# Geometria I (Canale I-Z)

Esercitazione del 20.10.2014 - Prof. P. Piccinni

**Esercizio 1.** Si consideri, nello spazio vettoriale

$$\mathbf{R}_{\leq 2}[x] = \{f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2\}$$

dei polinomi di grado $\leq 2$ a coefficienti in $\mathbf{R}$, la forma bilineare simmetrica

$$b(f(x)g(x)) = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Determinare una base di $\mathbf{R}_{\leq 2}[x]$ in cui $b$ si rappresenta nella forma canonica di Sylvester.

**Esercizio 2**. Si considerino nello spazio proiettivo numerico $\mathbf{R}P^3$ i punti

$$P_0 = [0,1,1,0],\ P_1 = [1,0,1,0],\ P_2 = [1,-1,0,1],\ P_3 = [0,2,2,-1].$$

i) Verificare che $P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3$ sono contenuti in un piano $H \subset \mathbf{R}P^3$ e scrivere equazioni parametriche e cartesiana di $H$.

ii) Scrivere le equazioni cartesiane delle rette $r_1, \ldots, r_6$ che uniscono coppie di punti scelti tra $P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3$.

iii) Si considerino in $\mathbf{R}P^3$ i piani

$$\pi_0 : x_1 + x_2 = 0,\ \pi_1 : x_0 + x_2 = 0,\ \pi_2 : x_0 - x_1 + x_3 = 0,\ \pi_3 : 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0.$$

Si può affermare che essi passano per uno stesso punto?

**Esercizio 3**. Si considerino i punti $P_1, P_2, P_3 \in \mathbf{C}P^3$ ottenuti come classi di proporzionalità delle matrici di Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{C}) \cong \mathbf{C^4}.$$

a) Verificare che $P_1, P_2, P_3$ non sono allineati e determinare l'equazione cartesiana del piano proiettivo $\pi$ da essi individuato.

b) Si può affermare che ogni punto del piano $\pi$ risulta essere classe di proporzionalità di una matrice hermitiana in $M_2(\mathbf{C}) \cong \mathbf{C^4}$?

**Esercizio 4**. (Ripropone in versione proiettiva l' Esercizio 4 del Foglio 2). Si consideri la forma quadratica $q : \mathbf{C^3} \to \mathbf{C}$ tale che

$$q(\vec{v}) = 2ix_0x_1 + 2x_0x_2 + i2x_1x_2,$$

essendo $\vec{v} = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbf{C^3}$.

i) Verificare che il luogo

$$\Gamma : \{\vec{v} :\ q(\vec{v}) = 2ix_0x_1 + 2x_0x_2 + i2x_1x_2 = 0\}$$

dei vettori isotropi rispetto a $q$ è un *cono* di $\mathbf{C^3}$, ovvero se $\vec{v} \in \Gamma$ anche $\lambda\vec{v} \in \Gamma$ per ogni $\lambda \in \mathbf{C}$.

ii) Il luogo

$$P(\Gamma) = \{[\vec{v}]_\sim,\ \vec{v} \in \Gamma\} \subset P(\mathbf{C^3}) = \mathbf{C}P^2$$

si dice *conica proiettiva* di equazione $2ix_0x_1 + 2x_0x_2 + i2x_1x_2 = 0$, essendo $[x_0, x_1, x_2]$ le coordinate proiettive omogenee su $\mathbf{C}P^2$ definite dalla base canonica di $\mathbf{C^3}$. Costruire una base di $\mathbf{C^3}$ nelle cui coordinate $[x'_0, x'_1, x'_2]$ la conica proiettiva $P(\Gamma)$ si rappresenta in *forma canonica*:

$$P(\Gamma) : (x'_0)^2 + (x'_1)^2 + (x'_2)^2 = 0.$$