Geometria I (Canale M-Z)

Foglio 2 di esercizi (20.3.2017) - Prof. P. Piccinni - Tutore Dr. N. Kowalzig

Consegnare i fogli con le soluzioni al Prof. Piccinni entro martedì 28 marzo, ore 11.
Si raccomanda di svolgere gli esercizi con ordine e completezza, dando breve indicazione del procedimento e dei calcoli. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.
Si raccomanda anche di non utilizzare lo stesso foglio per esercizi diversi (un esercizio può essere svolto in più fogli, ma ogni foglio può contenere solo un esercizio o parte di esso).

Esercizio 1. Sia $V = \mathbf{R}^4$, e sia assegnata la forma quadratica $q : V \to \mathbf{R}$ tale che

$$q(\vec{v}) = 2x_1x_2 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4,$$

essendo $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in V$.

i) Determinare l'espressione della forma bilineare simmetrica $b : V \times V \to \mathbf{R}$ associata alla forma quadratica q.

ii) Determinare una base opportuna di V rispetto alla quale q abbia espressione canonica.

iii) Scrivere l'espressione canonica di q e dedurne gli indici di positività, negatività e nullità di q.

Esercizio 2. Sia $V^{n^2} = M_n(\mathbf{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n ad elementi reali.

i) Dimostrare che la funzione

$$f : M_n(\mathbf{R}) \times M_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$$
$$f(A, B) = tr(A\ B^t)$$

definisce una forma bilineare simmetrica su V^{n^2}.

ii) Determinare gli indici di positività, negatività e nullità di f.

Esercizio 3. Sia $V = \mathbf{C}^3$, e sia assegnata la forma quadratica $q : V \to \mathbf{C}$ tale che

$$q(\vec{v}) = 2ix_1x_2 + 2x_1x_3 + i2x_2x_3,$$

essendo $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3) \in V$.

i) Determinare l'espressione della forma bilineare simmetrica $b : V \times V \to \mathbf{C}$ associata alla forma quadratica q.

ii) Determinare una base opportuna di V rispetto alla quale q abbia espressione canonica.

Esercizio 4. Si considerino le matrici:

$$A(h) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ h & 2+h & 2+h \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B(k) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 2 & 4 & 6+k \\ -1 & -1 & 2+k \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di h e k, i determinanti e le tracce di $A(h)$ e di $B(k)$.

ii) Verificare che esiste un'unica coppia (h_0, k_0) tale che risulti det $A(h_0) =$ det $B(k_0)$ e tr $A(h_0) =$ tr $B(k_0)$.

iii) Stabilire se le matrici $A_0 = A(h_0)$ e $B_0 = B(k_0)$ hanno gli stessi autovalori.

iv) Stabilire infine se A_0 e B_0 sono matrici simili.