell'inversa. Indicato con $d = d(t)$ il determinante di (h_{ij}), vale*

$$d'(t) = d\sum_{i,j=1}^{n} h'_{ij}(t)h^{ji}(t)$$

Dimostrazione: Scriviamo il determinante come

$$d = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) h_{1\sigma(1)} \dots h_{n\sigma(n)}$$

dove σ è ovviamente la permutazione che manda $i \mapsto \sigma(i)$ e $\varepsilon(\sigma)$ è il segno di σ.

Per ogni i, j, poniamo

$$\widetilde{h^{ji}} := \frac{1}{d} \sum_{\substack{\sigma\in S_n \\ \sigma(i)=j}} \varepsilon(\sigma) h_{1\sigma(1)} \dots h_{i-1\sigma(i-1)} h_{i+1\sigma(i+1)} \dots h_{n\sigma(n)} \tag{4.11}$$

Mostriamo che $\widetilde{h^{ji}} = h^{ji}$, cioè si tratta proprio dei coefficienti della matrice inversa $(h_{ij})^{-1}$. Infatti

$$\sum_{j=1}^{n} h_{ij}\widetilde{h^{ji}} = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{\sigma\in S_n \\ \sigma(i)=j}} \varepsilon(\sigma) h_{1\sigma(1)} \dots h_{ij} \dots h_{n\sigma(n)} = \frac{1}{d}\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) h_{1\sigma(1)} \dots h_{n\sigma(n)} = \frac{1}{d} d = 1 \tag{4.12}$$

Se invece $k \neq i$

$$\sum_{j=1}^{n} h_{kj}\widetilde{h^{ji}} = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{\sigma\in S_n \\ \sigma(i)=j}} \varepsilon(\sigma) h_{1\sigma(1)} \dots h_{i-1\sigma(i-1)} h_{k\sigma(i)} h_{i+1\sigma(i+1)} \dots h_{n\sigma(n)} = 0 \tag{4.13}$$

Poiché in questo caso $k \neq i$, consideriamo per ogni $\sigma \in S_n$ la permutazione $\tau_{ik}\sigma$, dove con τ_{ik} intendiamo la trasposizione che scambia gli indici i e j. Ogni termine

$$\varepsilon(\sigma) h_{1\sigma(1)} \dots h_{k\sigma(k)} \dots h_{k\sigma(i)} \dots h_{n\sigma(n)}$$

è opposto a quello relativo alla permutazione $\tau_{ik}\sigma$, poichè risulta:

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\tau_{ik}\sigma) h_{1\tau_{ik}\sigma(1)} \dots h_{k\tau_{ik}\sigma(k)} \dots h_{k\tau_{ik}\sigma(i)} \dots h_{n\tau_{ik}\sigma(n)} &= \\
= -\varepsilon(\sigma) h_{1\sigma(1)} \dots h_{k\sigma(i)} \dots h_{k\sigma(k)} \dots h_{n\sigma(n)} &= \\
= -\varepsilon(\sigma) h_{1\sigma(1)} \dots h_{k\sigma(k)} \dots h_{k\sigma(i)} \dots h_{n\sigma(n)} &
\end{aligned}$$

Ma allora

$$\begin{aligned}
d'(t) &= \sum_{\sigma\in S_n} \sum_{i=1}^{n} h'_{i\sigma(i)}(t)\, \varepsilon(\sigma) h_{1\sigma(1)} \dots h_{i-1\sigma(i-1)} h_{i+1\sigma(i+1)} \dots h_{n\sigma(n)} = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{\sigma\in S_n \\ \sigma(i)=j}} \varepsilon(\sigma) h'_{ij}(t) d\widetilde{h^{ji}} = d \sum_{i,j=1}^{n} h'_{ij}(t) h^{ji}(t)
\end{aligned}$$

Ricordiamo che, per i simboli di Christoffel della connessione, si era ottenuto:

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\gamma\alpha} = \sum_{\bar\delta} h^{\alpha\bar\delta} \frac{\partial h_{\alpha\bar\delta}}{\partial z_\gamma}$$

Applicando il lemma si evince che

$$\sum_{\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\alpha\gamma} = \sum_{\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\gamma\alpha} = \sum_{\bar\delta,\alpha} h^{\alpha\bar\delta} \frac{\partial h_{\alpha\bar\delta}}{\partial z_\gamma} = \frac{1}{d}\frac{\partial d}{\partial z_\gamma} = \frac{\partial \log d}{\partial z_\gamma}$$

dove con d si è indicato il determinante della matrice $(h_{\alpha\bar{\beta}})$ che rappresenta la metrica in coordinate locali.

Inoltre

$$Ric_{\gamma\bar{\beta}} = -\sum_{\alpha} \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\alpha\gamma}}{\partial \overline{z_{\beta}}} = -\frac{\partial}{\partial \overline{z_{\beta}}} \sum_{\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\alpha\gamma} = -\frac{\partial}{\partial \overline{z_{\beta}}} \frac{\partial}{\partial z_{\gamma}} \log d$$

Ma dato che per definizione $\rho(X, Y) = Ric(JX, Y)$ ed essendo la varietà Kahleriana (e dunque complessa), otteniamo proprio il risultato esposto all'inizio del capitolo:

$$\rho = -i\partial\bar{\partial} \log d.$$

Bibliografia

[1] M. P. do Carmo (1992). *Riemannian Geometry.* Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser.

[2] S. Kobayashi, K. Nomizu (1963). *Foundations of Differential Geometry. Volume I.* Wiley Classics Library. Interscience Publishers.

[3] S. Kobayashi, K. Nomizu (1969). *Foundations of Differential Geometry. Volume II.* Wiley Classics Library. Interscience Publishers.

[4] A. Moroianu (2007). *Lectures on Kähler Geometry.* London Mathematical Society Student Text **69**. Cambridge University Press.