Geometria I (Canale I-Z)

Esercitazione del 24.11.2014 - Prof. P. Piccinni

Esercizio 1. Piano affine $\mathbf{A^2}(\mathbf{R})$ - Coordinate xy.
Sia assegnata la conica

$$\mathcal{C}: \quad 5x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 2y = 0.$$

i) Verificare che $\mathcal{C}$ è un'ellisse generale.

ii) Determinare il centro P_0 di $\mathcal{C}$.

iii) Determinare un riferimento affine opportuno rispetto al quale $\mathcal{C}$ abbia equazione canonica affine e scrivere tale equazione.

Esercizio 2. Si consideri in $\mathbf{R^3}$ la forma bilineare simmetrica

$$b(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 - x_3y_3,$$

essendo $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R^3}$.

i) Scrivere la forma quadratica q e la matrice A associate a b.

ii) Si determini una base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ di $\mathbf{R^3}$ che diagonalizzi b, precisandone gli indici di Sylvester.

iii) Si scriva la matrice C che ha per colonne le coordinate di $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ e si verifichi che $A' = C^tAC$ è diagonale (anzi è forma di Sylvester di A).

Esercizio 3. (Presuppone l'esercizio 2) Si consideri nello spazio affine reale $\mathbf{A^3}(\mathbf{R})$, con coordinate (x_1, x_2, x_3) la quadrica

$$\mathcal{Q}: \quad x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 - x_3^2 + 2x_1 + 2x_2 - 8x_3 + 1 = 0.$$

i) Utilizzando quanto ottenuto nell'esercizio 2 e la matrice C dello stesso esercizio, verificare che l'affinità:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

trasforma l'equazione di $\mathcal{Q}$ nella

$$\mathcal{Q}: \quad (x_1')^2 - (x_2')^2 + 2x_1' + 4x_2' - 4x_3' + 1 = 0.$$

ii) Determinare la traslazione $x' = x'' + \alpha, y' = y'' + \beta, z' = z'' + \gamma$ che conduce all'equazione:

$$\mathcal{Q}: \quad z'' = \frac{(x_1')^2}{4} - \frac{(x_2')^2}{4}.$$

iii) Scrivere un'ulteriore affinità che fornisca l'equazione canonica affine:

$$\mathcal{Q}: \quad z'' = (x_1')^2 - (x_2')^2,$$

e precisare il tipo affine di $\mathcal{Q}$. Si puo' riconoscere analiticamente qualche retta contenuta in $\mathcal{Q}$?