Geometria I (Canale I-Z)

Esercitazione del 3.11.2014 - Prof. P. Piccinni

Esercizio 1 (Elaborazione degli esercizi 2 e 4 del Foglio 4). Si considerino in $\mathbf{R^3}$ le seguenti forme bilineari simmetriche, dove $\vec{x} = (x_0, x_1, x_2), \vec{y} = (y_0, y_1, y_2) \in \mathbf{R^3}$:

$$\begin{aligned} b(\vec{x}, \vec{y}) &= x_0y_0 - x_0y_1 - x_1y_0 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2, \\ b'(\vec{x}, \vec{y}) &= x_0y_0 - x_0y_1 - x_1y_0 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2, \\ b''(\vec{x}, \vec{y}) &= x_0y_0 - x_0y_1 - x_1y_0 - x_0y_2 - x_2y_0 + x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2. \end{aligned}$$

i) Scrivere le matrici A, A', A'' associate rispettivamente a b, b', b'', e le espressioni analitiche delle rispettive forme quadratiche q, q', q''.

ii) Determinare in $\mathbf{R^3}$ una base di Sylvester per ognuna delle forme bilineari b, b', b'', e precisare per ognuna di esse gli indici di positività, negatività, nullità.

iii) Si considerino poi nel piano proiettivo $\mathbf{RP^2}$ le coniche

$$\mathcal{C} : q(x_0, x_1, x_2) = 0, \qquad \mathcal{C}' : q'(x_0, x_1, x_2) = 0, \qquad \mathcal{C}'' : q''(x_0, x_1, x_2) = 0,$$

dove ora $[x_0, x_1, x_2]$ sono coordinate proiettive omogenee in $\mathbf{RP^2}$. Stabilire il tipo proiettivo di $\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}''$, precisando le equazioni delle rette componenti delle coniche che risultano degeneri.

Esercizio 2 (Affinità e Proiettività). Si ricordino nello spazio affine $\mathbf{A^3}$ le equazioni di un'affinità f:

$$\begin{aligned} x' &= b_1 + c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z \\ y' &= b_2 + c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z \\ z' &= b_3 + c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z \end{aligned}$$

che descrivono analiticamente la trasformazione $P = (x, y, z) \in \mathbf{A^3} \longrightarrow P' = f(P) = (x', y', z') \in \mathbf{A^3}$.

i) Determinare le equazioni dell'affinità $f_0 : \mathbf{A^3} \to \mathbf{A^3}$ che manda i punti

$$P_0 = (1, 0, 0), P_1 = (0, 1, 0), P_2 = (0, 0, 1), P_3 = (0, 0, 0)$$

rispettivamente nei punti

$$P_0' = (0, 1, 1), P_1' = (1, 0, 1), P_2' = (1, 1, 0), P_3' = (1, 1, 1).$$

ii) Si determinino i *punti fiss*i di f_0, ovvero i punti $P \in \mathbf{A^3}$ tali che $f_0(P) = P$.

iii) Si interpretino ora le equazioni di f_0 nello spazio euclideo $\mathbf{E^3}$, e si stabilisca se f_0 è un'isometria.

iv) Si consideri infine lo spazio proiettivo $\mathbf{P^3}$ ottenuto da $\mathbf{A^3}$ aggiungendo i punti all'infinito, e assumendo che questi ultimi siano rappresentati dall'equazione $x_0 = 0$ nelle coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Si scrivano le equazioni della proiettività $F_0 : \mathbf{P^3} \to \mathbf{P^3}$ che estendono l'affinità f_0 scritta al punto i).

v) F_0 è l'unica proiettività che manda i punti P_α nei P'_α $(\alpha = 0, \dots, 3)$?

Esercizio 3. Si considerino nel piano affine $\mathbf{A^2}$, con coordinate affini (x, y), le quattro rette

$$r_0 : \ x = 0, \quad r_1 : \ y = 0, \quad r_2 : \ x + y = 0, \quad r_3 : \ x - y = 0.$$

i) Si scrivano le precedenti equazioni nelle coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$, $x = x_1/x_0, \ y = x_2/x_0$, del piano proiettivo $\mathbf{P^2}$, ampliamento di $\mathbf{A^2}$ con la sua retta impropria $x_0 = 0$.

ii) Si scrivano le coordinate omogenee, nel duale $(\mathbf{P^2})^*$, dei punti P_0, P_1, P_2, P_3 duali di r_0, r_1, r_2, r_3, e si verifichi che tali punti di $(\mathbf{P^2})^*$ sono allineati.

iii) Calcolare il birapporto $\beta(r_0, r_1, r_2, r_3) = \beta(P_0, P_1, P_2, P_3)$ delle quattro rette e il loro modulo $j(\beta)$.