GEOMETRIA I (Canale I-Z, Prof. P. Piccinni) - Risposte alla prova scritta del 18.2.2015

Esercizio 1. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la forma bilineare simmetrica

$$b(\vec{x},\vec{y}) = x_0y_1 + x_1y_0 + x_0y_2 + x_2y_0 + x_1y_2 + x_2y_1,$$

essendo $\vec{x} = (x_0, x_1, x_2), \vec{y} = (y_0, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3$.

i) Determinare gli indici di positività, negatività, nullità di b, costruendo una base di $\mathbb{R}^3$ diagonalizzante b.

ii) Si consideri poi la conica $\mathcal{C}$ in $\mathbb{R}P^2$, con coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$, di equazione $q(x_0, x_1, x_2) = 0$, essendo q la forma quadratica associata a b. Scrivere le equazioni della proiettività che manda $q(x_0, x_1, x_2) = 0$ nell'equazione canonica proiettiva reale di $\mathcal{C}$.

iii) Posto $x_0 = 1, x_1 = x, x_2 = y$, qual'è l'equazione canonica affine e il tipo affine di $\mathcal{C}$ nelle coordinate (x, y)? E il tipo euclideo?

Risposte

i) Base diagonalizzante b: p. es. $\vec{v}_0 = (1, 1, 0), \vec{v}_1 = (1, 1, -1), \vec{v}_2 = (1, -1, 0)$, con $q(\vec{v}_0) = 2, q(\vec{v}_1) = -2, q(\vec{v}_2) = -2$. Dunque gli indici sono: 1 di positività, 2 di negatività, 0 di nullità.

ii) La matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ è quindi diagonalizzante b e la matrice $\frac{1}{\sqrt{2}}C$ la riduce a forma di Sylvester. Ne segue che la proiettività

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$$

trasforma $\mathcal{C} : q(x_0, x_1, x_2) = 2x_0x_1 + 2x_0x_2 + 2x_1x_2 = 0$ nella sua equazionie canonica proiettiva reale $(x'_0)^2 - (x'_1)^2 - (x'_2)^2 = 0$.

iii) $x^2 + y^2 = 1$, dunque ellisse affine reale e circonferenza euclidea.

Esercizio 2. Si consideri nello spazio proiettivo $\mathbb{R}P^3$, con coordinate proiettive omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$, i punti

$$P_1 = [2, 1, 1, 1], \quad P_2 = [0, 1, -1, -1], \quad P_3 = [0, 2, 1, 1],$$

$$Q_1 = [1, 0, -1, 1], \quad Q_2 = [2, 1, 0, 4].$$

i) Scrivere l'equazione cartesiana del piano α passante per P_1, P_2, P_3, e le equazioni cartesiane della retta r passante per Q_1Q_2.

ii) Determinare le coordinate del punto $S = \alpha \cap r$.

iii) Stabilire se S è allineato con una coppia di punti opportunamente scelti tra P_1, P_2, P_3.

Risposte

i) $\alpha : x_2 - x_3 = 0$, $r : x_0 - 2x_1 + x_2 = 0, 4x_1 - x_2 - x_3 = 0$.

ii) $S = [0, 1, 2, 2]$.

iii) S è allineato con P_2 e P_3, essendo rg $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2$.

Esercizio 3. Si consideri nel piano affine complesso la cubica

$$\mathcal{C} : x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 + 2x^2 + x - y = 0,$$

essendo (x, y) coordinate affini.

i) Determinare i punti impropri di $\mathcal{C}$, e scrivere l'equazione della retta tangente nei punti impropri che siano reali.

ii) Dedurre che $\mathcal{C}$ è riducibile, e scrivere le equazioni della retta r e della conica $\mathcal{D}$ sue componenti.

iii) La cubica $\mathcal{C}$ ha punti singolari? Quali?

Risposte

i) Punti impropri $A = [0, 1, -1], B = [0, 1, i], C = [0, 1, -i]$ e solo A è reale. La tangente in A è $\tau_A : x + y + 1 = 0$

ii) τ_A appartiene a $\mathcal{C}$. Infatti $x^3+y^3+x^2y+xy^2+2x^2+x-y = (x+y+1)(x^2+y^2+x-y)$ e dunque in termini di supporti $\mathcal{C} = \tau_A \cup \mathcal{D}$, essendo $\mathcal{D}$ la conica irriducibile $(x^2+y^2+x-y) = 0$ (circonferenza nel piano euclideo).

iii) I punti singolari di $\mathcal{C}$ sono dunque i due punti $\tau_A \cap \mathcal{D}$. Ma τ_A è tangente a $\mathcal{D}$ nel punto $P = (-1, 0)$. Dunque P è l'unico punto doppio di $\mathcal{C}$.

Esercizio 4. Si consideri nel piano affine complesso la curva algebrica

$$\mathcal{C} : y^4 + yx^2 + x^3 + x^2 - y^2 = 0,$$

essendo (x, y) coordinate affini.

i) Verificare che $O = (0, 0)$ è un punto doppio per $\mathcal{C}$, e scrivere in esso le equazioni delle tangenti principali τ_1 e τ_2.

ii) Determinare la molteplicità di intersezione in $O = (0, 0)$ di τ_1 e τ_2 con la curva $\mathcal{C}$.

iii) Determinare i punti impropri di $\mathcal{C}$, precisando se essi sono semplici o singolari e scrivendo in essi, nei due casi, l'equazione della retta tangente o le equazioni delle tangenti principali.

Risposte

i) L'equazione non ha termine noto né termini di primo grado. $O = (0, 0)$ è dunque punto doppio con tangenti principali τ_1, τ_2 di equazione complessiva $x^2 - y^2 = 0$. Pertanto $\tau_1 : x + y = 0, \tau_2 : x - y = 0$.

ii) $I(\mathcal{C}, \tau_1; O) = 4$, $I(\mathcal{C}, \tau_2; O) = 3$.

iii) Unico punto singolare $A = [0, 1, 0]$, semplice con tangente (di flesso) la retta impropria.