Cognome: .... **Nome:** ....

Geometria I (Canale I-Z, Prof. P. Piccinni) - Prima prova in itinere, 14.11.2014

Norme per le prove in itinere e le prove scritte d'esame

1. Scrivere subito cognome, nome su questo foglio.
2. Utilizzare la parte bianca (fronte e retro) di questi tre fogli per la bella copia. I fogli protocollo distribuiti a parte saranno invece utilizzati per la minuta e non devono essere consegnati.
3. **Svolgere gli esercizi con ordine e completezza, dando breve indicazione del procedimento e dei calcoli eseguiti, senza far riferimento alla minuta. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.**
4. Durante le prove non si possono consultare testi e appunti, né utilizzare calcolatrici o telefoni cellulari.
5. La durata della prova è di 2 ore. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Compito B

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6	
2	8	
3	8	
4	8	
Totale	30	

SCRIVERE LE RISPOSTE NEGLI APPOSITI RIQUADRI

DARE INDICAZIONE DEL PROCEDIMENTO E CALCOLI NELLA SEZIONE "SVOLGIMENTO" E NEL RETRO DI OGNI SINGOLO FOGLIO

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale reale

$$W^3 = \mathbb{R}_{\leq 2}[x] = \{Q(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2;\ c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

dei polinomi di grado ≤ 2, si consideri la base canonica $\mathbb{E} = (1, x, x^2)$ e i funzionali lineari:

$$g_0 : Q(x) \to Q(0), \quad g_1 : Q(x) \to Q'(0), \quad g_2 : Q(x) \to \frac{1}{2} Q''(0),$$

dove $Q(0), Q'(0), Q''(0)$ denotano i valori in 0 di Q e delle sue derivate prima e seconda.

i) Verificare che (g_0, g_1, g_2) costituiscono la base duale di $\mathbb{E}$ nello spazio vettoriale duale $(W^3)^*$.

ii) Sia ora $W^4 = \mathbb{R}_{\leq 3}[x] = \{Q(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3\}$, con base canonica $\mathbb{E} = (1, x, x^2, x^3)$. Usando $Q(0), Q'(0), Q''(0), Q'''(0)$ costruire funzionali (g_0, g_1, g_2, g_3) che forniscano in $(W^4)^*$ la base duale di $\mathbb{E}$.

iii) Idem per $W^{n+1} = \mathbb{R}_{\leq n}[x]$, con base $\mathbb{E} = (1, x, \dots, x^n)$, usando $Q(0), Q'(0), \dots, Q^{(n)}(0)$.

Soluzione (continuare anche sul retro):

Risposte:

Esercizio 2. Si consideri la forma bilineare $b_\alpha : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$b_\alpha(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 - \alpha x_1y_2 - \alpha x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 - 4x_3y_3,$$

essendo $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ e α un parametro reale.

i) Scrivere la matrice A_α associata a b_α nella base canonica di $\mathbb{R}^3$, e l'espressione analitica della corrispondente forma quadratica $q_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$..

ii) Determinare il rango di b_α in funzione di α.

iii) Determinare, in funzione di α, gli indici di positività e di negatività di b_α.

iv) Stabilire se per ogni α esiste una base di $\mathbb{R}^3$ formata da vettori non isotropi rispetto a b_α.

Soluzione (continuare anche sul retro):

Risposte:

Esercizio 3. Si considerino le matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -i & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}).$$

i) Stabilire se A_1, A_2, A_3 sono matrici unitarie ($A\bar{A}^t = I$), hermitiane ($A = \bar{A}^t$), antihermitiane ($A = -\bar{A}^t$).

ii) Determinare gli autovalori di A_1, A_2, A_3.

iii) A_1, A_2, A_3 sono diagonalizzabili per similitudine ? (motivare la risposta)

Soluzione (continuare anche sul retro):

Risposte:

Esercizio 4. Si considerino nello spazio proiettivo $\mathbb{C}P^3$, con coordinate proiettive omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$, i piani

$$\pi_0 : \ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \quad \pi_1 : \ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \quad \pi_2 : \ x_1 - x_2 = 0, \quad \pi_3 : \ 4x_1 - 5x_2 + x_3 = 0.$$

i) Verificare che $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3$ appartengono a uno stesso fascio F_r di piani, e scrivere le equazioni cartesiane della retta sostegno r.

ii) Siano P_0, P_1, P_2, P_3 i punti dello spazio proiettivo $(\mathbb{C}P^3)^*$, duale di $\mathbb{C}P^3$, le cui coordinate omogenee sono proporzionali ai coefficienti delle equazioni rispettivamente di $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3$. Verificare analiticamente che P_0, P_1, P_2, P_3 sono allineati, e scrivere le equazioni parametriche della retta s che li contiene.

iii) Calcolare il birapporto $\beta(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3) = \beta(P_0, P_1, P_2, P_3)$ e il modulo $j(\beta) = \frac{(\beta^2-\beta+1)^3}{\beta^2(\beta-1)^2}$ dei quattro piani.

Soluzione (continuare anche sul retro):

Risposte: