Geometria I (Canale I-Z)

Esercitazione del 27.10.2014 - Prof. P. Piccinni

Esercizio 1. Spazio proiettivo $\mathbf{P^3}$. Coordinate proiettive omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$.

Siano assegnati i punti $P_1 = [0, -1, 1, 1]$, $P_2 = [0, 1, 1, 0]$ ed il piano $\pi : x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

i) Scrivere equazioni cartesiane in coordinate omogenee della retta r passante per P_1 e P_2.

ii) Scrivere equazioni parametriche omogenee di r.

iii) Determinare il punto $P = r \cap \pi$.

Esercizio 2. Piano proiettivo reale $\mathbf{RP^2}$. Coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$.

Sia assegnata la conica

$$\mathcal{C} : \quad x_0^2 - 2x_0x_1 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 0.$$

i) Verificare che $\mathcal{C}$ è una conica generale a supporto non vuoto.

ii) Determinare un opportuno sistema di coordinate proiettive omogenee $[x_0', x_1', x_2']$ rispetto a cui $\mathcal{C}$ ha equazione canonica proiettiva e scrivere tale equazione.

Esercizio 3. Piano proiettivo $\mathbf{P^2}$. Coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$.

Siano assegnati i punti $P_0' = [1, 1, 1]$, $P_1' = [1, 1, -1]$, $P_2' = [1, -1, 1]$, $U' = [1, -1, -1]$.

i) Verificare che P_0', P_1', P_2', U' sono in posizione generale.

ii) Si consideri il riferimento proiettivo che ammette i punti P_0', P_1', P_2' come punti fondamentali e U' come punto unità. Stabilire le formule di trasformazione di coordinate di punto dalle sue coordinate omogenee $[x_0', x_1', x_2']$ a quelle $[x_0, x_1, x_2]$ del riferimento canonico.

iii) Scrivere nelle coordinate $[x_0', x_1', x_2']$ l'equazione cartesiana della retta $r : x_0 + x_1 + x_2 = 0$.

Esercizio 4. Piano proiettivo complesso $\mathbf{CP^2}$. Coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$.

Sia assegnata la conica

$$\mathcal{C} : \quad x_0^2 - 2x_0x_1 + 2x_1x_2 - x_2^2 = 0.$$

i) Verificare che $\mathcal{C}$ è una conica semplicemente degenere.

ii) Determinare un sistema opportuno di coordinate proiettive omogenee $[x_0', x_1', x_2']$ rispetto a cui $\mathcal{C}$ ha equazione canonica proiettiva e scrivere tale equazione.

iii) Determinare le equazioni delle due rette in cui si spezza $\mathcal{C}$.