Geometria I (Canale M-Z)

Foglio 1 di esercizi (13.3.2017) - Prof. P. Piccinni - Tutore Dr. N. Kowalzig

Consegnare i fogli con le soluzioni al Prof. Piccinni entro martedì 21 marzo, ore 11.
Si raccomanda di svolgere gli esercizi con ordine e completezza, dando breve indicazione del procedimento e dei calcoli. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.
Si raccomanda anche di non utilizzare lo stesso foglio per esercizi diversi (un esercizio può essere svolto in più fogli, ma ogni foglio può contenere solo un esercizio o parte di esso).

Esercizio 1. Sia $V^{n^2} = M_n(\mathbf{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n ad elementi reali. Stabilire quali delle seguenti applicazioni risulta essere un funzionale lineare (dunque elemento di V^*, duale di $V = V^{n^2}$), e in tali casi determinare l'equazione dell'iperpiano suo nucleo:

a) la funzione traccia tr : $M_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$,

b) la funzione somma degli autovalori reali: $M_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$,

c) la funzione somma degli autovalori reali, ristretta alle matrici simmetriche: $Symm_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$,

d) la funzione determinante det: $M_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$,

e) la funzione somma di tutti gli elementi della matrice: $M_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale n-dimensionale sul campo K e sia V^* il suo duale. Si consideri l'applicazione

$$b : V^* \times V \to K$$
$$b(\eta, v) = \eta(v).$$

i) Stabilire se b è bilineare.

ii) Scrivere la matrice associata a b scegliendo una base arbitraria di V e la sua base duale su V^*,

iii) Scegliendo basi arbitrarie di V e di V^* (non necessariamente duali) si può affermare che la matrice associata risulta non singolare?

iv) Scegliendo basi arbitrarie di V e di V^* (non necessariamente duali) si può affermare che la matrice associata risulta simmetrica?

Esercizio 3. Sia $V = \mathbf{R^4}$, e sia assegnata la forma bilineare $b : V \times V \to \mathbf{R}$ tale che

$$b(\vec{v}, \vec{w}) = x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_4 + x_4y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_3y_4 + x_4y_3,$$

essendo $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4), \vec{w} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in V$.

i) Verificare che b è simmetrica e determinare, in termini delle coordinate (x_1, x_2, x_3, x_4), l'espressione della forma quadratica $q : V \to \mathbf{R}$ associata a b.

ii) Determinare una base opportuna di V rispetto alla quale b e q abbiano espressione diagonale canonica.

iii) Dedurne gli indici di positività, negatività e nullità di b e q.

Esercizio 4. Si consideri in $\mathbf{R^3}$ e in $\mathbf{C^3}$ la forma quadratica definita sui vettori $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ dalla formula

$$q(\vec{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + x_3^2.$$

i) Scrivere l'espressione analitica della forma bilineare simmetrica associata a q.

ii) Stabilire quali tra i vettori $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ della base canonica di $\mathbf{R^3}$ e $\mathbf{C^3}$ è isotropo rispetto a q.

iii) Determinare basi $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ di $\mathbf{R^3}$ e $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ di $\mathbf{C^3}$ in cui la matrice associata a q si rappresenta in forma diagonale canonica, rispettivamente reale di Sylvester o complessa.