Geometria I (Canale I-Z)

Esercitazione (virtuale) del 22.12.2014 - Prof. P. Piccinni - Esercizi di Topologia

1. Si consideri, nell'insieme $\mathcal{C}([0,1])$ delle funzioni continue nell'intervallo $[0,1]$ e a valori reali, la successione di funzioni $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbf{N}$. Si determini, per ognuna delle due topologie indotte dalle distanze $d_1(f,g) = \sup|f(x) - g(x)|$ e $d_2(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|$ in $\mathcal{C}([0,1])$, l'eventuale esistenza di funzioni che siano punti di convergenza per la successione assegnata.

2. Si consideri, in $\mathbf{R}$ dotato della topologia cofinita, la successione $\{x_n\}$ così definita: $x_n = 0$ se n è pari e $x_n = n$ se n è dispari. Stabilire se $\{x_n\}$ ammette punti di convergenza.

3. In $\mathbf{R}^2$ con la topologia euclidea si consideri il sottoinsieme $D = (0,+\infty) \times [0,+\infty)$. Determinare la parte interna $Int(D)$, la chiusura $\overline{D}$, la frontiera $\partial D = Fr(D)$ e la parte esterna $Est(D)$.

4. Sia X un insieme arbitrario su cui siano assegnate due topologie τ_1 e τ_2. Verificare che l'applicazione identica id: $(X,\tau_1) \to (X,\tau_2)$ è continua se e solo se τ_1 è più fine di τ_2. Si può affermare che esiste sempre qualche $f : (X,\tau_1) \to (X,\tau_2)$ che sia continua independentemente dalle scelte di τ_1 e τ_2?

5. Per ogni intero $n \geq 1$ si considerino gli insiemi:

$$\mathcal{C}_n = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \text{ con } \frac{1}{2n} \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2n-1}\}$$

$$\mathcal{D}_n = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \text{ con } 2n-1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 2n\}$$

e siano

$$\mathcal{C} = \cup_{n\geq 1}\mathcal{C}_n, \qquad \mathcal{D} = \cup_{n\geq 1}\mathcal{D}_n.$$

Stabire se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ sono chiusi nell'$\mathbf{R}^2$ euclideo e, in caso negativo, indicarne la chiusura.

6. Si consideri su $\mathbf{R}$ la topologia $\tau = \{\emptyset, \mathbf{Q}, \mathbf{R} - \mathbf{Q}, \mathbf{R}\}$. Determinare quali delle seguenti successioni ammettono punti di convergenza: a) $\{2n\}$; b) $\{(-1)^n\}$; c) $\{n\pi\}$; d) $\{(\sqrt{2})^n\}$.

7. Si consideri il sottospazio $S = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) \in \mathbf{R}^2; n,m \in \mathbf{N}\}$ dell' $\mathbf{R}^2$ euclideo.

i) Determinare la parte interna S^o, la parte esterna Est S, la frontiera ∂S, la chiusura $\overline{S}$.

ii) Confrontare le topologie indotte su S e su $\overline{S}$ con la topologia discreta;

8. Si considerino su $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ le seguenti topologie prodotto: $\tau_1 = \mathcal{E} \times \mathcal{Z}$, $\tau_2 = \mathcal{Z} \times \mathcal{Z}$, $\tau_3 = \tau_{\text{ban}} \times \tau_{\text{discr}}$, essendo $\mathcal{E}, \mathcal{Z}, \tau_{\text{ban}}, \tau_{\text{discr}}$ le topologie rispettivamente euclidea, cofinita, banale e discreta su $\mathbf{R}$.

i) Stabire quali relazioni d'ordine "di maggiore finezza" sussistono tra τ_1, τ_2, τ_3.

ii) Per ognuna delle topologie τ_1, τ_2, τ_3 stabilire quali tra i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$ sono aperti:

a) il quadrato $I^2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$,

b) il disco $B^2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ x^2+y^2 < 1\}$,

c) $\mathbf{R}^2 - (0,0)$.

iii) Si considerino infine le coppie $(\tau_i, \tau_j)(i,j = 1,2,3)$, di topologie che, secondo la risposta data al quesito i) sono non confrontabili. Costruire esempi di sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$ che siano aperti in τ_i ma non in τ_j e viceversa.

9. Si considerino i seguenti sottospazi dell' $\mathbf{R^2}$ euclideo:

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{1}{4} \leq x^2+y^2 \leq 4\}; \qquad B = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{1}{4} < x^2+y^2 < 4\};$$

$$C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{1}{4} < x^2+y^2 \leq 4\}; \qquad D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{1}{4} \leq x^2+y^2 < 4\};$$

$$E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{1}{2} \leq |x| \leq 2,\ \frac{1}{2} \leq |y| \leq 2\};$$

$$F = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{1}{4} \leq |x| \leq 4,\ \frac{1}{2} \leq |y| \leq 2\}; \quad G = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2+y^2 > 0\}.$$

i) Tracciare un disegno approssimativo dei sottospazi A,B,C,D,E,F,G e stabilire quali tra essi sono aperti in $\mathbf{R}^2$, quali sono chiusi, quali aperti e chiusi, quali ne' aperti ne' chiusi.

ii) Determinare quali tra i sottospazi A,B,C,D,E,F,G sono tra loro omeomorfi, costruendo esplicitamente un omeomorfismo.

iii) Determinare quali tra i sottospazi A,B,C,D,E,F,G non sono tra loro omeomorfi, e precisare quali propriet topologiche permettono di escludere l'esistenza di un omeomorfismo .