Geometria I (Canale I-Z)

Esercitazione del 13.10.2014 - Prof. P. Piccinni

Esercizio 1. Si consideri in $\mathbf{R^3}$ e in $\mathbf{C^3}$ la forma quadratica definita sui vettori $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ dalla formula

$$q(\vec{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + x_3^2$$

i) Scrivere l'espressione analitica della forma bilineare simmetrica associata a b.

ii) Stabilire quali tra i vettori $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ è isotropo rispetto a q.

iii) Determinare basi $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ di $\mathbf{R^3}$ e $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ di $\mathbf{C^3}$ in cui la matrice associata a q si rappresenta in forma canonica, risp. reale di Sylvester o complessa.

Esercizio 2. Sia $V^{n^2} = M_n(\mathbf{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n ad elementi reali.

i) Dimostrare che la funzione

$$f : M_n(\mathbf{R}) \times M_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$$
$$f(A, B) = tr(A\ B^t)$$

definisce una forma bilineare simmetrica su V^{n^2}.

ii) Determinare gli indici di positività, negatività e nullità di f.

Esercizio 3. Si considerino le seguente matrici di Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{C}).$$

a) Stabilire se $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sono simmetriche, se sono hermitiane, se sono unitarie ($\in U(2)$), se sono speciali unitarie ($\in SU(2)$).

b) Verificare che $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sono diagonalizzabili, e costruire matrici unitarie risp. τ_1, τ_2, τ_3 che le diagonalizzino.

c) Verificare che σ_1 e σ_3 sono diagonalizzabili anche per congruenza.

d) Dimostrare che σ_2 non è diagonalizzabile per congruenza, ovvero che non esiste una $C \in GL(2, \mathbf{C})$ tale che $C^t\sigma_2 C$ sia diagonale.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbf{C^3}$, e sia assegnata la forma quadratica $q : V \to \mathbf{C}$ tale che

$$q(\vec{v}) = 2ix_1x_2 + 2x_1x_3 + i2x_2x_3,$$

essendo $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3) \in V$.

i) Determinare l'espressione della forma bilineare simmetrica $b : V \times V \to \mathbf{C}$ associata alla forma quadratica q.

ii) Determinare una base opportuna di V rispetto alla quale q abbia espressione canonica.