Geometria I (Canale M-Z)

Foglio 7 di esercizi (15.5.2017) – Prof. P. Piccinni – Tutore Dr. N. Kowalzig

Consegnare i fogli con le soluzioni al Prof. Piccinni entro lunedì 22 maggio, ore 11.
Si raccomanda di svolgere gli esercizi con ordine e completezza, dando breve indicazione del procedimento e dei calcoli. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.
Si raccomanda anche di non utilizzare lo stesso foglio per esercizi diversi (un esercizio può essere svolto in più fogli, ma ogni foglio può contenere solo un esercizio o parte di esso).

Esercizio 1. Si consideri nel piano proiettivo reale $P(\mathbb{R}^3)$, con coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$, la conica

$$\mathcal{C}: \quad x_0^2 - 2x_0x_1 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 0.$$

i) Verificare che $\mathcal{C}$ è una conica generale a supporto non vuoto.

ii) Determinare un opportuno sistema di coordinate proiettive omogenee (x_0', x_1', x_2') rispetto a cui $\mathcal{C}$ ha equazione canonica proiettiva e scrivere tale equazione.

Esercizio 2. Si consideri nello spazio proiettivo $P(\mathbb{R}^3)$, con coordinate proiettive omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$, i punti

$$P_1 = [2, 1, 1, 1], \quad P_2 = [0, 1, -1, -1], \quad P_3 = [0, 2, 1, 1],$$

$$Q_1 = [1, 0, -1, 1], \quad Q_2 = [2, 1, 0, 4].$$

i) Scrivere l'equazione cartesiana del piano α passante per P_1, P_2, P_3, e le equazioni cartesiane della retta r passante per Q_1Q_2.

ii) Determinare le coordinate del punto $S = \alpha \cap r$.

iii) Stabilire se S è allineato con una coppia di punti opportunamente scelti tra P_1, P_2, P_3.

Esercizio 3. Nello spazio affine ampliato $A^3 \cup \pi_\infty$ (con l'aggiunta del piano all'infinito π_∞) , con coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$, siano assegnati i punti $P_1(0, -1, 1, 1)$, $P_2(0, 1, 1, 0)$ ed il piano $p : x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

i) Scrivere equazioni cartesiane in coordinate affini omogenee della retta r passante per P_1 e P_2 e dedurne che r è una retta appartenente al piano improprio $\pi_\infty : x_0 = 0$.

ii) Scrivere equazioni parametriche omogenee di r.

iii) Determinare il punto $P = r \cap p$..

Esercizio 4. Nel piano proiettivo numerico reale $P(\mathbb{R}^3)$, con coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$, siano assegnati i punti $P_0' = [1, 1, 1]$, $P_1' = [1, 1, -1]$, $P_2' = [1, -1, 1]$, $U' = [1, -1, -1]$.

i) Verificare che P_0', P_1', P_2', U' sono in posizione generale.

ii) Considerando il riferimento proiettivo che ammette i punti P_0', P_1', P_2' come punti fondamentali e U' come punto unità, stabilire le formule di trasformazione di coordinate di punto dalle sue coordinate omogenee $[x_0', x_1', x_2']$ a quelle $[x_0, x_1, x_2]$ del riferimento canonico.

iii) Scrivere nelle coordinate (x_0', x_1', x_2') l'equazione cartesiana della retta $r : x_0 + x_1 + x_2 = 0$.

Esercizio 5. Nel piano proiettivo reale $P(\mathbb{R}^3)$, con coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$, sia assegnata la conica

$$\mathcal{C}: \quad x_0^2 - 2x_0x_1 + 2x_1x_2 - x_2^2 = 0.$$

i) Verificare che $\mathcal{C}$ è una conica semplicemente degenere.

ii) Determinare un sistema opportuno di coordinate proiettive omogenee (x_0', x_1', x_2') rispetto a cui $\mathcal{C}$ ha equazione canonica proiettiva e scrivere tale equazione.

iii) Determinare le equazioni delle due rette in cui si spezza $\mathcal{C}$.