Geometria I (Canale M-Z)

Foglio 4 di esercizi (4.4.2017) - Prof. P. Piccinni - Tutore Dr. N. Kowalzig

Consegnare i fogli con le soluzioni al Prof. Piccinni entro lunedì 24 aprile, ore 14.

Si raccomanda di svolgere gli esercizi con ordine e completezza, dando breve indicazione del procedimento e dei calcoli. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.

Si raccomanda anche di non utilizzare lo stesso foglio per esercizi diversi (un esercizio può essere svolto in più fogli, ma ogni foglio può contenere solo un esercizio o parte di esso).

Esercizio 1. Sia assegnato l'endomorfismo $F : \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$, definito da

$$F(z_1, z_2, z_3) = (-z_1, 5z_2 + 4iz_3, -4iz_2 + 5z_3),$$

essendo $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbf{C}^3$.

i) Determinare la matrice A associata a F rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ di $\mathbf{C}^3$ e stabilire se F è un operatore hermitiano rispetto al prodotto scalare hermitiano standard di $\mathbf{C}^3$.

ii) Stabilire se la matrice A è hermitiana e se è unitaria.

iii) Determinare gli autovalori di F.

iv) Determinare una base $\mathcal{B}' = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ di $\mathbf{C}^3$ costituita da autovettori di F. Esiste anche una base ortonormale di autovettori?

Esercizio 2. Nel piano proiettivo numerico reale $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$, con coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$, siano assegnati i punti $Q_0 = [1, 1, 1]$, $Q_1 = [1, 1, -1]$, $Q_2 = [1, -1, 1]$, $Q_3 = [1, -1, -1]$.

i) Verificare che Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 sono in posizione generale, ovvero a tre a tre non allineati.

ii) Scrivere le equazioni cartesiane delle rette r per Q_0, Q_1 e s per Q_2, Q_3.

iii) Determinare le coordinate omogenee del punto $A = r \cap s$.

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione $h : \mathbf{C}^3 \times \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}$ definita da

$$h(\vec{z}, \vec{w}) = z_1\bar{w}_2 + z_2\bar{w}_1 + z_3\bar{w}_3,$$

essendo $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3), \vec{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbf{C}^3$.

i) Stabilire se h è una forma bilineare simmetrica e in caso se è definita positiva.

ii) Stabilire se h è una forma sesquilineare hermitiana e in caso se è definita positiva..

Esercizio 4. Nello spazio proiettivo $\mathbf{P}^3_{\mathbf{R}}$, con coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$, siano dati il piano

$$\alpha : \quad 3x_0 + x_2 + x_3 = 0,$$

e la retta

$$r : \quad x_0 + x_1 = 0, \;\; x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

i) Determinare le coordinate omogenee di $P_0 = \alpha \cap r$;

ii) Assumendo il piano $x_0 = 0$ come piano improprio, scrivere le equazioni cartesiane di α e di r nelle coordinate affini non omogenee $x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = \frac{x_2}{x_0}$, $z = \frac{x_3}{x_0}$ di $A^3_{\mathbf{R}}$;.

iii) Stabilire se r e α sono paralleli in $A^3_{\mathbf{R}}$.