Geometria I (Canale M-Z)

Foglio 8 di esercizi (22.5.2017) – Prof. P. Piccinni – Tutore Dr. N. Kowalzig

Consegnare i fogli con le soluzioni al Prof. Piccinni entro lunedì 29 maggio, ore 11.
Si raccomanda di svolgere gli esercizi con ordine e completezza, dando breve indicazione del procedimento e dei calcoli. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.
Si raccomanda anche di non utilizzare lo stesso foglio per esercizi diversi (un esercizio può essere svolto in più fogli, ma ogni foglio può contenere solo un esercizio o parte di esso).

Esercizio 1. Nel piano proiettivo reale, con coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$, si consideri l'equazione cartesiana della conica

$$\mathcal{C}: \ x_0^2 + x_1x_2 - x_0x_1 = 0.$$

Scegliere una *carta affine* $A^2_{\mathbb{R}} \hookrightarrow P(\mathbb{R}^3)$ affinché questa conica diventi la chiusura proiettiva

(*i*) di un'iperbole non-degenere affine;

(*ii*) di una parabola non-degenere affine.

Determinare in entrambi i casi i punti all'infinito nonché gli assi di simmetria.

Esercizio 2. Sia $\mathbf{P}^n_{\mathbb{K}}$ uno spazio proiettivo di dimensione n con coordinate omogenee $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$. Dimostrare che

(*i*) l'insieme $\mathcal{C}(\mathbf{P}^2_{\mathbb{K}})$ di tutte le coniche di $\mathbf{P}^2_{\mathbb{K}}$ si può identificare in modo naturale con $\mathbf{P}^5_{\mathbb{K}}$, ovvero che tutte le coniche possono essere *parametrizzate* su uno spazio $\mathbf{P}^5_{\mathbb{K}}$;

(*ii*) l'*immersione di Veronese*, ovvero la mappa

$$\mathbf{P}^2_{\mathbb{K}} \hookrightarrow \mathbf{P}^5_{\mathbb{K}}, \quad [s, t, u] \mapsto [s^2, 2st, t^2, 2su, 2tu, u^2]$$

parametrizza le coniche doppiamente degeneri;

(*iii*) la mappa

$$\mathbf{P}^2_{\mathbb{K}} \times \mathbf{P}^2_{\mathbb{K}} \to \mathbf{P}^5_{\mathbb{K}},$$
$$([s_1, t_1, u_1], [s_2, t_2, u_2]) \mapsto [s_1s_2, s_1t_2 + t_1s_2, t_1t_2, s_1u_2 + u_1s_2, t_1u_2 + u_1t_2, u_1u_2]$$

parametrizza le coniche semplicemente degeneri.

Esercizio 3. Si considerino nel piano affine complesso $\mathbf{A}^2_{\mathbb{C}}$, con coordinate (x, y), le parabole

$$\mathcal{P}: \ y = x^2, \qquad \mathcal{P}': \ x = y^2.$$

(*i*) Determinare la coordinate dei quattro punti di intersezione di $\mathcal{P}$ con $\mathcal{P}'$.

(*ii*) Scrivere, mediante le sostituzioni $x = x_1/x_0, y = x_2/x_0$, le equazioni in coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$ delle parabole $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$.

(*iii*) Scrivere l'equazione delle coniche $\mathcal{C}(\lambda, \mu) = \lambda\mathcal{P} + \mu\mathcal{P}'$ del fascio individuato da $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$, e stabilire al variare dei parametri omogenei $[\lambda, \mu]$ il tipo affine di $\mathcal{C}(\lambda, \mu)$.

(*iv*) Scrivere le equazioni cartesiane delle coniche degeneri del fascio $\mathcal{C}(\lambda, \mu) = \lambda\mathcal{P} + \mu\mathcal{P}'$.