Geometria I (Canale M-Z)

Foglio 5 di esercizi (26.4.2017) – Prof. P. Piccinni – Tutore Dr. N. Kowalzig

Consegnare i fogli con le soluzioni al Prof. Piccinni entro giovedì 4 maggio, ore 11. Si raccomanda di svolgere gli esercizi con ordine e completezza, dando breve indicazione del procedimento e dei calcoli. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione. Si raccomanda anche di non utilizzare lo stesso foglio per esercizi diversi (un esercizio può essere svolto in più fogli, ma ogni foglio può contenere solo un esercizio o parte di esso).

Esercizio 1. Siano r_1, r_2, s_1, s_2 rette proiettive in un piano proiettivo $\mathbf{P}^2_{\mathbb{K}}$. Siano $r_1 \cap r_2 =: P$, $s_1 \cap s_2 =: Q$ con $P \notin s_1$, $P \notin s_2$, $Q \notin r_1$, $Q \notin r_2$ nonché $P \neq Q$. Sia ancora $B_{ij} := r_i \cap s_j$.

- (i) Scegliere in $\mathbf{P}^2_{\mathbb{K}}$ una "retta impropria" in modo che il piano affine $A^2_{\mathbb{K}}$ suo complementare contenga tutti i punti B_{ij} e in modo che essi formino in $A^2_{\mathbb{K}}$ un parallelogramma.
- (ii) Stabilire poi quante possibilità ci sono per scegliere un tal piano affine $A^2_{\mathbb{K}}$ con la proprietà indicata (motivare, come sempre, la risposta).

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $\phi : \mathbf{P}(V) \to \mathbf{P}(V)$ una proiettività. Dimostrare che

- (i) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oppure $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e se $\dim(\mathbf{P}(V))$ è pari, allora ϕ ha un punto fisso, ovvero $\phi(P) = P$ per un certo $P \in \mathbf{P}(V)$.
- (ii) Dare un'esempio di proiettività $\psi : \mathbf{P}^1_{\mathbb{R}} \to \mathbf{P}^1_{\mathbb{R}}$ che non ha un punto fisso.

Esercizio 3. Sia $\mathbf{P}(V)$ uno spazio proiettivo e $P \in \mathbf{P}(V)$ un punto. Sia P^* l'insieme di tutte le rette in $\mathbf{P}(V)$ passanti per P.

- (i) Se $\dim(\mathbf{P}(V)) = 2$, dimostrare che P^* è una retta nel piano proiettivo duale $\mathbf{P}(V)^*$.
- (ii) Sia ora $V = \mathbb{R}^4$. Determinare una biiezione tra P^* ed un iperpiano π di $\mathbf{P}^3_{\mathbb{R}}$ che non contiene il punto P.

Esercizio 4. (*Assiomatica della Geometria Proiettiva*) Sia $\mathbf{P}(V)$ uno spazio proiettivo. Mostrare che

- (i) per ogni coppia di punti $P, Q \in \mathbf{P}(V)$ distinti passa un'unica retta r_{PQ}.
- (ii) Su ogni retta vi sono almeno tre punti.
- (iii) Siano P, Q, R, S quattro punti distinti. Se le rette r_{PQ} e r_{RS} sono incidenti, allora lo sono anche le rette r_{PR} e r_{QS}.

Sia ora $V = \mathbb{K}^n$. Mostrare che due rette distinte di $\mathbf{P}^2_{\mathbb{K}}$ si incontrano sempre in uno ed un solo punto. Due rette di $\mathbf{P}^3_{\mathbb{K}}$ si incontrano sempre? E due piani di $\mathbf{P}^4_{\mathbb{K}}$? E due piani di $\mathbf{P}^5_{\mathbb{K}}$? (Dare delle dimostrazioni o portare dei controesempi).