Cognome: .... **Nome:** ....

Preferenza per la prova orale: *Primo appello* *Secondo appello*

GEOMETRIA I (Canale I-Z, Prof. P. Piccinni) - Prova scritta del 4.2.2015

Norme per le prove in itinere e le prove scritte d'esame

1. Scrivere subito cognome, nome su questo foglio. Scrivere anche se, in caso positivo di esonero, si preferisce sostenere la prova orale nel primo o nel secondo appello.
2. Utilizzare la parte bianca (fronte e retro) di questi tre fogli per la bella copia. I fogli protocollo distribuiti a parte saranno invece utilizzati per la minuta e non devono essere consegnati.
3. **Svolgere gli esercizi con ordine e completezza, dando breve indicazione del procedimento e dei calcoli eseguiti, senza far riferimento alla minuta. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.**
4. Durante le prove non si possono consultare testi e appunti, né utilizzare calcolatrici o telefoni cellulari.
5. La durata della prova è di **2 ore e 15 minuti**. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6	
2	8	
3	8	
4	8	
Totale	30	

DARE INDICAZIONE DEL PROCEDIMENTO E CALCOLI NELLA SEZIONE "SVOLGIMENTO" E NEL RETRO DI OGNI SINGOLO FOGLIO

Esercizio 1. Si consideri nel piano affine reale l' affinità $f : P = (x, y) \to f(P) = (x', y')$ di equazioni

$$f : \quad \begin{cases} x' = x - y - 1 \\ y' = x + y + 4 \end{cases}$$

i) Determinare i vertici del triangolo $f(T)$, essendo T il triangolo di vertici $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$.

ii) Quali proprietà euclidee ha T, se (x, y) sono coordinate cartesiane ortonormali ? [E' isoscele, equilatero, rettangolo, ...?] E il triangolo $f(T)$?

iii) L'affinità assegnata f conserva in generale la perpendicolarità? [Motivare la risposta]

iv) L'affinità assegnata f manda in generale triangoli isosceli in triangoli isosceli? [Motivare la risposta]

Esercizio 2. Si considerino le seguenti matrici in $M_2(\mathbb{C})$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

i) Stabilire quali tra A_1, A_2, A_3 sono matrici hermitiane e quali sono matrici unitarie.

ii) Stabilire per quali $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ la matrice $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3$ è hermitiana.

iii) Determinare gli autovalori di A_1, A_2, A_3 e stabilire se A_1, A_2, A_3 sono diagonalizzabili per similitudine. [Si noti che non sono richiesti autovettori e matrici diagonalizzanti].

Esercizio 3. Si consideri nel piano proiettivo $\mathbb{R}P^2$, con coordinate proiettive omogenee $[x_0, x_1, x_2]$, i punti

$$P_1 = [1, 0, 0], \quad P_2 = [1, 1, 1], \quad Q_1 = [0, 1, 0], \quad Q_2 = [0, 0, 1].$$

i) Scrivere l'equazione cartesiana delle rette $p : P_1P_2, \quad q : Q_1Q_2, \quad r_1 : P_1Q_1, \quad r_2 : P_2Q_2.$

ii) Scrivere le equazioni cartesiane delle coniche semplicemente degeneri di supporto

$$\mathcal{C} = p \cup q \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = r_1 \cup r_2,$$

e del fascio di coniche $F_{\mathcal{C},\mathcal{D}}$ da esse generato.

iii) Stabilire se il fascio di coniche $F_{\mathcal{C},\mathcal{D}}$ contiene altre coniche degeneri oltre $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$.

iv) Stabilire se tutte le coniche $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}P^2$ passanti per P_1, P_2, Q_1, Q_2 appartengono al fascio $F_{\mathcal{C},\mathcal{D}}$.

Esercizio 4. Si consideri nel piano affine complesso la curva algebrica

$$\mathcal{C} : x^2y + y^2 + 2y + 1 = 0,$$

essendo (x, y) coordinate affini.

i) Stabilire se $\mathcal{C}$ ammette punti singolari al finito e in caso affermativo scrivere in essi le equazioni delle tangenti principali.

ii) Scrivere l'equazione cartesiana $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ dell'estensione proiettiva di $\mathcal{C}$, ponendo $x = x_1/x_0, y = x_2/x_0$ e omogeneizzando.

iii) Determinare i punti impropri di $\mathcal{C}$ e in essi l'equazione della retta tangente. $\mathcal{C}$ ammette flessi all'infinito ? (motivare la risposta)