Cognome: .... Nome: ....

GEOMETRIA I (Canale I-Z, Prof. P. Piccinni) - Prova scritta del 18.2.2015

Norme per le prove in itinere e le prove scritte d'esame

1. Scrivere subito cognome, nome su questo foglio. Scrivere anche se, in caso positivo di esonero, si preferisce sostenere la prova orale nel primo o nel secondo appello.

2. Utilizzare la parte bianca (fronte e retro) di questi tre fogli per la bella copia. I fogli protocollo distribuiti a parte saranno invece utilizzati per la minuta e non devono essere consegnati.

3. **Svolgere gli esercizi con ordine e completezza, dando breve indicazione del procedimento e dei calcoli eseguiti, senza far riferimento alla minuta. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.**

4. Durante le prove non si possono consultare testi e appunti, né utilizzare calcolatrici o telefoni cellulari.

5. La durata della prova è di **2 ore e 15 minuti**. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	8	
2	8	
3	8	
4	6	
Totale	30	

DARE INDICAZIONE DEL PROCEDIMENTO E CALCOLI ANCHE UTILIZZANDO IL RETRO DI OGNI SINGOLO FOGLIO

Esercizio 1. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la forma bilineare simmetrica

$$b(\vec{x},\vec{y}) = x_0y_1 + x_1y_0 + x_0y_2 + x_2y_0 + x_1y_2 + x_2y_1,$$

essendo $\vec{x} = (x_0, x_1, x_2), \vec{y} = (y_0, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3$.

i) Determinare gli indici di positività, negatività, nullità di b, costruendo una base di $\mathbb{R}^3$ diagonalizzante b.

ii) Si consideri poi la conica $\mathcal{C}$ in $\mathbb{R}P^2$, con coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$, di equazione $q(x_0, x_1, x_2) = 0$, essendo q la forma quadratica associata a b. Scrivere le equazioni della proiettività che manda $q(x_0, x_1, x_2) = 0$ nell'equazione canonica proiettiva reale di $\mathcal{C}$.

iii) Posto $x_0 = 1, x_1 = x, x_2 = y$, qual'è l'equazione canonica affine e il tipo affine di $\mathcal{C}$ nelle coordinate (x, y)? E il tipo euclideo?

Esercizio 2. Si consideri nello spazio proiettivo $\mathbb{R}P^3$, con coordinate proiettive omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$, i punti

$$P_1 = [2, 1, 1, 1], \quad P_2 = [0, 1, -1, -1], \quad P_3 = [0, 2, 1, 1],$$

$$Q_1 = [1, 0, -1, 1], \quad Q_2 = [2, 1, 0, 4].$$

i) Scrivere l'equazione cartesiana del piano α passante per P_1, P_2, P_3, e le equazioni cartesiane della retta r passante per $Q_1 Q_2$.

ii) Determinare le coordinate del punto $S = \alpha \cap r$.

iii) Stabilire se S è allineato con una coppia di punti opportunamente scelti tra P_1, P_2, P_3.

Esercizio 3. Si consideri nel piano affine complesso la cubica

$$\mathcal{C} : x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 + 2x^2 + x - y = 0,$$

essendo (x, y) coordinate affini.

i) Determinare i punti impropri di $\mathcal{C}$, e scrivere l'equazione della retta tangente nei punti impropri che siano reali.

ii) Dedurre che $\mathcal{C}$ è riducibile, e scrivere le equazioni della retta r e della conica $\mathcal{D}$ sue componenti.

iii) La cubica $\mathcal{C}$ ha punti singolari? Quali?

Esercizio 4. Si consideri nel piano affine complesso la curva algebrica

$$\mathcal{C} : y^4 + yx^2 + x^3 + x^2 - y^2 = 0,$$

essendo (x, y) coordinate affini.

i) Verificare che $O = (0, 0)$ è un punto doppio per $\mathcal{C}$, e scrivere in esso le equazioni delle tangenti principali τ_1 e τ_2.

ii) Determinare la molteplicità di intersezione in $O = (0, 0)$ di τ_1 e τ_2 con la curva $\mathcal{C}$.

iii) Determinare i punti impropri di $\mathcal{C}$, precisando se essi sono semplici o singolari e scrivendo in essi, nei due casi, l'equazione della retta tangente o le equazioni delle tangenti principali.