Geometria I (Canale M-Z)

Foglio 9 di esercizi (29.5.2017) – Prof. P. Piccinni – Tutore Dr. N. Kowalzig

Consegnare i fogli con le soluzioni al Prof. Piccinni entro martedì 6 giugno, ore 11.
Si raccomanda di svolgere gli esercizi con ordine e completezza, dando breve indicazione del procedimento e dei calcoli. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.
Si raccomanda anche di non utilizzare lo stesso foglio per esercizi diversi (un esercizio può essere svolto in più fogli, ma ogni foglio può contenere solo un esercizio o parte di esso).

Riassuntino. Come visto in classe, se $\mathcal{Q}$ è una quadrica affine in K^n, allora esistono una matrice simmetrica $A \in M(n, K)$ non nulla, un vettore $B \in K^n$ nonché uno scalare $c \in K$ tale che

$$Q(x) = x^t A x + 2B^t x + c, \qquad x = (x_1, \dots, x_n)^t, \qquad B = (b_1, \dots, b_n)^t.$$

Usando la carta affine $\iota : K^n \hookrightarrow P^n(K)$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto [1, x_1, \dots, x_n]$, la chiusura proiettiva $\bar{\mathcal{Q}}$ è rappresentata dalla matrice a blocchi

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} c & B^t \\ B & A \end{pmatrix} \in M(n+1, K).$$

La quadrica all'infinito Q_∞ invece è definita come l'intersezione $\mathcal{Q}_\infty = \bar{\mathcal{Q}} \cap H_0$, dove H_0 denota l'iperpiano improprio in $P^n(K)$.

Due quadriche affini $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ sono dette *affinemente equivalenti* se esiste una affinità f tale che $\mathcal{Q} = f(\mathcal{Q}')$. Se $f(x) = Mx + N$, con $M \in \mathrm{GL}(n, K)$ e $N \in K^n$, allora f è la restrizione alla carta affine ι della proiettività di $P^n(K)$ rappresentata dalla matrice a blocchi

$$\tilde{M}_N := \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ N & M \end{pmatrix} \in M(n+1, K).$$

La quadrica $f(\mathcal{Q})$ ̀dunque rappresentata dalla matrice $\tilde{M}_N^t \tilde{A} \tilde{M}_N$, ovvero $Q \circ f = \tilde{M}_N^t \tilde{A} \tilde{M}_N$.

Esercizio 1. Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica e $f(x) = Mx + N$ un'affinità.

(i) Scrivere esplicitamente la matrice $\tilde{M}_N^t \tilde{A} \tilde{M}_N$ menzionata sopra.
(ii) Dimostrare che se due quadriche sono affinemente equivalenti, allora le loro chiusure proiettive nonché le loro quadriche all'infinito sono proiettivamente equivalenti.
(iii) Viceversa, dimostrare che se le chiusure proiettive e le quadriche all'infinito di due quadriche affini $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ sono proiettivamente equivalenti, allora $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ sono affinemente equivalenti.

Esercizio 2. (*Quadriche a centro*) Una quadrica si chiama *a centro* se esiste $R \in K^n$ tale che $Q(x + R) = Q(x - R)$ per ogni $x \in K^n$. In tal caso R è detto il centro di $\mathcal{Q}$. Dimostrare che

(i) se il vettore nullo è centro di $\mathcal{Q}$, allora $B = 0$;
(ii) R è centro di $\mathcal{Q}$ se e solo se l'affinità $x \mapsto -x + 2R$ lascia invariata $\tilde{A}$;
(iii) se $\mathcal{Q}$ è una quadrica di centro R e f un'affinità, allora $f^{-1}(R)$ è il centro di $f^{-1}(\mathcal{Q})$.

Di conseguenza, la proprietà *essere al centro* è un'invariante affine.

Esercizio 3. Determinare il tipo affine delle seguenti quadriche in $\mathbb{R}^3$

(i) $\mathcal{Q}: \ x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1 - 4x_2 + 4 = 0$,
(ii) $\mathcal{Q}': \ x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_2 - 2x_3 + 10 = 0$

utilizzando solo gli invarianti affini e/o i semi-invarianti affini (cioè la segnatura $\mathrm{segn}(A) := \big(p_+(A), p_-(A)\big)$ e $\mathrm{segn}(\tilde{A}) := \big(p_+(\tilde{A}), p_-(\tilde{A})\big)$ delle forme quadratiche associate).

Esercizio 4. Considerare lo spazio vettoriale $M(2, \mathbb{R})$ delle matrici reali 2×2. Dimostrare che

$$(\det - \mathrm{tr}) : M(2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

è una funzione quadratica su $M(2, \mathbb{R})$ e classificare il tipo affine della quadrica di $M(2, \mathbb{R})$ data da

$$\mathcal{Q} = \{A \in M(2, \mathbb{R}) \mid \det(A) - \mathrm{tr}(A) = 0\}.$$