

Cognome: Nome:

Geometria I (Canale I-Z, Prof. P. Piccinni) - Prima prova in itinere, 14.11.2014

Norme per le prove in itinere e le prove scritte d'esame

1. Scrivere subito cognome, nome su questo foglio.
2. Utilizzare la parte bianca (fronte e retro) di questi tre fogli per la bella copia. I fogli protocollo distribuiti a parte saranno invece utilizzati per la minuta e non devono essere consegnati.
3. **Svolgere gli esercizi con ordine e completezza, dando breve indicazione del procedimento e dei calcoli eseguiti, senza far riferimento alla minuta. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.**
4. Durante le prove non si possono consultare testi e appunti, né utilizzare calcolatrici o telefoni cellulari.
5. La durata della prova è di 2 ore. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Compito A

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	8	
2	6	
3	8	
4	8	
Totale	30	

SCRIVERE LE RISPOSTE NEGLI APPOSITI RIQUADRI

DARE INDICAZIONE DEL PROCEDIMENTO E CALCOLI NELLA SEZIONE "SVOLGIMENTO" E NEL RETRO DI OGNI SINGOLO FOGLIO

Esercizio 1. Si consideri la forma bilineare $b_\alpha : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$b_\alpha(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + \alpha x_2y_3 + \alpha x_3y_2 - 4x_3y_3,$$

essendo $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ e α un parametro reale.

i) Scrivere la matrice A_α associata a b_α nella base canonica di \mathbb{R}^3 , e l'espressione analitica della corrispondente forma quadratica $q_\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

ii) Determinare il rango di b_α in funzione di α .

iii) Determinare, in funzione di α , gli indici di positività e di negatività di b_α .

iv) Stabilire se per ogni α esiste una base di \mathbb{R}^3 formata da vettori non isotropi rispetto a b_α .

Soluzione (continuare anche sul retro):

Risposte:

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale reale

$$V^3 = \mathbb{R}_{\leq 2}[x] = \{P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2; a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

dei polinomi di grado ≤ 2 , si consideri la base canonica $\mathbb{E} = (1, x, x^2)$ e i funzionali lineari:

$$f_0 : P(x) \rightarrow P(0), \quad f_1 : P(x) \rightarrow P'(0), \quad f_2 : P(x) \rightarrow \frac{1}{2}P''(0),$$

dove $P(0), P'(0), P''(0)$ denotano i valori in 0 di P e delle sue derivate prima e seconda.

i) Verificare che (f_0, f_1, f_2) costituiscono la base duale di \mathbb{E} nello spazio vettoriale duale $(V^3)^*$.

ii) Sia ora $V^4 = \mathbb{R}_{\leq 3}[x] = \{P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3\}$, con base canonica $\mathbb{E} = (1, x, x^2, x^3)$. Usando $P(0), P'(0), P''(0), P'''(0)$ costruire funzionali (f_0, f_1, f_2, f_3) che forniscano in $(V^4)^*$ la base duale di \mathbb{E} .

iii) Idem per $V^{n+1} = \mathbb{R}_{\leq n}[x]$, con base $\mathbb{E} = (1, x, \dots, x^n)$, usando $P(0), P'(0), \dots, P^{(n)}(0)$.

Soluzione (continuare anche sul retro):

Risposte:

Esercizio 3. Si considerino nello spazio proiettivo $\mathbb{C}P^3$, con coordinate proiettive omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$, i piani

$$\pi_0 : x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \quad \pi_1 : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \quad \pi_2 : 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \quad \pi_3 : x_1 - x_2 = 0.$$

i) Verificare che $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3$ appartengono a uno stesso fascio F_r di piani, e scrivere le equazioni cartesiane della retta sostegno r .

ii) Siano P_0, P_1, P_2, P_3 i punti dello spazio proiettivo $(\mathbb{C}P^3)^*$, duale di $\mathbb{C}P^3$, le cui coordinate omogenee sono proporzionali ai coefficienti delle equazioni rispettivamente di $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3$. Verificare analiticamente che P_0, P_1, P_2, P_3 sono allineati, e scrivere le equazioni parametriche della retta s che li contiene.

iii) Calcolare il birapporto $\beta(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3) = \beta(P_0, P_1, P_2, P_3)$ e il modulo $j(\beta) = \frac{(\beta^2 - \beta + 1)^3}{\beta^2(\beta - 1)^2}$ dei quattro piani.

Soluzione (continuare anche sul retro):

Risposte:

Esercizio 4. Si considerino le matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}).$$

i) Stabilire se A_1, A_2, A_3 sono matrici unitarie ($A\bar{A}^t = I$), hermitiane ($A = \bar{A}^t$), antihermitiane ($A = -\bar{A}^t$).

ii) Determinare gli autovalori di A_1, A_2, A_3 .

iii) A_1, A_2, A_3 sono diagonalizzabili per similitudine? (motivare la risposta)

Soluzione (continuare anche sul retro):

Risposte: