Geometria I (Canale I-Z)

Esercitazione del 12.12.2014 - Prof. P. Piccinni

Esercizio 1. Si consideri la quartica $\mathcal{C}$ di $\mathbf{CP^2}$ di equazione affine:

$$f(x,y) = (x^2 - y^2)^2 - xy = 0.$$

i) Determinare i punti singolari, al finito e all'infinito, di $\mathcal{C}$.

ii) Scrivere le equazioni delle tangenti principali nei punti singolari di $\mathcal{C}$ e determinare nei punti stessi la loro molteplicità di intersezione con $\mathcal{C}$.

iii) Scrivere l'equazione della curva algebrica $\mathcal{D}$ costituita dalle tangenti principali di $\mathcal{C}$. $\mathcal{D}$ ha altri punti singolari, oltre quelli di $\mathcal{C}$?

Esercizio 2. Nel piano affine complesso si consideri l'insieme Λ costituito dalla cubica $\mathcal{C}_0^3$ di equazione $y^3 = 0$ e da tutte le cubiche $\mathcal{C}^3$ soddisfacenti alle seguenti condizioni: a) L'origine $O = (0,0)$ è un punto doppio di $\mathcal{C}^3$ con tangenti principali le rette $\tau_1 : x + i\sqrt{2}y = 0$ e $\tau_2 : x - i\sqrt{2}y = 0$; b) Il punto $A = (-1,0)$ è un flesso per $\mathcal{C}^3$ con tangente la retta $r : x + 1 = 0$.

i) Verificare che Λ è un fascio (sistema lineare di dimensione 1) e scrivere le equazioni delle $\mathcal{C}^3 \in \Lambda$.

ii) Stabilire se in Λ vi siano altre cubiche riducibili, oltre a $\mathcal{C}_0$, e eventualmente determinarle.

iii) Determinare gli eventuali altri flessi, al finito e all'infinito, delle cubiche irriducibili di Λ.

Esercizio 3. Si consideri in $\mathbf{CP^2}$ la sestica $\mathcal{C}$ di equazione affine

$$\mathcal{C}: \quad x^6 + y^6 - 2x^2y^2 = 0.$$

i) Stabilire la natura dell'origine O per $\mathcal{C}$ (punto semplice, doppio, triplo, ...) e determinare in O la tangente o le tangenti principali, precisando per ognuna di esse la molteplicità di intersezione in O con $\mathcal{C}$.

ii) Determinare per quali valori reali di r la curva $\mathcal{C}$ interseca in punti reali la circonferenza $x^2 + y^2 = r^2$. Quali sono i punti di intersezione per $r = \sqrt{2}$?

iii) Determinare i punti impropri, reali e non reali di $\mathcal{C}$.

Esercizio 4. Si consideri nel piano affine reale la circonferenza $\Gamma : x^2 + y^2 - 2y = 0$. Sia r una retta passante per l'origine $O = (0,0)$ e sia H l'ulteriore punto di intersezione di r con Γ. Sia poi T il punto di intersezione di r con la tangente a Γ nel suo punto diametralmente opposto rispetto a O.

i) Verificare che il luogo dei punti medi M dei segmenti HT descrive, al variare della retta r, una curva $\mathcal{C}$ di equazione cartesiana:

$$y(x^2 + y^2) = x^2 + 2y^2.$$

ii) Studiare la cubica $\mathcal{C}$ mostrando che è irriducibile, determinandone punti impropri, eventuali punti singolari, e flessi.