GEOMETRIA I (Canale I-Z, Prof. P. Piccinni) - Risposte alla prova scritta del 4.2.2015

Esercizio 1. Si consideri nel piano affine reale l' affinità $f : P = (x, y) \to f(P) = (x', y')$ di equazioni

$$f : \quad \begin{cases} x' & = & x & - & y & - & 1 \\ y' & = & x & + & y & + & 4 \end{cases}$$

i) Determinare i vertici del triangolo $f(T)$, essendo T il triangolo di vertici $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$.

ii) Quali proprietà euclidee ha T, se (x, y) sono coordinate cartesiane ortonormali ? [E' isoscele, equilatero, rettangolo, ...?] E il triangolo $f(T)$?

iii) L'affinità assegnata f conserva in generale la perpendicolarità? [Motivare la risposta]

iv) L'affinità assegnata f manda in generale triangoli isosceli in triangoli isosceli? [Motivare la risposta]

Risposte.
i) $f(O) = (-1, 4), f(A) = (0, 5), f(B) = (-2, 5)$
ii) T e $f(T)$ sono entrambi isosceli e rettangoli
iii) f è ottenuta componendo una isometria lineare - di matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in SO(2)$ - con la dilatazione (o omotetia) di fattore $\sqrt{2}$, e poi con una traslazione. Poiché ognuna di tali componenti di f conserva la perpendicolarità, anche f la conserva.
iv) Delle tre componenti sopra menzionate di f due conservano la lunghezza, mentre la dilatazione moltiplica per $\sqrt{2}$ *tutte* le lunghezze. Ne segue che triangoli isosceli vanno in triangoli isosceli, con tutti i lati moltiplicati per $\sqrt{2}$.

Esercizio 2. Si considerino le seguenti matrici in $M_2(\mathbb{C})$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

i) Stabilire quali tra A_1, A_2, A_3 sono matrici hermitiane e quali sono matrici unitarie.

ii) Stabilire per quali $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ la matrice $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3$ è hermitiana.

iii) Determinare gli autovalori di A_1, A_2, A_3 e stabilire se A_1, A_2, A_3 sono diagonalizzabili per similitudine. [Si noti che non sono richiesti autovettori e matrici diagonalizzanti].

Risposte.
i) A_1 e A_2 sono hermitiane, A_2 e A_3 sono unitarie.
ii) Per ogni $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $\lambda_3 = 0$
iii) Gli autovalori di A_1 sono $2, 0$, quelli di A_2 sono $1, -1$, quelli di A_3 sono $\frac{i \pm 1}{\sqrt{2}}$. Le tre matrici sono diagonalizzabili essendo hermitiane e/o unitarie.

Esercizio 3. Si consideri nel piano proiettivo $\mathbb{R}P^2$, con coordinate proiettive omogenee $[x_0, x_1, x_2]$, i punti

$$P_1 = [1, 0, 0], \quad P_2 = [1, 1, 1], \quad Q_1 = [0, 1, 0], \quad Q_2 = [0, 0, 1].$$

i) Scrivere l'equazione cartesiana delle rette $p : P_1P_2, \quad q : Q_1Q_2, \quad r_1 : P_1Q_1, \quad r_2 : P_2Q_2$.

ii) Scrivere le equazioni cartesiane delle coniche semplicemente degeneri di supporto

$$\mathcal{C} = p \cup q \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = r_1 \cup r_2,$$

e del fascio di coniche $F_{\mathcal{C},\mathcal{D}}$ da esse generato.

iii) Stabilire se il fascio di coniche $F_{\mathcal{C},\mathcal{D}}$ contiene altre coniche degeneri oltre $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$.

iv) Stabilire se tutte le coniche $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}P^2$ passanti per P_1, P_2, Q_1, Q_2 appartengono al fascio $F_{\mathcal{C},\mathcal{D}}$.

Risposte.
i) $p : x_1 - x_2 = 0, q : x_0 = 0, r_1 : x_2 = 0, r_2 : x_0 - x_1 = 0$
ii) + iii) $\mathcal{C} : x_0(x_1-x_2) = 0, \mathcal{D} : x_2(x_0-x_1) = 0$, fascio $F_{\mathcal{C},\mathcal{D}} : \lambda x_0(x_1-x_2)+\mu x_2(x_0-x_1) = 0$. Per $\lambda = \mu$ si ha la terza conica degenere del fascio.
iv) Si', perché il fascio $F_{\mathcal{C},\mathcal{D}}$ consiste per costruzione di tutte le coniche per i quattro punti assegnati.

Esercizio 4. Si consideri nel piano affine complesso la curva algebrica

$$\mathcal{C} : x^2y + y^2 + 2y + 1 = 0,$$

essendo (x, y) coordinate affini.

i) Stabilire se $\mathcal{C}$ ammette punti singolari al finito e in caso affermativo scrivere in essi le equazioni delle tangenti principali.

ii) Scrivere l'equazione cartesiana $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ dell'estensione proiettiva di $\mathcal{C}$, ponendo $x = x_1/x_0, y = x_2/x_0$ e omogeneizzando.

iii) Determinare i punti impropri di $\mathcal{C}$ e in essi l'equazione della retta tangente. $\mathcal{C}$ ammette flessi all'infinito ? (motivare la risposta)

Risposte.
i) Unico punto singolare al finito $P_0 = (0, -1)$, doppio con tangenti principali $y = \pm x - 1$.
ii) $F = x_1^2x_2 + x_0x_2^2 + 2x_0^2x_2 + x_0^3 = 0$
iii) $A = [0, 1, 0], B = [0, 0, 1]$, entrambi semplici con retta tangente rispettivamente $x_2 = 0$ e $x_0 = 0$. La prima di tali rette ha *evidentemente* molteplicità di intersezione 3 con la cubica nel punto di tangenza A. A è dunque un flesso. Invece $x_0 = 0$ ha molteplicità di intersezione 2 con la cubica nel punto di tangenza B, e quest'ultimo dunque non è un flesso.