GEOMETRIA I (Canale I-Z) - Risposte della seconda prova in itinere, 16.1.2015

Compito A

Esercizio 1. Si consideri nel piano affine reale la conica

$$\mathcal{C} : x^2 + xy - 2y^2 + x - 4y - 2 = 0,$$

essendo (x, y) coordinate affini.

i) Scrivere l'equazione $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ dell'estensione proiettiva di $\mathcal{C}$, passando a coordinate omogenee: $x = x_1/x_0,\ y = x_2/x_0$.

ii) Determinare il tipo proiettivo di $\mathcal{C}$ (conica generale, semplicemente degenere, doppiamente degenere) e il suo tipo affine (ellisse, parabola, iperbole).

iii) $\mathcal{C}$ ha punti singolari? (eventualmente indicarli)

iv) $\mathcal{C}$ è riducibile? (eventualmente indicare le componenti irriducibili)

Soluzione (continuare anche sul retro):

Risposte:

i) $F(x_0, x_1, x_2) = 2x_0^2 - x_0x_1 - x_1^2 + 4x_0x_2 - x_1x_2 + 2x_2^2 = 0$

ii) $rk \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$ conica semplicemente degenere

Inoltre $\det \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} < 0 \Rightarrow$ iperbole

Dunque si tratta di una coppia di rette reali e incidenti

iii) Si', il punto le cui coordinate omogenee risolvono il sistema lineare $F_0 = F_1 = F_2 = 0$.
Dunque $P_0 = [1, 0, -1]$ o in coordinate affini $P_0 = (0, -1)$ è punto di intersezione delle due rette in cui si spezza la conica

iv) Le due rette sono $1 - x + y = 0, x + 2y + 2 = 0$

Esercizio 2. Si consideri nello spazio proiettivo $\mathbb{R}P^3$, con coordinate proiettive omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$, la quadrica

$$\mathcal{Q} :\ x_0x_1 + x_0x_3 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0.$$

i) Verificare che $\mathcal{Q}$ è una quadrica generale.

ii) Scrivere le equazioni delle coniche $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ intersezione di $\mathcal{Q}$ con i quattro piani coordinati risp. $x_0 = 0, x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$, precisando per ognuna tra $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ se si tratti di conica generale, semplicemente degenere, o doppiamente degenere.

iii) Scrivere l'equazione della restrizione di $\mathcal{Q}$ allo spazio euclideo E^3, usando coordinate non omogenee $x = x_1, y = x_2, z = x_3$, e $x_0 = 1$.

iv) Dalle risposte i), ii), iii) si può dedurre il tipo euclideo della restrizione di $\mathcal{Q}$? (ellissoide, iperboloide ellittico, iperboloide iperbolico, paraboloide ellittico, parabolone iperbolico)

Soluzione (continuare anche sul retro):

Risposte:

i) $\det \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \neq 0$

ii) $\mathcal{C}_0 : x_0 = 0, x_3(x_1 + x_2) = 0$ (sempl. deg.) $\mathcal{C}_1 : x_1 = 0, x_3(x_0 + x_2) = 0$ (sempl. deg.)
$\mathcal{C}_2 : x_2 = 0, x_0x_1 + x_0x_3 + x_1x_3 = 0$ (generale) $\mathcal{C}_3 : x_3 = 0, x_0x_1 = 0$ (sempl. deg.)

iii) $x + z + xz + yz = 0$

iv) Paraboloide iperbolico, in quanto contiene rette e $\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = 0$

Esercizio 3. Si consideri nel piano affine complesso la curva algebrica

$$\mathcal{C} : x + y + y^4 = 0,$$

essendo (x, y) coordinate affini.

i) Stabilire se $\mathcal{C}$ ammette punti singolari al finito e all'infinito, e scrivere l'equazione cartesiana $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ dell'estensione proiettiva di $\mathcal{C}$.

ii) Scrivere l'equazione della curva hessiana $\mathcal{H} : H = \det(F_{ij}) = 0$ di $\mathcal{C}$.

iii) $\mathcal{C}$ ammette flessi al finito ? E all'infinito ? (motivare le risposte)

iv) In caso di risposta/e affermativa/e alle domande in iii), determinare i flessi di $\mathcal{C}$ con le rispettive tangenti di flesso e molteplicità di intersezione con $\mathcal{C}$.

Soluzione (continuare anche sul retro):

Risposte:

i) $F(x_0, x_1, x_2) = x_0^3x_1 + x_0^3x_2 + x_2^4 = 0,\ F_0 = 3x_0^2(x_1 + x_2),\ F_1 = x_0^3,\ F_2 = x_0^3 + 4x_2^3$
$\Rightarrow$ unico punto singolare $P_0 = [0, 1, 0]$
ii) $\mathcal{H} : x_0^4x_2^2 = 0$

iii) $\Rightarrow$ unico flesso è l'origine $O = [1, 0, 0]$

iv) tangente di flesso $x + y = 0$ con molteplicità 4