Geometria I (Canale M-Z)

Foglio 6 di esercizi (4.5.2017) – Prof. P. Piccinni – Tutore Dr. N. Kowalzig

Consegnare i fogli con le soluzioni al Prof. Piccinni entro giovedì 11 maggio, ore 11.
Si raccomanda di svolgere gli esercizi con ordine e completezza, dando breve indicazione del procedimento e dei calcoli. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.
Si raccomanda anche di non utilizzare lo stesso foglio per esercizi diversi (un esercizio può essere svolto in più fogli, ma ogni foglio può contenere solo un esercizio o parte di esso).

Esercizio 1. Nel piano proiettivo numerico reale $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$, con coordinate proiettive omogenee $[x_0, x_1, x_2]$, siano assegnati i punti $P'_0 = [1, 1, 1]$, $P'_1 = [1, 1, -1]$, $P'_2 = [1, -1, 1]$, $U' = [1, -1, -1]$.

(i) Verificare che P'_0, P'_1, P'_2, U' sono in posizione generale, ovvero a tre a tre non allineati.

(ii) Considerando il nuovo riferimento proiettivo che ha i punti P'_0, P'_1, P'_2 come punti fondamentali e U' come punto unità, scrivere le formule di trasformazione di coordinate di punto dalle coordinate omogenee $[x'_0, x'_1, x'_2]$ del nuovo riferimento a quelle iniziali $[x_0, x_1, x_2]$.

(iii) Scrivere nelle coordinate $[x'_0, x'_1, x'_2]$ l'equazione cartesiana della retta $r : x_0 + x_1 + x_2 = 0$, e della retta "impropria" $s : x_0 = 0$.

Esercizio 2. Piano affine reale $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ con coordinate affini (x, y). Si considerino i seguenti quadrilateri:

$$\mathcal{Q} = \{|x| \leq 1,\ \ |y| \leq 1\}, \qquad \mathcal{Q}' = \{|y - 2x| \leq 2,\ \ |y + 2x| \leq 2\}, \qquad \mathcal{Q}'' = \{|y| \leq 1,\ \ y + 2|x| \leq 3\}.$$

(i) Si trovino i vertici $P, Q, R, S; P', Q', R', S'; P'', Q'', R'', S''$ rispettivamente di $\mathcal{Q}; \mathcal{Q}'; \mathcal{Q}''$.

(ii) Si determini (se esiste) un'affinità f che porta $\mathcal{Q}$ in $\mathcal{Q}'$.

(iii) Si determini (se esiste) un'affinità g che porta $\mathcal{Q}$ in $\mathcal{Q}''$.

(iv) Si determini (se esiste) una proiettività h che porta $\mathcal{Q}'$ in $\mathcal{Q}''$.

(Nota: per semplicità, si chiamino P, P', P'' i vertici nel primo quadrante, Q, Q', Q'' quelli nel secondo, R, R', R'' quelli nel terzo ecc.).

Esercizio 3. Spazio proiettivo $\mathbf{P}^3_{\mathbf{R}}$ - Coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$.
Siano dati il piano $\alpha :\ 3x_0 + x_2 + x_3 = 0$ e la retta $r :\ x_0 + x_1 = 0,\ \ x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

(i) Determinare le coordinate omogenee di $P_0 = \alpha \cap r$.

(ii) Assumendo il piano $x_0 = 0$ come piano improprio, scrivere le equazioni cartesiane di α e di r nelle seguenti coordinate affini non omogenee di $\mathbf{A}^3_{\mathbf{R}}$:

$$x = \frac{x_1}{x_2},\ y = \frac{x_2}{x_0},\ z = \frac{x_3}{x_0}.$$

(iii) Stabilire se r e α sono paralleli in $\mathbf{A}^3_{\mathbf{R}}$.

(iv) Esiste una proiettività $\varphi : \mathbf{P}^3_{\mathbf{R}} \to \mathbf{P}^3_{\mathbf{R}}$ che manda α nel piano $x_0 = 0$ e la retta r nella retta di equazioni $x_1 = x_2 = 0$? (Motivare la risposta)

Esercizio 4. Un'*involuzione* è una proiettività $\phi \neq \mathrm{id}$ tale che $\phi^2 := \phi \circ \phi = \mathrm{id}$, dove id denoti l'applicazione identità.

(i) Dimostrare che ogni proiettività di una retta proiettiva è un'involuzione se e solo se esistono due punti P e P' distinti tale che $\phi(P) = P'$ e $\phi(P') = P$.

(ii) Siano (P_1, P_2, P_3) e (P'_1, P'_2, P'_3) due terne di punti distinti su una retta proiettiva. Sia ψ la proiettività unica che mappa P_i a P'_i per $i = 1, \ldots, 3$. Dimostrare che ψ è un'involuzione se e solo se risulta, per $j = 1, 2, 3$:

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P'_j) = \beta(P'_1, P'_2, P'_3, P_j).$$

(iii) Sia ϕ un'involuzione di una retta proiettiva reale. Dimostrare che se ϕ ha un punto fisso, allora ne ha esattamente due. Siano chiamati P e Q. Dimostrare che per ogni punto R della retta si ha

$$\beta(P, Q, R, \phi(R)) = -1.$$