Cognome: .... **Nome:** ....

Geometria I (Canale I-Z, Prof. P. Piccinni) - Risposte della prima prova in itinere, 14.11.2014

Norme per le prove in itinere e le prove scritte d'esame

1. Scrivere subito cognome, nome su questo foglio.
2. Utilizzare la parte bianca (fronte e retro) di questi tre fogli per la bella copia. I fogli protocollo distribuiti a parte saranno invece utilizzati per la minuta e non devono essere consegnati.
3. **Svolgere gli esercizi con ordine e completezza, dando breve indicazione del procedimento e dei calcoli eseguiti, senza far riferimento alla minuta. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.**
4. Durante le prove non si possono consultare testi e appunti, né utilizzare calcolatrici o telefoni cellulari.
5. La durata della prova è di 2 ore. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Compito A

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	8	
2	6	
3	8	
4	8	
Totale	30	

SCRIVERE LE RISPOSTE NEGLI APPOSITI RIQUADRI

DARE INDICAZIONE DEL PROCEDIMENTO E CALCOLI NELLA SEZIONE "SVOLGIMENTO" E NEL RETRO DI OGNI SINGOLO FOGLIO

Esercizio 1. Si consideri la forma bilineare $b_\alpha : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$b_\alpha(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + \alpha x_2y_3 + \alpha x_3y_2 - 4x_3y_3,$$

essendo $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ e α un parametro reale.

i) Scrivere la matrice A_α associata a b_α nella base canonica di $\mathbb{R}^3$, e l'espressione analitica della corrispondente forma quadratica $q_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$..

ii) Determinare il rango di b_α in funzione di α.

iii) Determinare, in funzione di α, gli indici di positività e di negatività di b_α.

iv) Stabilire se per ogni α esiste una base di $\mathbb{R}^3$ formata da vettori non isotropi rispetto a b_α.

Soluzione (continuare anche sul retro):

Risposte:

i), ii): $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & -4 \end{pmatrix}$, $\quad \det A_\alpha = -\alpha^2 + 4 \Longrightarrow rg\ A_\alpha = \begin{cases} 3 & \text{per} \quad \alpha \neq \pm 2 \\ 2 & \text{per} \quad \alpha = \pm 2. \end{cases}$

$$q_\alpha = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2\alpha x_2x_3 - 4x_3^2$$

iii): $\begin{cases} p = 2, q = 1 & \text{per} \quad \alpha < -2, \alpha > 2 \\ p = 1, q = 2 & \text{per} \quad -2 < \alpha < 2 \\ p = 1, q = 1 & \text{per} \quad \alpha = \pm 2 \end{cases}$

iv) Esiste solo per $\alpha \neq \pm 2$.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale reale

$$V^3 = \mathbb{R}_{\leq 2}[x] = \{P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2;\ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

dei polinomi di grado ≤ 2, si consideri la base canonica $\mathbb{E} = (1, x, x^2)$ e i funzionali lineari:

$$f_0 : P(x) \to P(0), \quad f_1 : P(x) \to P'(0), \quad f_2 : P(x) \to \frac{1}{2}P''(0),$$

dove $P(0), P'(0), P''(0)$ denotano i valori in 0 di P e delle sue derivate prima e seconda.

i) Verificare che (f_0, f_1, f_2) costituiscono la base duale di $\mathbb{E}$ nello spazio vettoriale duale $(V^3)^*$.

ii) Sia ora $V^4 = \mathbb{R}_{\leq 3}[x] = \{P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\}$, con base canonica $\mathbb{E} = (1, x, x^2, x^3)$. Usando $P(0), P'(0), P''(0), P'''(0)$ costruire funzionali (f_0, f_1, f_2, f_3) che forniscano in $(V^4)^*$ la base duale di $\mathbb{E}$.

iii) Idem per $V^{n+1} = \mathbb{R}_{\leq n}[x]$, con base $\mathbb{E} = (1, x, \ldots, x^n)$, usando $P(0), P'(0), \ldots, P^{(n)}(0)$.

Soluzione (continuare anche sul retro):

Risposte:

i) $f_0(1) = 1, f_0(x) = 0, f_0(x^2) = 0, \quad f_1(1) = 0, f_1(x) = 1, f_1(x^2) = 0, \quad f_2(1) = 0, f_2(x) = 0, f_2(x^2) = 1.$

ii) $f_0 = P(0), f_1 = P'(0), f_2 = \frac{1}{2}P''(0), f_3 = \frac{1}{3!}P'''(0)$

iii) $f_0 = P(0), f_1 = P'(0), f_2 = \frac{1}{2}P''(0), f_3 = \frac{1}{3!}P'''(0), \ldots, f_n = \frac{1}{n!}P^n(0)$

Esercizio 3. Si considerino nello spazio proiettivo $\mathbb{C}P^3$, con coordinate proiettive omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$, i piani

$$\pi_0 : \; x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \quad \pi_1 : \; x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \quad \pi_2 : \; 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \quad \pi_3 : \; x_1 - x_2 = 0.$$

i) Verificare che $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3$ appartengono a uno stesso fascio F_r di piani, e scrivere le equazioni cartesiane della retta sostegno r.

ii) Siano P_0, P_1, P_2, P_3 i punti dello spazio proiettivo $(\mathbb{C}P^3)^*$, duale di $\mathbb{C}P^3$, le cui coordinate omogenee sono proporzionali ai coefficienti delle equazioni rispettivamente di $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3$. Verificare analiticamente che P_0, P_1, P_2, P_3 sono allineati, e scrivere le equazioni parametriche della retta s che li contiene.

iii) Calcolare il birapporto $\beta(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3) = \beta(P_0, P_1, P_2, P_3)$ e il modulo $j(\beta) = \frac{(\beta^2-\beta+1)^3}{\beta^2(\beta-1)^2}$ dei quattro piani.

Soluzione (continuare anche sul retro):

Risposte:

i) $rg \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2, \qquad r : x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, x_1 - 2x_2 + x_3 = 0.$

ii) $P_0 = [0, 1, 1, -2], P_1 = [0, 1, -2, 1], P_2 = [0, 2, -1, -1], P_3 = [0, 1, -1, 0]$. La verifica è il rango $= 2$ della stessa matrice. $s : x_0 = 0, x_1 = t + s, x_2 = t - 2s, x_3 = -2t + s$.

iii) $\beta = 2, j(\beta) = \frac{27}{4}$.

Esercizio 4. Si considerino le matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}).$$

i) Stabilire se A_1, A_2, A_3 sono matrici unitarie ($A\bar{A}^t = I$), hermitiane ($A = \bar{A}^t$), antihermitiane ($A = -\bar{A}^t$).

ii) Determinare gli autovalori di A_1, A_2, A_3.

iii) A_1, A_2, A_3 sono diagonalizzabili per similitudine ? (motivare la risposta)

Soluzione (continuare anche sul retro):

Risposte:

i) $\bar{A}_1^t = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{A}_2^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -i & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{A}_3^t = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$

Pertanto $A_1\bar{A}_1^t = A_2\bar{A}_2^t = A_3\bar{A}_3^t = I$ e anche $A_1 = -A_1^t, A_2 = -A_2^t, A_3 = -A_3^t$. Dunque le tre matrici sono unitarie e antihermitiane.

ii) Gli autovalori sono, per ognuna delle tre matrici, i con molteplicità algebrica 2, e $-i$ con molteplicità algebrica 1.

iii) Si', per la diagonalizzabilità delle matrici unitarie.