Geometria I (Canale M-Z)

Foglio 3 di esercizi (27.3.2017) - Prof. P. Piccinni - Tutore Dr. N. Kowalzig

Consegnare i fogli con le soluzioni al Prof. Piccinni entro martedì 4 aprile, ore 11.
Si raccomanda di svolgere gli esercizi con ordine e completezza, dando breve indicazione del procedimento e dei calcoli. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.
Si raccomanda anche di non utilizzare lo stesso foglio per esercizi diversi (un esercizio può essere svolto in più fogli, ma ogni foglio può contenere solo un esercizio o parte di esso).

Esercizio 1. Sia assegnato l'endomorfismo $F : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$, definito da

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1, 3x_2, 4x_2 - x_3, x_4),$$

essendo $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$.

i) Determinare la matrice A associata a F rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ di $\mathbf{R}^4$.

ii) Determinare gli autovalori di F e le relative molteplicità algebriche e geometriche. Dedurne che F è diagonalizzabile.

iii) Determinare una base $\mathcal{B}' = (\vec{v}_1', \vec{v}_2', \vec{v}_3', \vec{v}_4')$ di $\mathbf{R}^4$ costituita da autovettori di F.

iv) Detta A' la matrice diagonale associata a F nella base $\mathcal{B}'$, determinare una matrice non singolare C tale che $A' = C^{-1}AC$.

Esercizio 2. Siano assegnate le matrici quadrate

$$A(k) = \begin{pmatrix} -1 & k & 0 \\ 0 & k-1 & 0 \\ 0 & k & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

essendo k un parametro reale.

i) Determinare il valore k_0 del parametro k per cui $A(k)$ ammette il numero 1 come autovalore.

ii) Posto $A_0 = A(k_0)$, verificare che la matrice A_0 è diagonalizzabile.

iii) Determinare una matrice invertibile C tale che $C^{-1}A_0C$ sia una matrice diagonale.

iv) Dire se le matrici A_0 e B sono o non sono simili.

Esercizio 3. Sia assegnato, nello spazio vettoriale $\mathbf{R^3}$, l'endomorfismo F definito da $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2, 2x_1 + x_3)$.

i) Scrivere la matrice associata a F nella base canonica e dedurne che F è un endomorfismo simmetrico (o autoaggiunto) rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbf{R^3}$.

ii) Determinare una base ortonormale $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$ di $\mathbf{R^3}$ formata da autovettori di F . Stabilire poi se una tale base ortonormale sia unica, se ne esista un numero finito, o se vi siano infinite basi ortonormali con la proprietà indicata (motivare la risposta).

iii) Si consideri poi la famiglia di endomorfismi F_s definiti da $F_s(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 + [2+s]x_3, 2x_1 - [2+s]x_2 + x_3)$, e si osservi che per $s = -2$ si ottiene il precedente endomorfismo simmetrico F. Stabilire per quali valori di s l'endomorfismo F_s è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Si consideri l'endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che ha per autovettori i vettori

$$\vec{v}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \vec{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \vec{v}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

e che ha autovalori, rispettivamente, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$.

i) Scrivere la matrice A che rappresenta T nella base $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

ii) Scrivere la matrice A' che rappresenta T nella base canonica $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ di $\mathbb{R}^3$.

iii) Quanto vale $\det(A')$? E la traccia di A'? E il polinomio caratteristico di A'?

iv) Si consideri ora l'endomorfismo composizione $T^2 := T \circ T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. È invertibile?

v) Quali sono i suoi autovalori? È diagonalizzabile?

Suggerimento: si può rispondere alle domande iii), iv), v) senza trovare la matrice richiesta al punto ii).