Geometria I (Canale I-Z)

Esercitazione del 6.10.2014 - Prof. P. Piccinni

Esercizio 1. Sia $V^{n^2} = M_n(\mathbf{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n ad elementi reali. Stabilire quali delle seguenti applicazioni risulta essere un funzionale lineare, e in tali casi determinare l'equazione del suo nucleo (detto anche "annullatore"):

a) la funzione traccia $\mathrm{tr} : M_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$,

b) la funzione somma degli autovalori reali: $M_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$,

c) la funzione somma degli autovalori reali, ristretta alle matrici simmetriche: $Symm_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$,

d) la funzione determinante det: $M_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$,

e) la funzione somma di tutti gli elementi della matrice: $M_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale n-dimensionale sul campo K e sia V^* il suo duale. Si consideri l'applicazione

$$b : V^* \times V \to K$$
$$b(\eta, v) = \eta(v).$$

i) Stabilire se b è una forma bilineare.

ii) Scrivere la matrice associata a b scegliendo una base arbitraria di V e la sua base duale su V^*,

iii) Scegliendo basi arbitrarie di V e di V^* (non necessariamente duali) si può affermare che la matrice associata risulta non singolare?

iv) Scegliendo basi arbitrarie di V e di V^* (non necessariamente duali) si può affermare che la matrice associata risulta simmetrica?

Esercizio 3. Sia $V = V_K^{n+1}$ uno spazio vettoriale e sia

$$P^n(V) = (V - 0)/_\sim \qquad \text{(quoziente rispetto all'equivalenza } v \sim w \Leftrightarrow \exists \lambda \in K - 0 \text{ con } v = \lambda w)$$

lo spazio proiettivo associato a V.

Dimostrare che fissando una base $(e_o, e_1, \ldots, e_n)$ di V si ottiene su $P^n(V)$ un "sistema di coordinate proiettive omogenee", ovvero una corrispondenza biunivoca tra i punti $p \in P^n(V)$ e le classi di equivalenza $[x_0, x_1, \ldots, x_n]_\sim$ di $(n+1)$-ple ordinate diverse dalla $(n+1)$-pla nulla, e dove $\sim$ è la stessa relazione di proporzionalità che definisce $P^n(V)$.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbf{R}^4$, e sia assegnata la forma quadratica $q : V \to \mathbf{R}$ tale che

$$q(\vec{v}) = 2x_1x_2 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4,$$

essendo $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in V$.

i) Determinare l'espressione della forma bilineare simmetrica $b : V \times V \to \mathbf{R}$ associata alla forma quadratica q.

ii) Determinare una base opportuna di V rispetto alla quale q abbia espressione canonica.

iii) Scrivere l'espressione canonica di q e dedurne gli indici di positività, negatività e nullità di q.